Geometrie

Modul 4b

Axiome, Sätze und Definitionen

Jürgen Roth

juergen-roth.de

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Geometrie 4b

1. Ideen der Geometrie
2. Kongruenzabbildungen der Ebene
3. Figuren in der Ebene
4. Flächeninhalte
5. Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren
6. Satzgruppe des Pythagoras

1

Geometrie 4b

Ideen der Geometrie

Hilbertsches Axiomensystem

Hinweis: Inzidenz eines Punktes $\boldsymbol{P}$ mit einer Geraden $\boldsymbol{g}$ oder Ebene $\boldsymbol{\varepsilon}$ bedeutet, dass $\boldsymbol{P}$ auf $\boldsymbol{g}$ oder $\boldsymbol{\varepsilon}$ liegt ($\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{g}$ bzw. $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\varepsilon}$). Inzidiert die Gerade $\boldsymbol{g}$ mit der Ebene $\boldsymbol{\varepsilon}$, so ist die Geraden $\boldsymbol{g}$ Teilmenge der Ebene $\boldsymbol{\varepsilon}$, es gilt also: $\boldsymbol{g} \subset \boldsymbol{\epsilon}$.

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

(1) Axiome der Verknüpfung (Inzidenz)

I1 Zwei voneinander verschiedene Punkte $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ bestimmen stets eine Gerade $\boldsymbol{g}$.

I2 Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.

I3 Auf einer Geraden gibt es stets mindestens zwei Punkte.
In einer Ebene gibt es stets mindestens drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

I4 Drei nicht auf derselben Geraden liegende Punkte $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ bestimmen stets eine Ebene $\boldsymbol{\varepsilon}$.

(1) Axiome der Verknüpfung (Inzidenz) (Forts.)

I5 Irgend drei Punkte einer Ebene $\boldsymbol{\varepsilon}$, die nicht auf derselben Geraden liegen, bestimmen die Ebene $\boldsymbol{\varepsilon}$.

I6 Wenn zwei Punkte $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ einer Geraden $\boldsymbol{g}$ in einer Ebene $\boldsymbol{\varepsilon}$ liegen, so liegt jeder Punkt von $\boldsymbol{g}$ in der Ebene $\boldsymbol{\varepsilon}$.

I7 Wenn zwei Ebenen $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varphi}$ einen gemeinsamen Punkt $\boldsymbol{A}$ haben, so haben sie mindestens einen weiteren gemeinsamen Punkt $\boldsymbol{B}$.

I8 Es gibt mindestens vier Punkte, die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen.

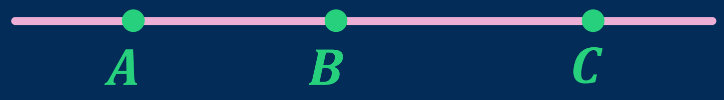
Hilbertsches Axiomensystem

Hinweise: Für „der Punkt C liegt zwischen den Punkten A und B" schreibt man kurz: A–C–B.
Mit der Relation „liegt zwischen" kann man z.B. den Begriff Strecke definieren.

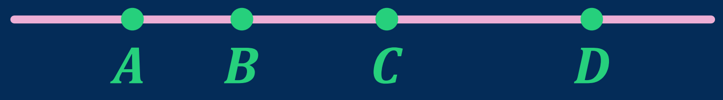
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

(2) Axiome der Anordnung

A1 Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, dann liegt B auch zwischen C und A.



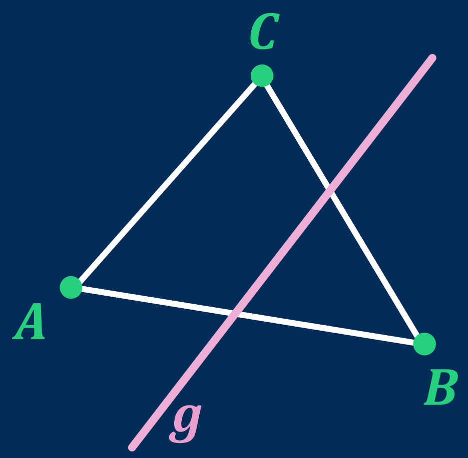
A2 Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es stets mindestens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und mindestens einen Punkt D, so dass C zwischen A und D liegt.



A3 Von drei Punkten einer Geraden liegt immer genau einer zwischen den beiden anderen.

(2) Axiome der Anordnung (Fortsetzung)

A4 (Axiom von Pasch)
Falls eine Gerade g durch keinen der Eckpunkte eines Dreiecks verläuft sowie eine Seite dieses Dreiecks schneidet, so schneidet g noch eine weitere Seite des Dreiecks.



Moritz Pasch
(1843 – 1930)

Hilbertsches Axiomensystem

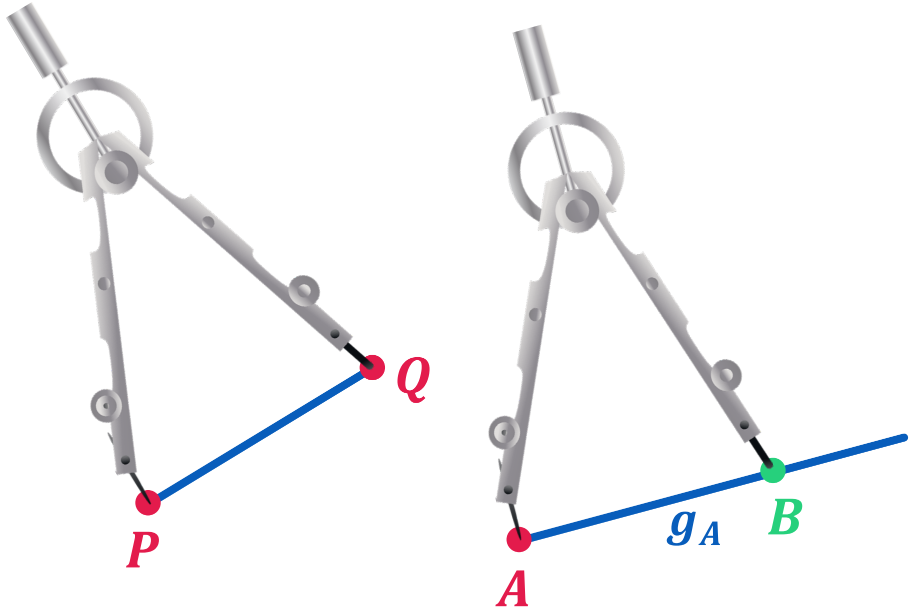
Hinweis: Für „die Strecke $[PQ]$ ist kongruent (deckungsgleich) zur Strecke $[AB]$“ schreibt man kurz: $[PQ] \cong [AB]$

(3) Axiome der Kongruenz

K1 Eindeutige Streckenabtragung und Selbstkongruenz

Ist $[PQ]$ eine Strecke und g_A eine von A ausgehende Halbgerade, dann gibt es genau einen Punkt $B \in g_A$, so dass $[PQ]$ kongruent zu $[AB]$ ist, also gilt: $[PQ] \cong [AB]$

Jede Strecke ist zu sich selbst kongruent, es gilt also: $[AB] \cong [AB]$ und $[AB] \cong [BA]$

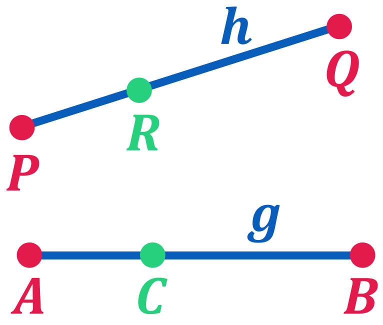


K2 Transitivität der Streckenkongruenz

Wenn eine Strecke zu zwei anderen Strecken kongruent ist, so sind diese auch zueinander kongruent. Es gilt also: $[AB] \cong [PQ] \wedge [PQ] \cong [CD] \Rightarrow [AB] \cong [CD]$

K3 Erhalt der Kongruenz bei Streckenaddition

Ist C ein Punkt der Strecke $[AB]$ und R ein Punkt der Strecke $[PQ]$, dann folgt aus $[AC] \cong [PR]$ und $[CB] \cong [RQ]$, dass auch $[AB] \cong [PQ]$.



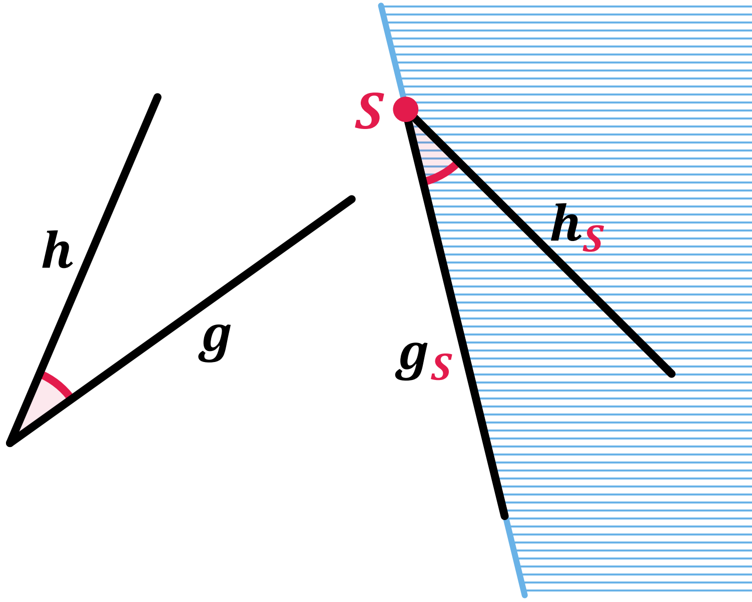
Hilbertsches Axiomensystem

(3) Kongruenzaxiome (Fortsetzung)

K4 Eindeutige Winkelabtragung und Selbstkongruenz

Zu jedem Winkel $\angle(g, h)$ und jeder Halbgeraden g_S gibt es in jeder Halbebene bzgl. g_S genau eine Halbgerade h_S mit demselben Scheitel S, so dass $\angle(g, h)$ und $\angle(g_S, h_S)$ zueinander kongruent sind, also gilt: $\angle(g, h) \cong \angle(g_S, h_S)$

Jeder Winkel ist zu sich selbst kongruent, es gilt also: $\angle(g, h) \cong \angle(g, h)$ und $\angle(g, h) \cong \angle(h, g)$

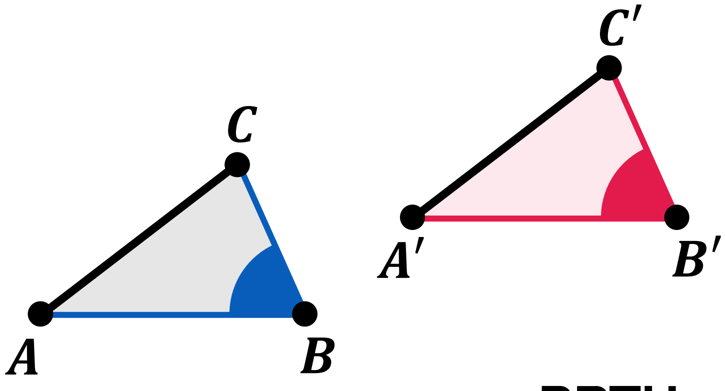


K2 Transitivität der Winkelkongruenz

Wenn ein Winkel zu zwei anderen Winkeln kongruent ist, so sind diese auch zueinander kongruent. Es gilt also: $\angle(g, h) \cong \angle(g', h') \wedge \angle(g', h') \cong \angle(g'', h'') \Rightarrow \angle(g, h) \cong \angle(g'', h'')$

K6 Zusammenhang zwischen Strecken- und Winkelkongruenzen

Wenn für zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ gilt $[AB] \cong [A'B']$, $[BC] \cong [B'C']$ und $\measuredangle(CBA) \cong \measuredangle(C'B'A')$, dann gilt immer auch $\measuredangle(BAC) \cong \measuredangle(B'A'C')$ und $\measuredangle(ACB) \cong \measuredangle(A'C'B')$.

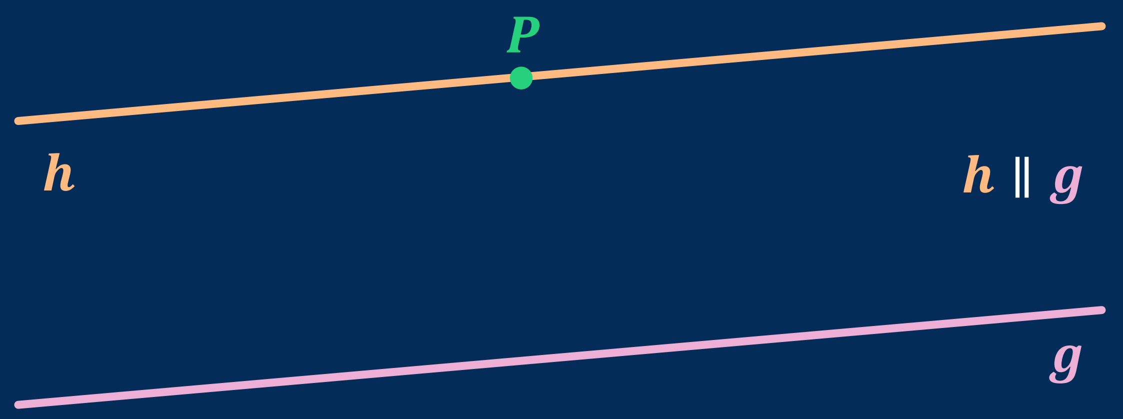


Hilbertsches Axiomensystem

(5) Axiom der Parallelen

PA Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt P existiert in der durch g und P bestimmten Ebene ε genau eine Gerade h, die durch P verläuft und g nicht schneidet.

h heißt die Parallele zu g durch P.



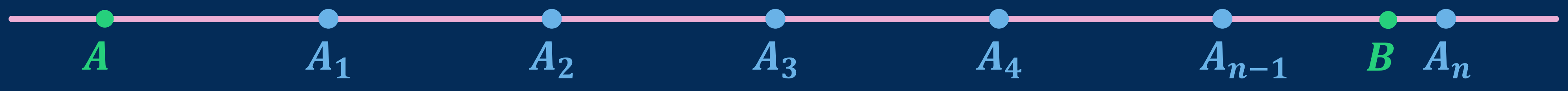
RPTU

Hilbertsches Axiomensystem

(5) Axiome der Stetigkeit

S1 Archimedisches Axiom (Axiom des Messens)

Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B. Man konstruiere dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ so, dass A_1 zwischen A und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und A_3, ferner A_3 zwischen A_2 und A_4 usw. liegt und überdies gilt $[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong [A_2A_3] \cong [A_3A_4] \ldots$. Dann gibt es in der Reihe der Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ stets einen Punkt A_n, so dass B zwischen A und A_n liegt.



S2 Axiom der Vollständigkeit

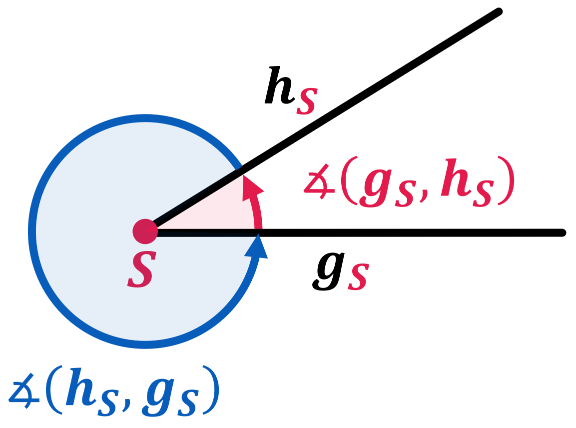
Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, das bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome nicht erweitert werden kann, d. h. zum System der Punkte, Geraden, Ebenen kann kein anderes System von Dingen so hinzugefügt werden, dass in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämtliche Axiome der Gruppen **(1)** bis **(4)** und **S1** erfüllt sind.

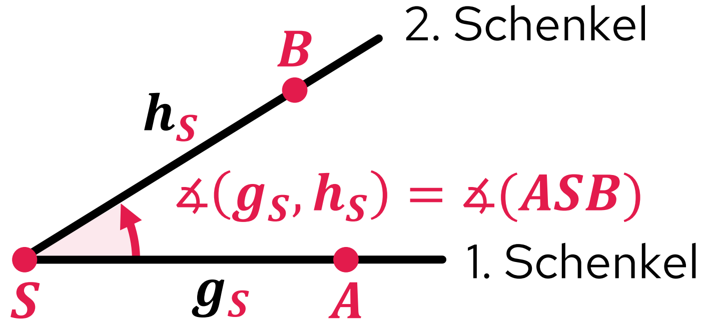
Winkeltypen

Bemerkung: Wir unterschieden vier Winkeltypen.

(1) Orientierter Winkel zwischen zwei Halbgeraden

- Zwei Halbgeraden g_S und h_S, die einen gemeinsamen Anfangspunkt $\boldsymbol{S}$ besitzen, legen zwei orientierte Winkel fest, die jeweils einen mathematisch positiven Umlaufsinn (gegen den Uhrzeigersinn) besitzen, nämlich die Winkel $\measuredangle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})$ und $\measuredangle(\boldsymbol{h_S}, \boldsymbol{g_S})$.
- Die Winkelgrößen dieser beiden Winkel ergänzen sich zu 360°, es gilt also: $|\measuredangle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})| + |\measuredangle(\boldsymbol{h_S}, \boldsymbol{g_S})| = 360°$
- Wenn der Punkt A ($\neq S$) auf dem ersten Schenkel des Winkels $\measuredangle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})$, also auf der Halbgeraden g_S, liegt und der Punkt B ($\neq S$) auf dem zweiten Schenkel des Winkels $\measuredangle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})$, also auf der Halbgeraden h_S liegt, dann kann man für kann für $\measuredangle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})$ auch $\measuredangle(\boldsymbol{ASB})$ schreiben ($\boldsymbol{A}$ = „Punkt auf dem 1. Schenkel“, $\boldsymbol{S}$ = „Scheitelpunkt“, $\boldsymbol{B}$ = „Punkt auf dem zweiten Schenkel“).





Winkeltypen

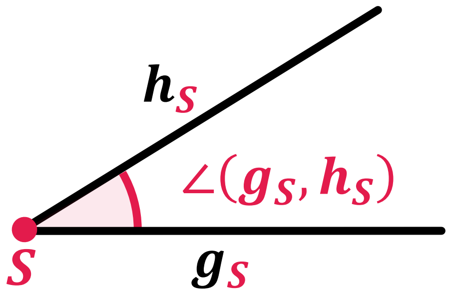
Bemerkung: Wir unterschieden vier Winkeltypen.

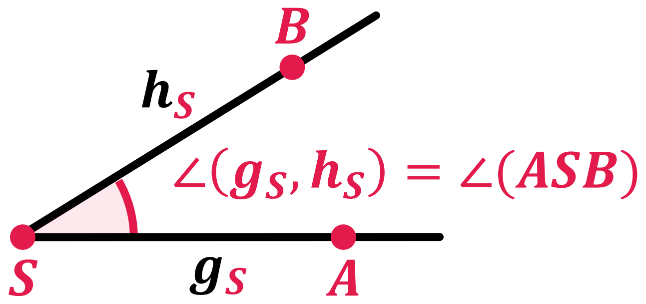
(2) Nicht-orientierter Winkel zwischen zwei Halbgeraden

- Zwei Halbgeraden g_S und h_S, die einen gemeinsamen Anfangspunkt $\boldsymbol{S}$ besitzen, legen einen nicht-orientierten Winkel fest, der als Punktmenge bestehend aus den beiden Halbgeraden g_S und h_S interpretiert werden kann. Diesen nicht-orientierten Winkel bezeichnen wir mit $\angle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S}) \equiv \angle(\boldsymbol{h_S}, \boldsymbol{g_S})$.

- Für die Winkelgrößen eines solchen nicht-orientierten Winkels gilt: $0° \leq |\angle(g_S, h_S)| \leq 180°$

- Wenn der Punkt A auf der Halbgeraden g_S und der Punkt B auf der Halbgeraden h_S liegt, dann kann man für kann für $\angle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})$ auch $\angle(\boldsymbol{ASB})$ schreiben.





Winkeltypen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

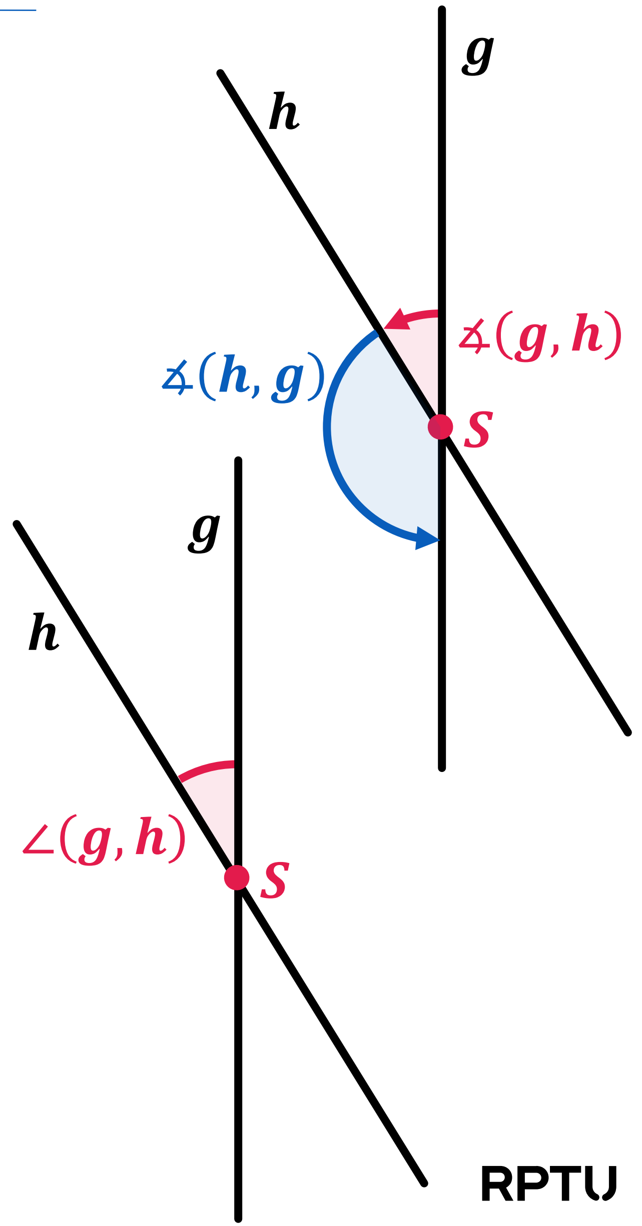
Bemerkung: Wir unterschieden vier Winkeltypen.

(3) Orientierte Winkel zwischen zwei Geraden

- Zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt S schneiden, legen zwei orientierte Winkel fest, die einen mathematisch positiven Umlaufsinn (gegen den Uhrzeigersinn) besitzen, nämlich die Winkel $\measuredangle(g,h)$ und $\measuredangle(h,g)$.
- Die Winkelgrößen dieser beiden Winkel ergänzen sich zu 180°, es gilt also: $|\measuredangle(g,h)| + |\measuredangle(h,g)| = 180°$

(4) Nicht-orientierter Winkel zwischen zwei Geraden

- Zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt S schneiden, legen einen nicht-orientierten Winkel fest, der als Punktmenge bestehend aus den beiden Geraden g und h interpretiert werden kann. Diesen Winkel bezeichnen wir mit $\angle(g,h) \equiv \angle(h,g)$.
- Für die Winkelgröße gilt: $0° \leq |\angle(g,h)| \leq 90°$



Kongruenzsätze für Dreiecke

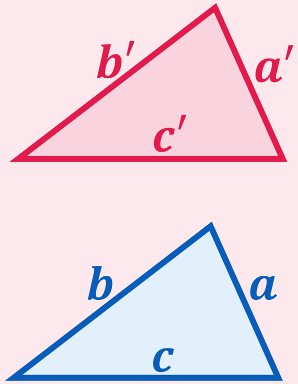
Bemerkung: Da kongruente Dreiecke deckungsgleich sind, sind entsprechende Winkel gleich groß und entsprechende Seiten gleich lang.

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kongruenzsatz SSS

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen aller Seiten übereinstimmen.

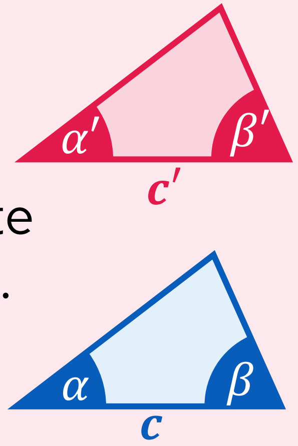
$|a'| = |a| \wedge |b'| = |b| \wedge |c'| = |c|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



Kongruenzsatz WSW

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge einer Seite und den Winkelgrößen der beiden an der Seite anliegenden Winkel übereinstimmen.

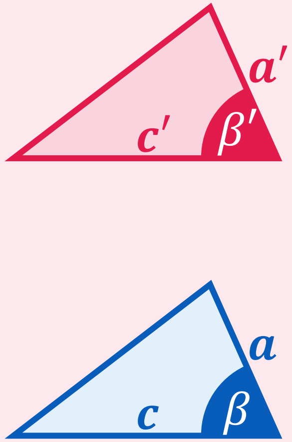
$|c'| = |c| \wedge |\alpha'| = |\alpha| \wedge |\beta'| = |\beta|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



Kongruenzsatz SWS

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Winkelgröße eines Winkels und den Seitenlängen der beiden am Winkel anliegenden Seiten übereinstimmen.

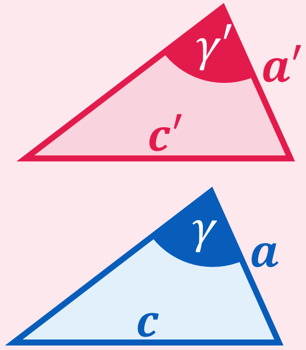
$|\beta'| = |\beta| \wedge |a'| = |a| \wedge |c'| = |c|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



Kongruenzsatz SsW

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und der Winkelgröße des Winkels, der der längeren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen.

$|a'| = |a| \wedge |c'| = |c| \wedge |c| > |a| \wedge |\gamma'| = |\gamma|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



2

Geometrie 4b

Kongruenzabbildungen der Ebene

Abbildung?

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Definition 2.1
Eine **Funktion** oder **Abbildung** $f: A \to B$ von einer Menge A auf die Menge B ist eine Zuordnung, die jedem Element von A genau ein Element von B zuordnet.

Bemerkungen

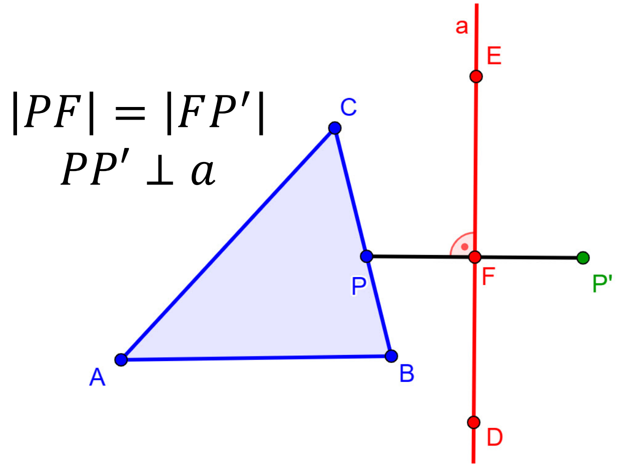
(1) Wir betrachte zunächst Abbildungen der Ebene auf sich, die jede Figur auf eine dazu deckungsgleiche (kongruente) Figur abbilden. Solche Abbildungen nennt man **Kongruenzabbildungen**.

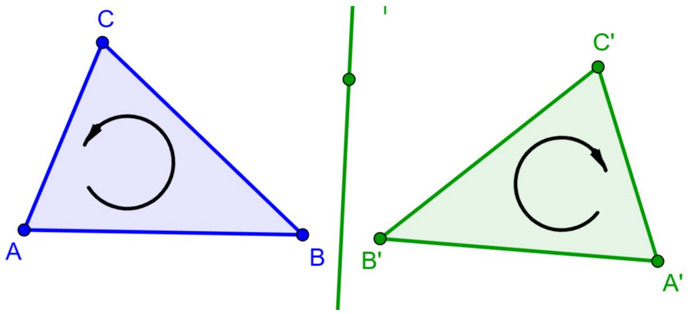
(2) Im Folgenden identifizieren wir alle Typen von Kongruenzabbildungen, indem wir die Kongruenzabbildungen aus einem grundlegenden Typ, nämlich der **Achsenspiegelung** aufbauen.

Satz 2.1
Eine **Kongruenzabbildung** $\varphi: \varepsilon \to \varepsilon$ der Ebene ε auf sich ist durch drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und deren Bilder $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$ eindeutig bestimmt.

Achsenspiegelung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen





Definition 2.2

Abbildung s_a der Ebene ε auf sich heißt genau dann **Achsenspiegelung** (Geradenspiegelung) an der **Achse** (Gerade) $\boldsymbol{a}$, wenn gilt:

- Für jeden Punkt P auf der Geraden a gilt:
  $$P' := s_a(P) = P$$
  D. h. die Gerade a besteht nur aus Fixpunkten. Damit ist a eine Fixpunktgerade.

- Für jeden Punkt P außerhalb von a und seinen Bildpunkt $P' = s_a(P)$ bei Achsenspiegelung an der Achse a gilt:

  Die Achse a steht senkrecht zur Gerade PP' und halbiert die Strecke $[PP']$.
  Kurz: $a \perp PP'$ und a halbiert $[PP']$.

Satz 2.2: Kerneigenschaft der Symmetrieachse

Ist a ein Gerade, $P \notin a$ ein Punkt der Ebene ε und $P' = s_a(P)$. Dann gilt für einen beliebigen Punkt A der Ebene ε: $[AP] \cong [AP'] \Leftrightarrow A \in a$

Eigenschaften der Achsenspiegelung s_a

Eigenschaften der Achsenspiegelung s_a

- **Bijektivität:** Verschiedene Urbilder haben verschiedene Bilder und jeder Punkt der Ebene besitzt ein Urbild.
- **Geradentreue:**
  Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
- **Fixpunkte:**
  Genau die Punkte der Achse a sind Fixpunkte.
- **Fixgeraden:**
  - Die Achse a ist Fixgerade.
  - Sogar jeder einzelne Punkt der Achse ist fix, die Achse ist also sogar eine Fixpunktgerade.
  - Alle zur Achse senkrechten Geraden sind Fixgeraden, aber keine Fixpunktgeraden.
  - Andere Fixgeraden gibt es nicht.
- **Fixrichtungen:** Die Achsenrichtung und die dazu senkrechte Richtung sind die einzigen Fixrichtungen.
- **Parallelentreue:**
  Die Bilder g' und h' von zueinander parallelen Geraden g und h sind wieder zueinander parallel. Kurz: $g \parallel h \Rightarrow g' \parallel h'$
- **Winkeltreue:** Alle sich entsprechenden Winkel in Urbild und Bild sind gleich groß.
- **Längentreue:** Jede Strecke ist genauso lang, wie ihre Bildstrecke.
  Deshalb ist die Achsenspiegelung auch streckenverhältnistreu, teilverhältnistreu und flächenmaßtreu.
- **Keine Orientierungstreue:**
  Der Umlaufsinn einer Figur wird umgekehrt.

Hintereinanderausführung von Abbildungen: Verkettung

Definition 2.3

Seien P, Q und R nichtleere Mengen sowie $f\colon \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ und $g\colon \mathrm{Q} \to \mathrm{R}$ Funktionen, dann nennt man die Funktion

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Q} \arrow[dr, "g"] & \\ \mathrm{P} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & \mathrm{R} \end{tikzcd}$$

$$g \circ f\colon \mathrm{P} \to \mathrm{R}, x \mapsto (g \circ f)(x) \coloneqq g\big(f(x)\big)$$

die **Verkettung $g \circ f$ von f und g**.

Für $g \circ f$ spricht man „**g nach f**“.

Definition 2.4

Eine Funktion $id_{\mathrm{A}}\colon \mathrm{A} \to \mathrm{A}, x \mapsto x$, die jedes Element der Menge A auf sich selbst abbildet, heißt **identische Abbildung** (oder **Identität**) id_{A} auf A.

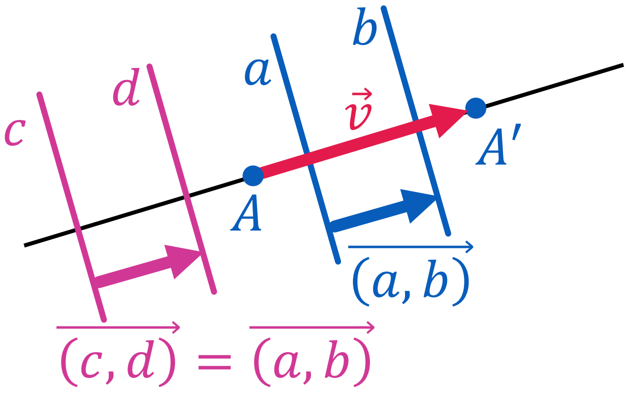
Definition 2.5

Die **Umkehrfunktion f^{-1}** einer Funktion $f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ist die Funktion $f^{-1}\colon \mathrm{B} \to \mathrm{A}$, für die gilt:

$$\forall_{x \in \mathrm{A}}\, f^{-1}\big(f(x)\big) = x \;\wedge\; \forall_{y \in \mathrm{B}}\, f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

$$f^{-1} \circ f = id_{\mathrm{A}} \;\wedge\; f \circ f^{-1} = id_{\mathrm{B}}$$

Verschiebung als Verkettung von Achsenspiegelungen an zwei echt parallelen Geraden



$$\boldsymbol{t_{\vec{v}}} = \boldsymbol{s_b} \circ \boldsymbol{s_a}$$
$$= \boldsymbol{s_d} \circ \boldsymbol{s_c}$$

Definition 2.6

Die Verkettung zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b an zwei echt parallelen Geraden a und b ($a \parallel b$) nennen wir **Verschiebung** (Translation) $\boldsymbol{t_{\vec{v}}}$.

Der **Verschiebungsvektor** $\vec{v}$ ist der doppelte Abstandsvektor $\overrightarrow{(a,b)}$ der beiden Geraden a und b.

Man schreibt:

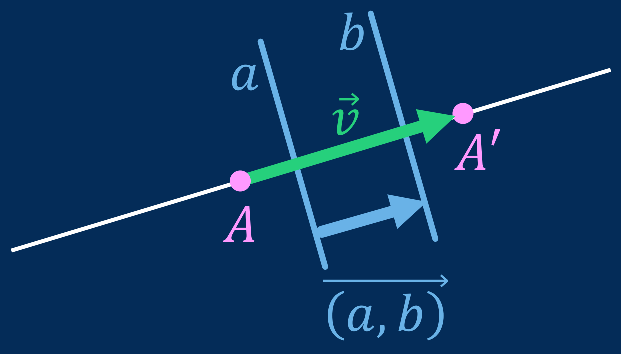
$\boldsymbol{t_{\vec{v}}} \coloneqq \boldsymbol{s_b} \circ \boldsymbol{s_a}$ mit $\vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{(a,b)}$

Bemerkungen

- Umgekehrt kann auch jede Verschiebung $\boldsymbol{t_{\vec{v}}}$ durch die Verkettung zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b an zueinander parallelen Geraden a und b ersetzt werden, für deren Abstandsvektor $\overrightarrow{(a,b)}$ gilt: $\overrightarrow{(a,b)} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$.
- a und b stehen damit senkrecht zur Verschiebungsrichtung.
- Da die erste Achse aus den unendlich vielen Geraden, die senkrecht zur Verschiebungsrichtung stehen, frei gewählt werden kann, gibt es unendliche viele Paare von Achsenspiegelungen, die eine konkrete Verschiebung $\boldsymbol{t_{\vec{v}}}$ ersetzen.

Eigenschaften der Translation (Verschiebung) $t_{\vec{v}}$

Eigenschaften der Translation (Verschiebung) $t_{\vec{v}}$



- **Bijektivität:** Ja.
- **Geradentreue:** Ja.
- **Fixpunkte:**
  - Eine echte (d.h. von der Identität verschiedene) Translation hat keine Fixpunkte.
  - Besitzt eine Translation einen Fixpunkt, so ist sie die Identität.
- **Fixgeraden:** Alle Geraden parallel zur Verschiebungsrichtung $\vec{v}$ sind Fixgeraden.
- **Fixrichtungen:**
  - Jede Gerade wird auf eine dazu parallele Gerade abgebildet. ⇒ Alle Richtungen sind Fixrichtungen.
  - Eine Abbildung, bei der jede Bildgerade g' zu ihrer Urbildgerade g parallel ist heißt **Dilatation**. Damit ist die Verschiebung eine Dilatation.
- **Parallelentreue:** Ja.
- **Winkeltreue:** Ja.
- **Längentreue:** Ja.
- **Orientierungstreue:** Ja. Bei jeder Achsenspiegelung ändert sich der Umlaufsinn. Da es nur zwei Umlaufrichtungen gibt (im und gegen den Uhrzeigersinn), ist der Umlaufsinn nach einer geraden Anzahl von Achsenspiegelungen wieder wie beim Urbild der ersten Achsenspiegelung.

Drehung als Verkettung von Achsenspiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Definition 2.7

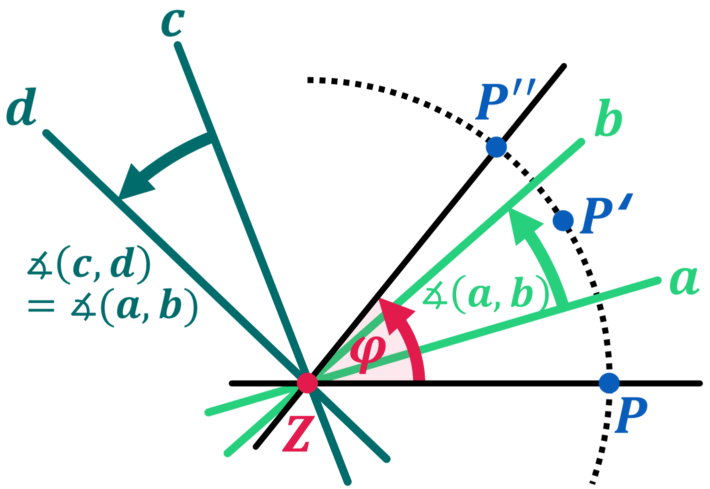
Die Verkettung zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b an zwei sich im Punkt Z schneidenden Geraden a und b nenne wir **Drehung** $d_{Z,\varphi}$.

Der Schnittpunkt Z der beiden Geraden ist das **Drehzentrum**.

Der doppelte orientierte Zwischenwinkel $\measuredangle(a,b)$ zwischen den beiden Geraden a und b ist der **Drehwinkel** φ der Drehung.

Man schreibt: $d_{Z,\varphi} := s_b \circ s_a$ mit

- $\varphi = 2 \cdot \measuredangle(a,b)$
- $\{Z\} = a \cap b$



$$d_{Z,\varphi} = s_b \circ s_a = s_d \circ s_c$$

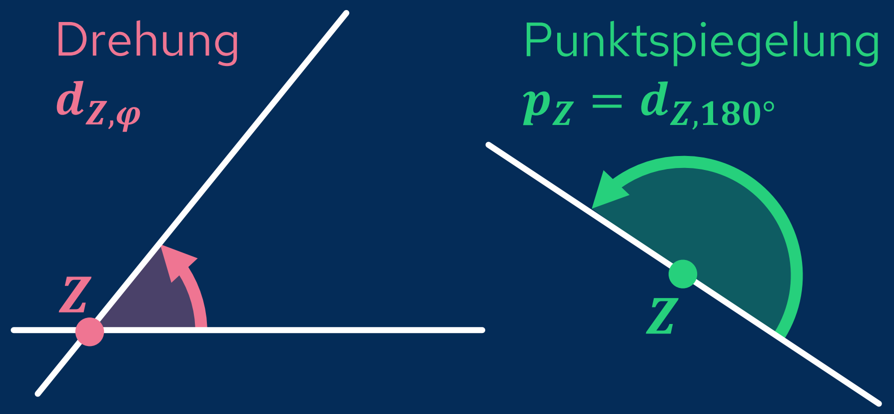
$$\varphi = 2 \cdot \measuredangle(a,b)$$

Bemerkungen

- Umgekehrt kann jede Drehung $d_{Z,\varphi}$ durch die Verkettung zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b ersetzt werden, die sich im Drehzentrum schneiden, deren Zwischenwinkel $\measuredangle(a,b)$ halb so groß ist wie der Drehwinkel φ der Drehung und denselben Drehsinn wie φ hat.
- Da die erste Achse aus den unendlich vielen Geraden, die durch Z verlaufen frei gewählt werden kann, gibt es unendliche viele Paare von Achsenspiegelungen, die eine konkrete Drehung $d_{Z,\varphi}$ ersetzen.

Eigenschaften der Drehung $d_{Z,\varphi}$

Eigenschaften der Drehung $d_{Z,\varphi}$



- **Bijektivität:** Ja.
- **Geradentreue:** Ja.
- **Fixpunkte:** Nur das Drehzentrum Z ist Fixpunkt.
- **Fixgeraden:**
  - Im Allgemeinen hat eine Drehung keine Fixgeraden.
  - Bei einer Drehung $d_{Z,180°}$ um Z um $180°$, die auch als **Punktspiegelung** p_Z an Z bezeichnet wird, sind genau die Geraden, die durch das Drehzentrum verlaufen, **Fixgeraden**.
- **Fixrichtungen:**
  - Im Allgemeinen hat eine Drehung keine Fixrichtung.
  - Bei einer **Punktspiegelung** an Z $\left(p_Z = d_{Z,180°}\right)$ sind sämtliche Richtungen **Fixrichtungen**, denn für jede Gerade g und ihr Bild $g' = p_Z(g)$ bei Punktspiegelung an Z gilt: $g' \parallel g$.
- **Parallelentreue:** Ja.
- **Winkeltreue:** Ja.
- **Längentreue:** Ja.
- **Orientierungstreue:** Ja.

Identische Abbildung id: Verkettung $s_b \circ s_a$ von zwei Achsenspiegelungen s_a und s_b mit $a = b$

Bemerkungen

(1) **D**ie Verkettung $s_a \circ s_a$ von zwei Achsenspiegelungen an identischen Achsen kann aufgefasst werden

- einerseits als Drehung $d_{Z,0°}$ um einen Punkt Z auf der Achse a um den Drehwinkel $\varphi = 0°$ und
- andererseits als Verschiebung $t_{\vec{0}}$ mit dem Nullvektor $\vec{0}$ als Verschiebungsvektor.

(2) **D**ie Verkettung von zwei Achsenspiegelungen an identischen Achsen a ist die **identische Abbildung id_ε** der Ebene ε auf sich $s_a \circ s_a = id_\varepsilon$, **Achsenspiegelungen sind** also **selbstinvers**.

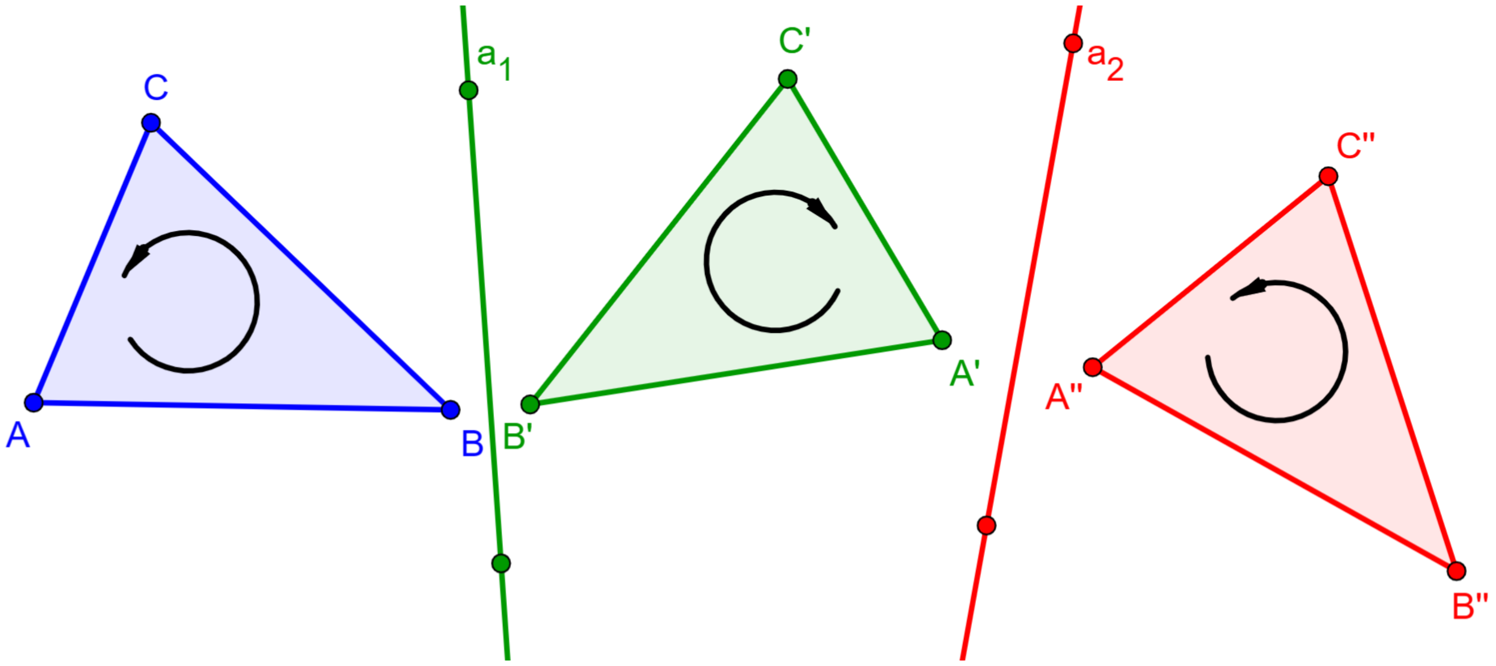
Eigenschaften der identischen Abbildung id_ε

- **Bijektivität:** Ja
- **Geradentreue:** Ja.
- **Fixpunkte:**
  Alle Punkte der Ebene ε sind Fixpunkte.
- **Fixgeraden:**
  Alle Geraden der Ebene ε sind Fixgeraden.
- **Fixrichtungen:**
  Da jede Gerade auf sich selbst abgebildet wird, sind alle Richtungen Fixrichtungen.
- **Parallelentreue:** Ja.
- **Winkeltreue:** Ja.
- **Längentreue:** Ja
- **Orientierungstreue:** Ja.

Orientierungstreue?!

Satz 2.3: Umlaufsinn

- Eine Abbildung, die aus einer Verkettung einer geraden Anzahl $(2, 4, 6, \ldots)$ von Achsenspiegelungen entsteht, ist orientierungstreu, d. h. der Umlaufsinn von Original- und Bildfigur ist gleichsinnig.
- Eine Abbildung, die aus einer Verkettung einer ungeraden Anzahl $(3, 5, 7, \ldots)$ von Achsenspiegelungen entsteht, ist nicht orientierungstreu, d. h. der Umlaufsinn von Original- und Bildfigur ist ungleichsinnig.



Spezialfall der Drehung: Punktspiegelung

Definition 2.8
Die Verkettung $s_b \circ s_a$ zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b an zueinander senkrechten Geraden a und b $(a \perp b)$, die sich im Punkt Z schneiden, also eine Drehung $d_{Z,180°}$ um Z um 180°, heißt **Punktspiegelung** p_Z.

Der Schnittpunkt Z der beiden Geraden a und b ist das **Punktspiegelzentrum**.

Satz 2.4
Punktspiegelungen p_Z sind **selbstinverse** Abbildungen der Ebene ε auf sich, d. h. $p_Z \circ p_Z = id_\varepsilon$.

Satz 2.5

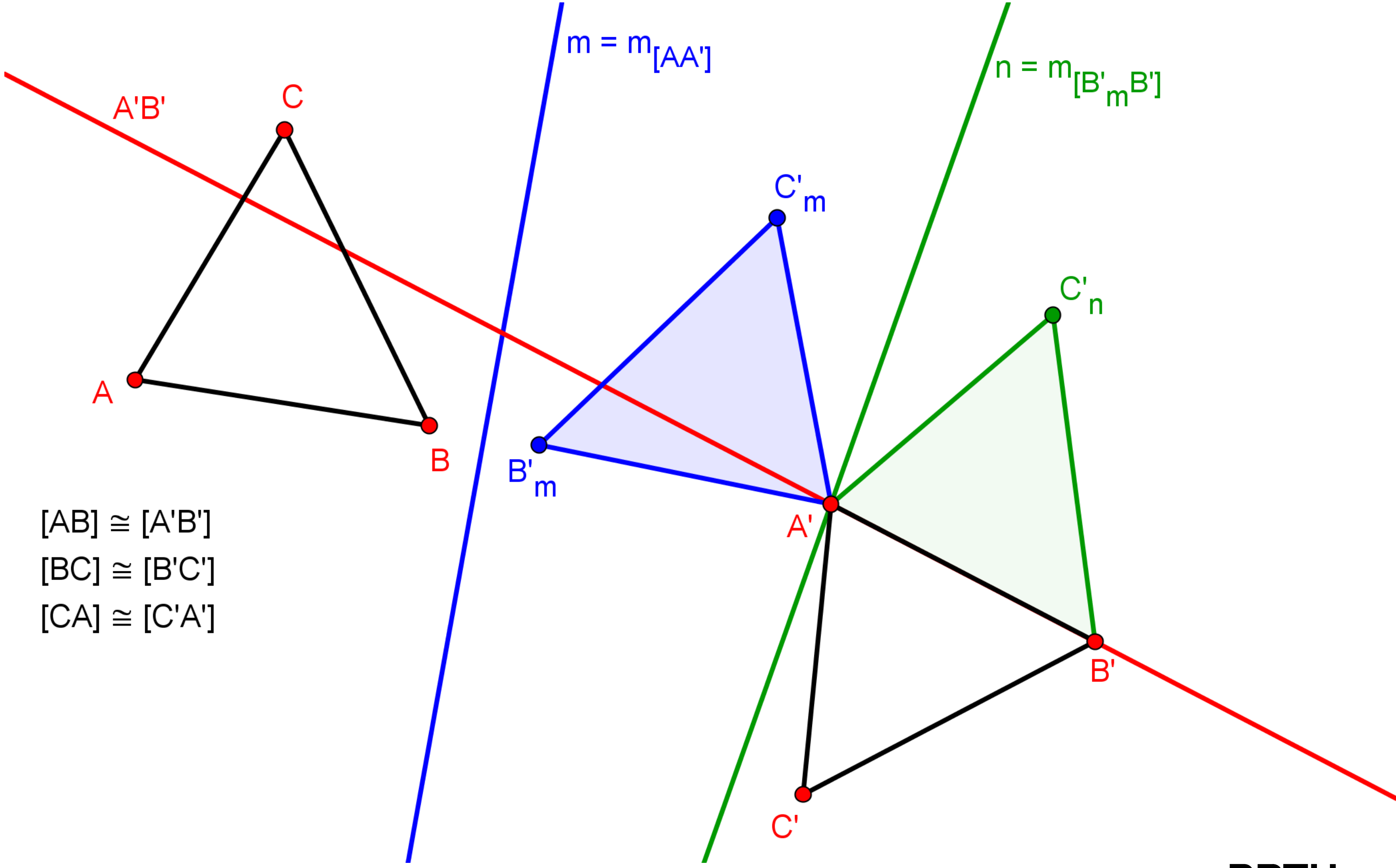
a) **D**ie Verkettung $s_b \circ s_a$ zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b ist immer eine gleichsinnige Kongruenzabbildung, also entweder eine Verschiebung oder eine Drehung.

b) **J**ede Drehung oder Verschiebung kann als Verkettung von zwei Achsenspiegelungen dargestellt werden.

c) **Z**wei Achsenspiegelungen s_a und s_b sind genau dann vertauschbar $(s_b \circ s_a = s_a \circ s_b)$, wenn die beiden Achsen a und b
- identisch sind $(a \equiv b)$, oder
- senkrecht aufeinander stehen $(a \perp b)$.

d) **P**unktspiegelungen sind neben der identischen Abbildung id_ε die einzigen gleichsinnigen Kongruenzabbildungen, die selbstinvers sind.

Dreispiegelungssatz



Satz 2.6: Dreispiegelungssatz
Jede Kongruenzabbildung der Ebene ε auf sich ist darstellbar als Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen.

Reduktionssatz für 3 Achsenspiegelungen

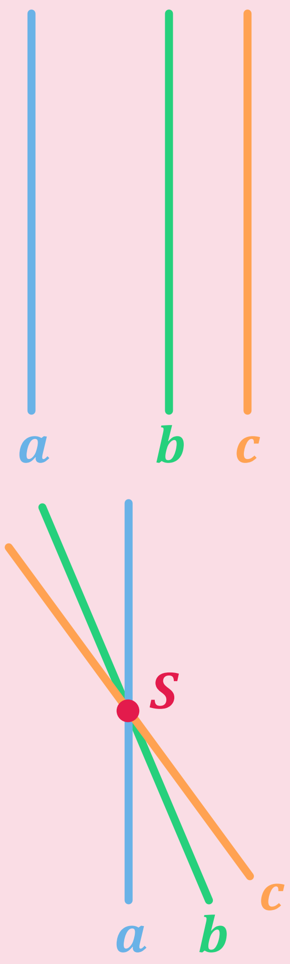
Satz 2.8:
Reduktionssatz für drei Achsenspiegelungen

Die Verkettungen von drei Achsenspiegelungen s_a, s_b und s_c ist genau dann wieder eine Achsenspiegelung, wenn die drei Achsen a, b und c entweder

- parallel zueinander sind ($a \parallel b \parallel c$), oder
- sich in einem Punkt S schneiden ($a \cap b \cap c = \{S\}$).

Für die Symmetrieachse d der Achsenspiegelung s_d mit $s_d = s_c \circ s_b \circ s_a$ gilt entweder

- $a \parallel b \parallel c \parallel d$, oder
- $a \cap b \cap c \cap d = \{S\}$.



Satz 2.7: Assoziativgesetz für ∘
Verkettungen von Abbildungen φ_1, φ_2, φ_3 sind assoziativ, es gilt also:

$$(\varphi_3 \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 = \varphi_3 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1)$$

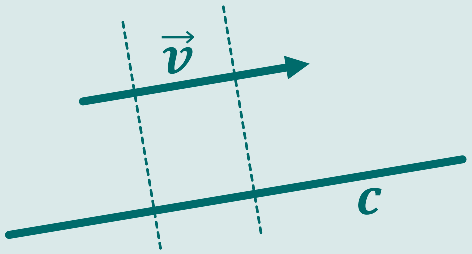
Schubspiegelung (Gleitspiegelung)

Definition 2.9

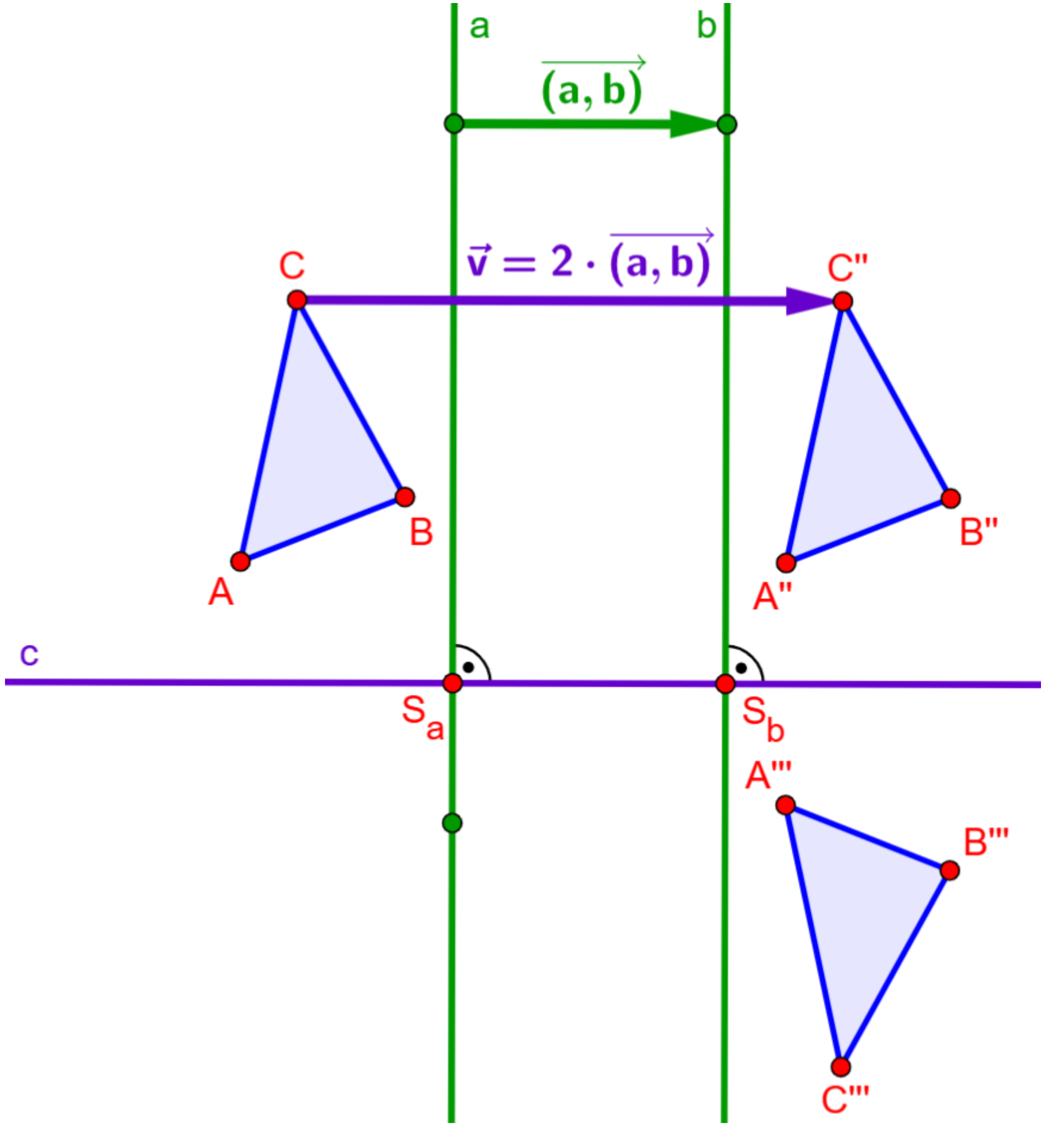
Eine Verkettung

$g_{c,\vec{v}} := s_c \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ s_c$

einer Verschiebung $t_{\vec{v}}$



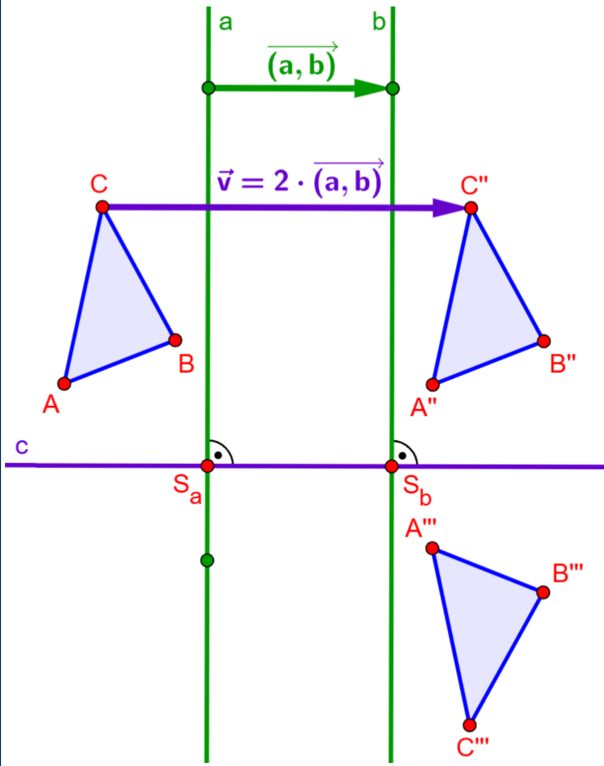
mit einer Achsenspiegelung s_c, für die gilt, dass der Verschiebungsvektor $\vec{v}$ parallel zur Achse c der Achsenspiegelungen s_c ist ($\vec{v} \parallel c$), heißt **Schubspiegelung** (bzw. Gleitspiegelung) $g_{c,\vec{v}}$.



Eigenschaften der Schubspiegelung

Eigenschaften der Schubspiegelung $g_{c,\vec{v}}$

- **Bijektivität:** Ja
- **Geradentreue:** Ja.
- **Fixpunkte:** Eine echte Schubspiegelung (also keine reine Achsen-spiegelung $g_{c,\vec{0}} \equiv s_c$) besitzt keine Fixpunkte.
  Besitzt eine Schubspiegelung also einen Fixpunkt, dann handelt es sich um eine Achsenspiegelung ohne Schubanteil.
- **Fixgeraden:** Die Schubspiegelgerade c ist die einzige Fixgerade einer Schubspiegelung $g_{c,\vec{v}}$.
- **Fixrichtungen:** Nur die Richtung der Schubspiegelgeraden c und die zu ihr senkrechte Richtung sind Fixrichtungen.
- **Parallelentreue:** Ja.
- **Winkeltreue:** Ja.
- **Längentreue:** Ja
- **Orientierungstreue:** Da eine Gleitspiegelung eine Verkettung einer un-geraden Anzahl von Achsenspiegelung ist, ist sie nicht orientierungstreu.



Verkettung von Achsenspiegelungen

Satz 2.9: Verkettung von drei Achsenspiegelungen

Die Verkettungen von drei Achsenspiegelungen s_a, s_b und s_c an Geraden die weder

- alle parallel zueinander sind ($a \parallel b \parallel c$) noch
- sich alle in einem Punkt S schneiden ($a \cap b \cap c = \{S\}$),

ist immer eine Schubspiegelung.

Satz 2.10: Reduktionssatz

Eine Verkettung von vier Achsenspiegelungen lässt sich immer auf eine Verkettung von zwei Achsenspiegelungen reduzieren, sie ist also immer eine Verschiebung oder eine Drehung.

Folgerungen aus dem Reduktionssatz

(1) Jede endliche Verkettung von Achsenspiegelungen lässt sich durch eine Verkettung von maximal drei Achsenspiegelungen darstellen.

(2) Jede Verkettung aus einer

- geraden Anzahl von Achsenspiegelungen ist eine Drehung oder Verschiebung
- ungeraden Anzahl von Achsenspiegelungen ist eine Achsen- oder Schubspiegelung.

(3) Es gibt nur vier Typen von aus Achsenspiegelungen erzeugten Abbildungen: Achsenspiegelungen, Drehungen (mit der Punktspiegelung als Spezialfall), Verschiebungen und Schubspiegelungen.

Jede endliche Verkettung aus solchen Abbildungen ist wieder von einem dieser Typen.

3

Geometrie 4b

Figuren in der Ebene

Winkel an Geradenkreuzungen/ im Dreieck

Definition 3.1

An einer Geradenkreuzung bezeichnet man die beiden Winkel, die mit demselben Scheitel einander gegenüber liegen als **Scheitelwinkel** und die beiden Winkel, die mit einem gemeinsamen Schenkel nebeneinander liegen als **Nebenwinkel**.

Satz 3.1

Scheitelwinkel sind gleich groß, **Nebenwinkel** ergänzen sich zu 180°.

Satz 3.2

Paare von **Stufenwinkel** bzw. **Wechsel-winkel** sind genau dann gleich groß, wenn sie an zwei parallelen Geraden liegen.

Satz 3.3

In jedem Dreieck beträgt die Winkel-summe der Innenwinkel stets 180°.

Definition 3.2

Eine Gerade g wird von zwei Geraden h_1 und h_2 in zwei verschiedenen Punkten geschnitten. Zwei Winkel,

- bei denen je ein Schenkel beider Winkel *gleichorientiert* auf g liegt und die beiden anderen Schenkel in *derselben* Halbebene bzgl. g liegen, heißen **Stufenwinkel**.
- bei denen je ein Schenkel beider Winkel entgegengesetzt *orientiert* auf g liegt und die beiden anderen Schenkel in *verschiedenen* Halbebenen bzgl. g liegen, heißen **Wechselwinkel**.

Besondere Linien im Dreieck

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Definition 3.3

a) Die **Mittelsenkrechte** einer Strecke $\overline{AB}$ ist diejenige Gerade, die durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ verläuft und mit $\overline{AB}$ einen rechten Winkel bildet.

b) Die **Winkelhalbierende** eines Winkels ist diejenige Gerade durch den Scheitel des Winkels, die den Winkel in zwei kongruente Winkel zerlegt.

c) In einem Dreieck bezeichnet man eine Gerade, die durch den Mittelpunkt einer Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft, als **Seitenhalbierende**.

d) In einem Dreieck bezeichnet man eine Gerade, die senkrecht auf einer Seite (genauer der die Seite beinhaltenden Geraden) steht und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft, als **Höhengerade**.

Satz 3.5

Jeder Punkt P auf der **Mittelsenkrechten** einer Strecke $\overline{AB}$ ist von A und B gleichweit entfernt.

Umkehrung Satz 3.5

Jeder Punkt P, der von den Endpunkten A und B einer Strecke $\overline{AB}$ gleichweit entfernt ist, liegt auf der **Mittelsenkrechten** m_{AB} der Strecke $\overline{AB}$.

Satz 3.6

In jedem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten in einem einzigen Punkt. Er ist der Mittelpunkt des Umkreises.

Besondere Linien im Dreieck II

Satz 3.7

Jeder Punkt P auf der **Winkelhalbierenden** eines Winkels ist von beiden Schenkeln des Winkels gleichweit entfernt. Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt

Satz 3.8

In jedem Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierenden in einem einzigen Punkt. Er ist der Mittelpunkt des Inkreises.

Satz 3.9

In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt S. Er ist der Schwerpunkt des Dreiecks. S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

Satz 3.10

In jedem Dreieck schneiden sich die Höhengeraden in einem einzigen Punkt.

Winkel am Kreis

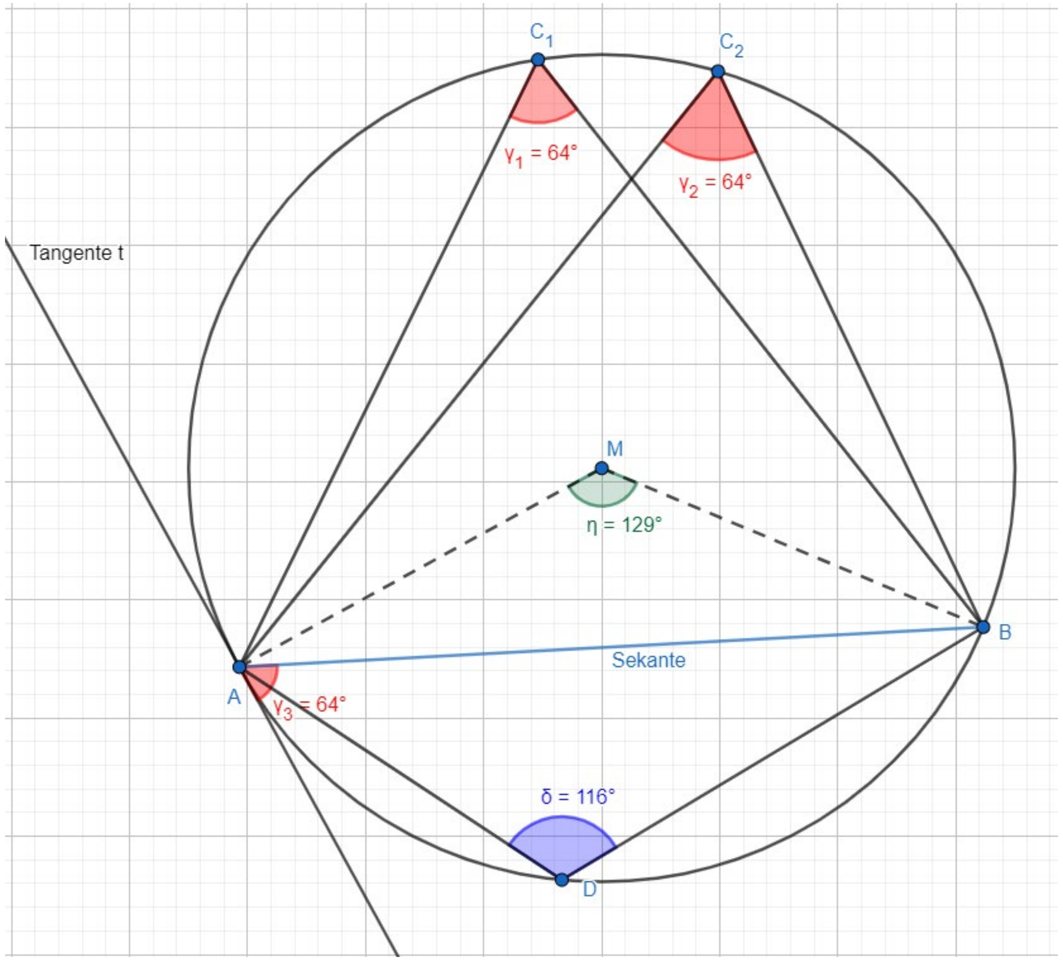
Definition 3.4

a) Liegen die Endpunkte einer Strecke auf einem Kreis, so wird die Strecke auch **Sehne** des Kreises genannt. Sehnen durch den Mittelpunkt des Kreises heißen **Durchmesser**.

$b)$ $\overline{AB}$ sei Sehne eines Kreises. Liegen die Punkte C_i $(i = 1,2,\ldots)$ auf dem Kreis, so heißen die Winkel $\sphericalangle AC_iB$ **Umfangswinkel** oder auch **Peripheriewinkel** über der Sehne $\overline{AB}$.

$c)$ $\overline{AB}$ sei Sehne eines Kreises mit Mittelpunkt M. Der Winkel $\sphericalangle AMB$ heißt dann **Mittelpunktswinkel** über der Sehne $\overline{AB}$.

d) Eine Gerade, die mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat, heißt **Tangente**.



Winkel am Kreis

Satz 3.13

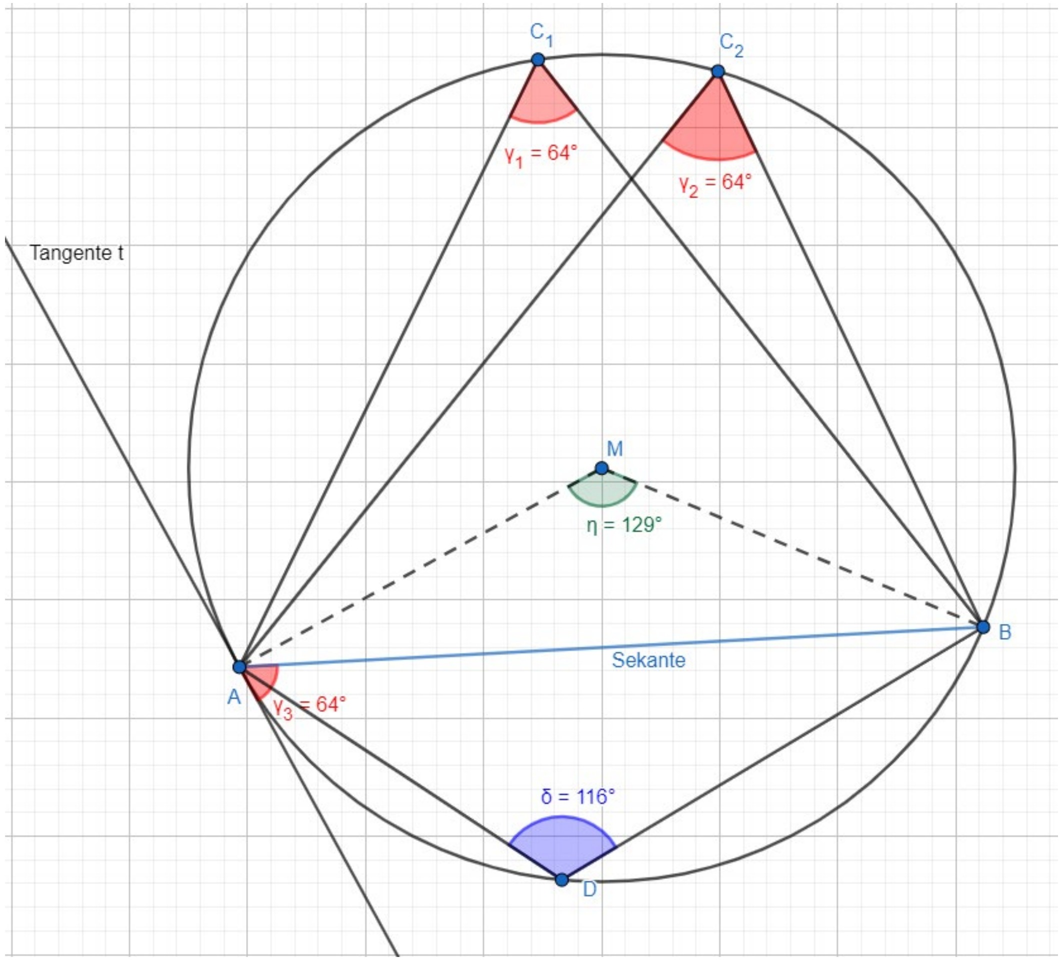
a) Umfangswinkel über einer Sehne deren Scheitelpunkte auf demselben Kreisbogen (der beiden von der Sehne erzeugten) liegen, sind gleich groß.

b) Umfangswinkel über einer Sehne, deren Scheitelpunkte auf unterschiedlichen Kreisbögen liegen, ergänzen sich zu $180°$.

c) Der Mittelpunktswinkel $\measuredangle AMB$ über der Sehne $\overline{AB}$ ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel $\measuredangle ACB$.

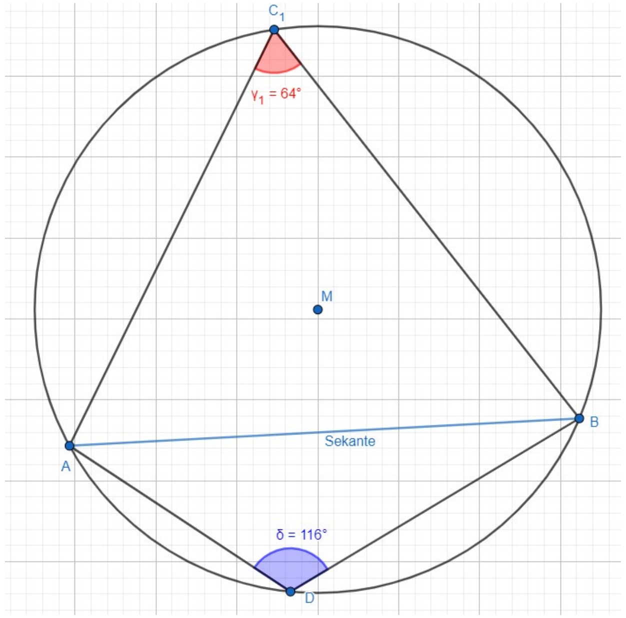
d) Spezialfall von c) (Satz des Thales):
Liegt der Punkt C eines Dreiecks ΔABC auf dem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

e) Ist $\overline{AB}$ eine Sehne und t eine Tangente an den Kreis im Punkt A, so sind der Winkel, den die Sehne und die Tangente miteinander bilden und der Umfangswinkel über $\overline{AB}$ gleich groß.

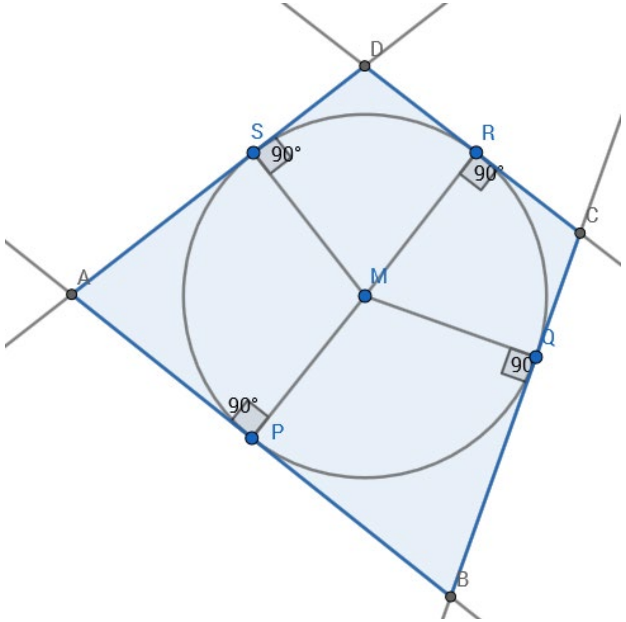


Vierecke mit In-/Umkreis

Satz 3.14
Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Summe der gegenüberliegenden Winkel 180° beträgt.



Satz 3.15
Ein Viereck ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn die Summe der Paare gegenüberliegender Seiten gleich ist.



4

Geometrie 4b

Flächeninhalte

Flächeninhalt als reelle Maßfunktion

Definition 4.1

Sei $\mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte der reellen Ebene. Betrachte bestimmte Teilmengen dieser Ebene, die Polygone.

Die Funktion F, die jedem Polygon einen reellen Zahlenwert als Flächenmaßzahl zuordnet, heißt **Flächenfunktion**.

Sie muss folgende Forderungen erfüllen:

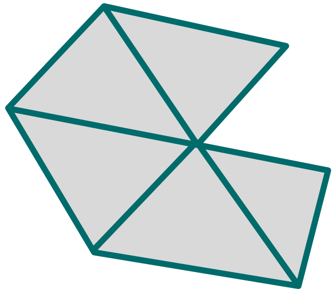
(M1) Nichtnegativität: Für jedes Polynom A gilt $F(A) \geq 0$.

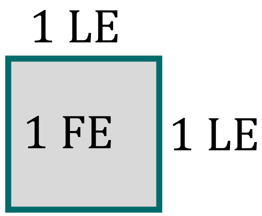
(M2) Additivität: Für alle Polygone A, B gilt:
Wenn A und B keine inneren Punkte gemeinsam haben (also höchstens Randpunkte), dann gilt: $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$

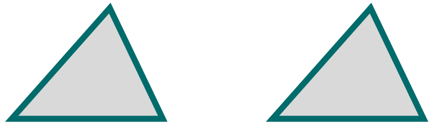
(M3) Normierung: Für das fest definierte Einheitsquadrat E mit der Kantenlänge 1 gilt: $F(E) = 1$.

(M4) Verträglichkeit mit der Kongruenz: Für alle Polygone A, B gilt:
Wenn A kongruent zu B ist, dann ist $F(A) = F(B)$.

Vgl. die Axiome des Wahrscheinlichkeitsmaßes von Kolmogorov







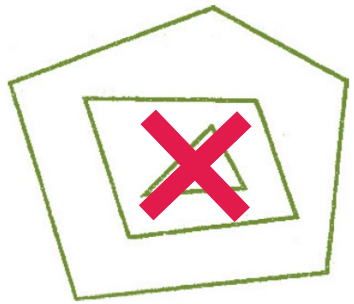
Monotonie

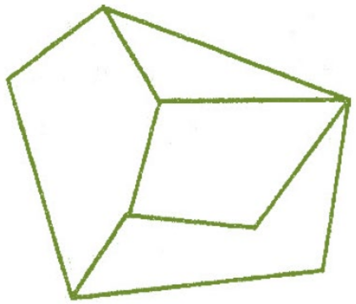
Die Existenz und Eindeutigkeit der Maßfunktion F für beliebige Polygone nehmen wir ohne Beweis an.

Satz 4.1
Die Flächeninhaltsfunktion ist monoton, d.h. wenn $A \subseteq B$, dann gilt $F(\mathrm{A}) \leq F(B)$.

Definition 4.2
Die Vereinigungsmenge von endlich vielen* Polygonen P_i heißt **Zerlegung** eines äußeren Polygons P, wenn gilt:

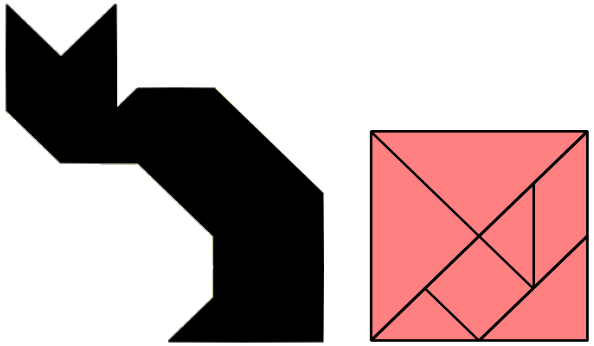
1) Zwei verschiedene Polygone haben keine inneren Punkte gemeinsam.
2) Zwei Polygone, die nicht disjunkt sind, haben nur Ecken oder Seiten gemeinsam *(höchstens Randpunkte)*.
3) Die Seiten, die jeweils nur zu einem der Polygone gehören, bilden zusammen das **äußere* Polygon** P.





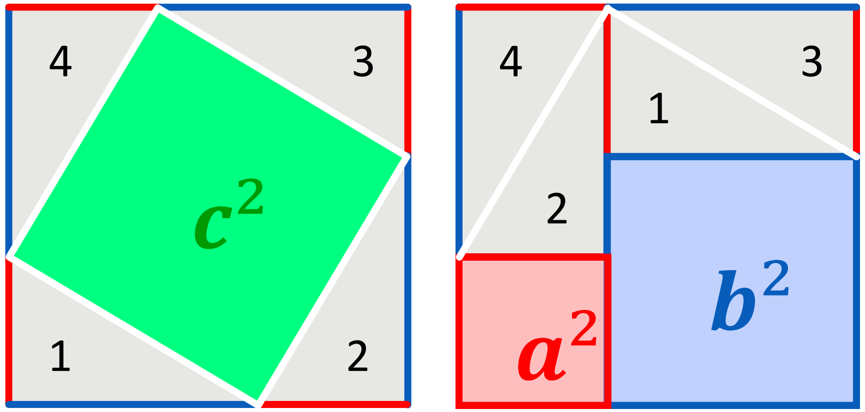
*einfach zusammenhängende(n)

Ergänzungsgleiche Polygone



Definition 4.3
Zwei Polygone P und Q heißen **zerlegungsgleich**, wenn sie sich so in gleichviele Teilpolygone $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$ und $Q_1, Q_2, Q_3 \dots Q_n$ zerlegen lassen, dass sich jedem Teilpolygon P_i ein zu diesem kongruentes Teilpolygon Q_j eindeutig und umkehrbar zuordnen lässt.

Definition 4.4
Zwei Polygone P und Q heißen **ergänzungsgleich**, wenn zu P und Q endlich viele, paarweise zerlegungsgleiche Polygone P_i und Q_j so hinzufügen lassen, dass P und P_i bzw. Q und Q_j jeweils eine Zerlegung bilden und die beiden Gesamtpolygone zerlegungsgleich sind.

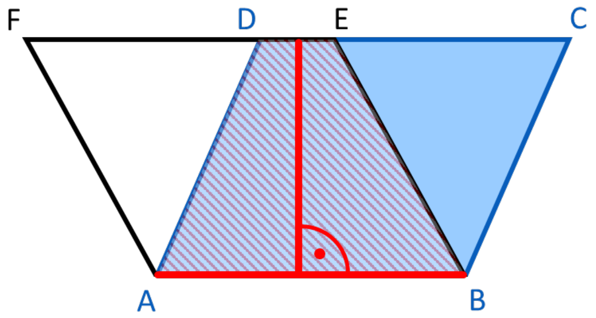


Satz 4.2
a) Zerlegungsgleiche Polygone sind inhaltsgleich.
b) Ergänzungsgleiche Polygone sind inhaltsgleich.
c) Inhaltsgleiche Polygone sind stets auch zerlegungs- und ergänzungsgleich.

Flächeninhalte

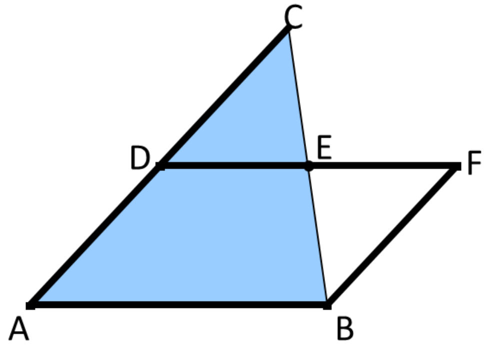
Satz 4.3
Für den Flächeninhalt F des Rechtecks R ergibt sich die multiplikative Vorschrift $F(R) = a \cdot b$ wobei a und b die Längen der beiden Rechteckseiten beschreiben ($a, b \in \mathbb{R}$).

Satz 4.4
Der Flächeninhalt F eines Parallelogramms P mit den Seitenlängen a und b berechnet sich als $F(P) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ wobei h_a die Höhe auf der Seite a und h_b die Höhe auf der Seite b bezeichnen.



Satz 4.5
Parallelogramme, die in der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen sind zerlegungsgleich.

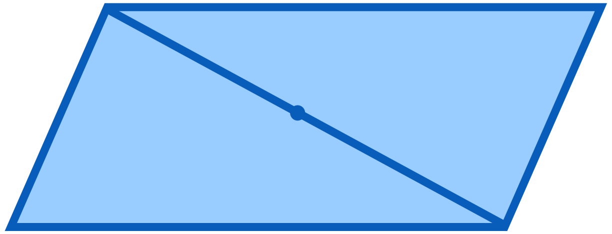
Satz 4.6
Zu jedem Dreieck existiert ein zerlegungsgleiches Parallelogramm, das mit dem Dreieck in einer wählbaren Seite übereinstimmt.

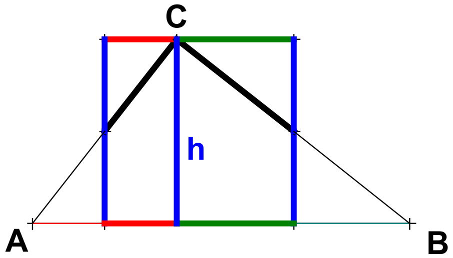


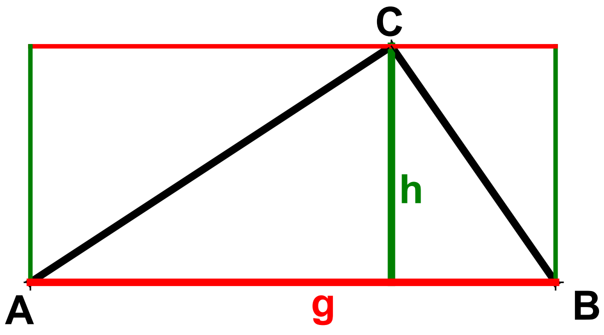
Flächeninhalte II

Satz 4.7

Der Flächeninhalt F eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c berechnet sich zu $F(D) = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$, wobei h_a die Höhe auf der Seite a, h_b die auf b und h_c die auf c bezeichnen.

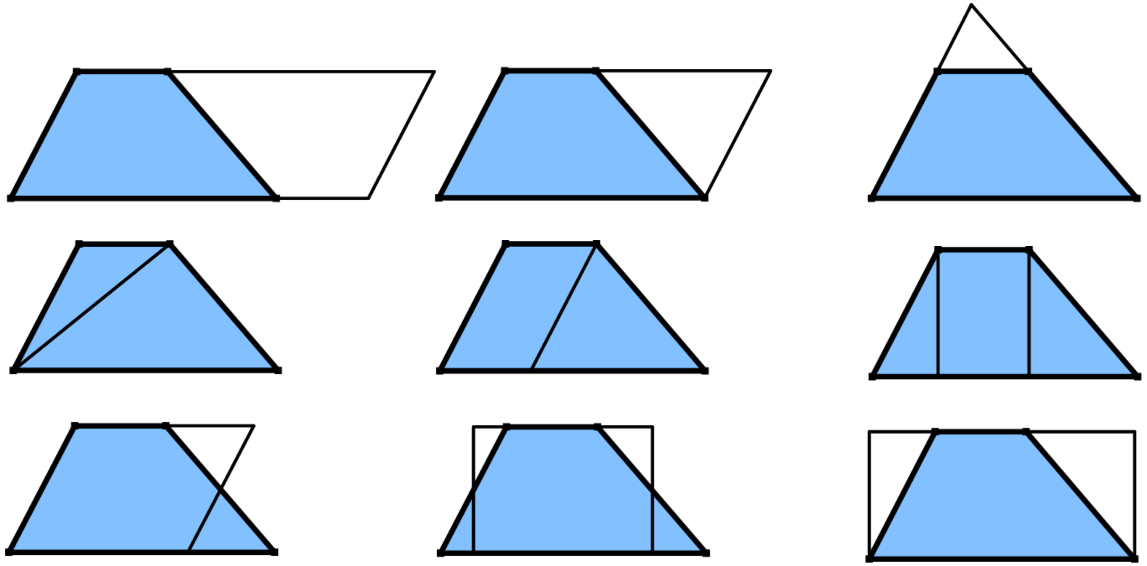






Satz 4.8

Der Flächeninhalt F eines Trapezes mit den Seitenlängen a und c (der parallelen Seiten) und der Länge der Höhe h (Abstand der Trägergeraden der parallelen Seiten) berechnet sich zu $F(T) = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$.



Rauminhalt als reelle Maßfunktion

Definition 4.5

Man definiert analog zur Flächenfunktion im $\mathbb{R}^3$ für Polyeder (bestimmte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$):

Die Funktion V, die jedem Polyeder einen reellen Zahlenwert als Rauminhaltsmaßzahl zuordnet, heißt **Rauminhaltsfunktion**.

Sie muss folgende Forderungen erfüllen:

(M1) Nichtnegativität: Für jedes Polyeder A gilt $V(A) \geq 0$.

(M2) Additivität: Für alle Polyeder A, B gilt:
Wenn A und B keine inneren Punkte gemeinsam haben (also höchstens Randpunkte), dann gilt: $V(A \cup B) = V(A) + V(B)$

(M3) Normierung: Für den fest definierten Einheitswürfel W mit der Kantenlänge 1 gilt: $F(W) = 1$.

(M4) Verträglichkeit mit der Kongruenz: Für alle Polyeder A, B gilt:
Wenn A kongruent zu B ist, dann ist $V(A) = V(B)$.

Figuren, die durch eine Kongruenzabbildung zur Deckung gebracht werden können, heißen kongruent.

5

Geometrie 4b

Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren

Streckenverhältnisse

(1) Maßstab

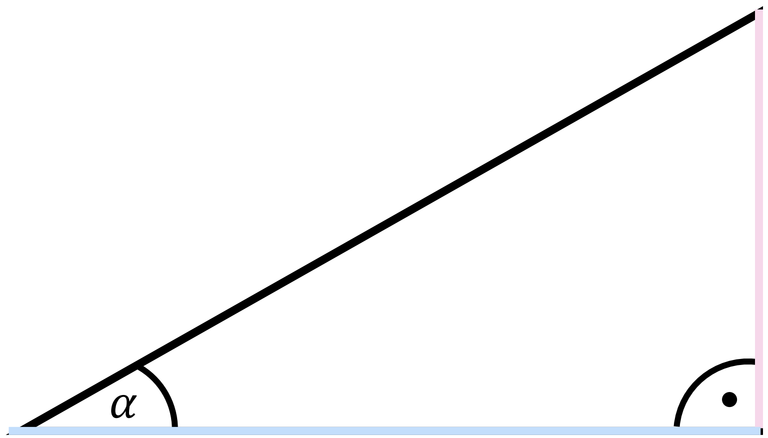
- Reine Verhältniszahl $Maßstabsfaktor\ f = \frac{Bildlänge}{Originallänge}$
- Bsp.: Maßstab $1:100.000$

  $$Maßstabsfaktor\ f = \frac{1\ cm}{1\ km} = \frac{1}{100.000} = 1:100.000$$

(2) Steigung einer Strecke

- Reine Verhältniszahl $Steigung = \frac{Höhenzunahme}{waagerechte\ Entfernung}$
- Häufiger Irrtum:
  gefahrene Strecke statt waagerechte Entfernung
- Bezug zu Steigungswinkel:

  $$Steigung = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \tan\alpha$$



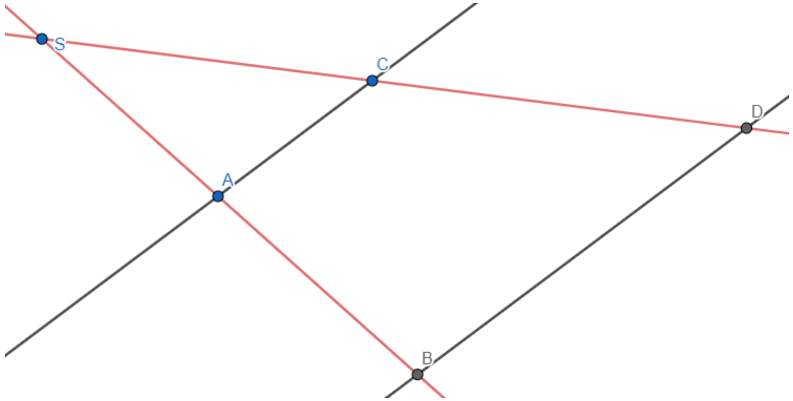
Satz 5.1 von der Mittelparallele im Dreieck
Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten eines Dreiecks ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

Projektionssatz und Strahlensätze

Satz 5.2 Projektionssatz
Erzeugt eine Parallelenschar auf einer schneidenden Geraden gleichlange Abschnitte, dann erzeugt sie gleichlange Abschnitte auf allen schneidenden Geraden. Insbesondere sind die Parallelen äquidistant.

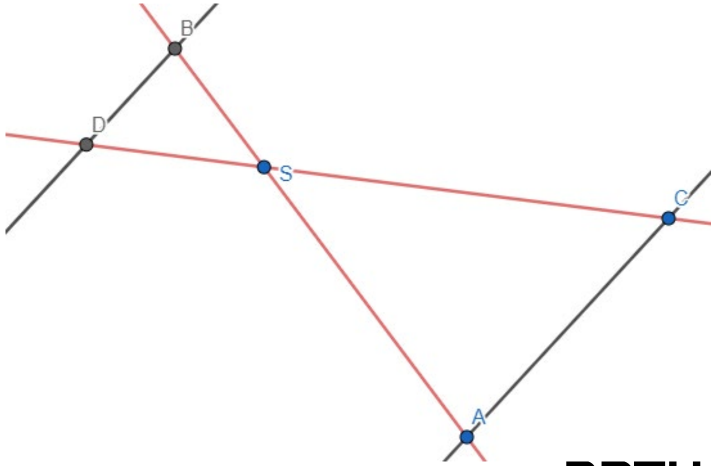
Satz 5.3 – 1. Strahlensatz
Werden zwei sich schneidende Geraden (Schnittpunkt S) von zwei Parallelen geschnitten (Schnittpunkte A, B, C, D mit $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$), so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden:

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} \text{ bzw. } \frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$$



Satz 5.4 – 2. Strahlensatz
Werden zwei sich schneidende Geraden (Schnittpunkt S) von zwei Parallelen geschnitten (Schnittpunkte A, B, C, D mit $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$), so verhalten sich die vom Schnittpunkt aus gemessenen Abschnitte auf einer Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf den Parallelen:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$$

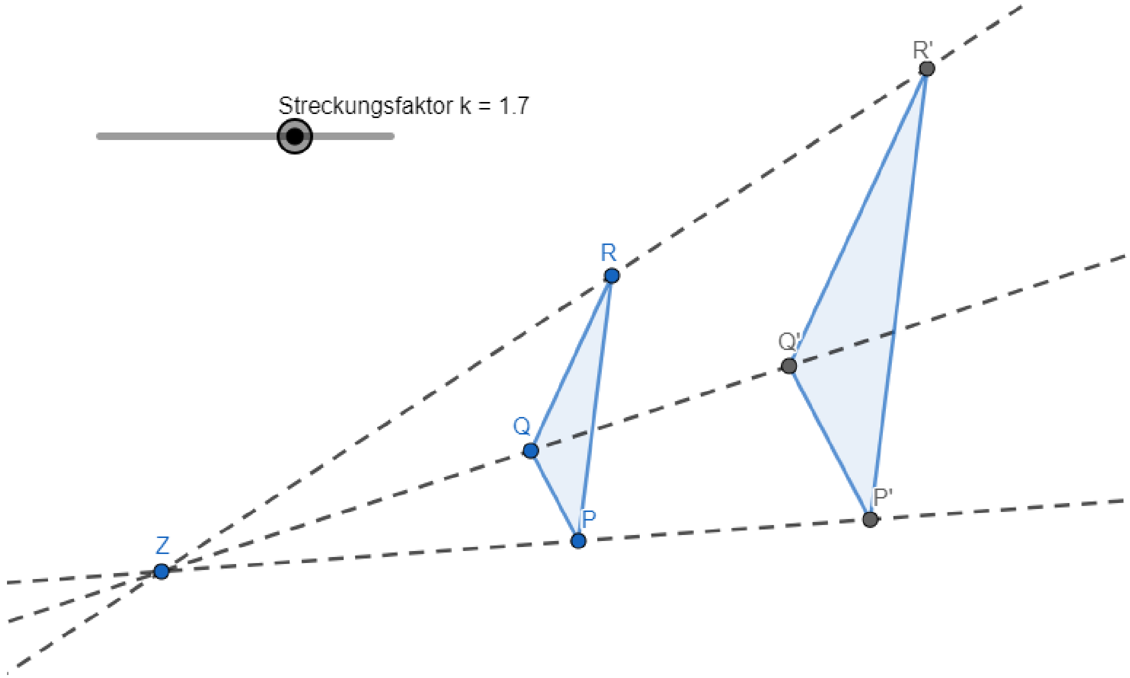


Zentrische Streckung $Z_{Z,k}$

Definition 5.1

Eine Abbildung $Z_{Z,k}$ der Ebene ε auf sich heißt **zentrische Streckung** mit dem **Zentrum** Z und dem **Streckungsfaktor** $k \in \mathbb{R}^{\setminus\{0\}}$ genau dann, wenn gilt:

- Jeder Punkt P liegt mit dem Zentrum Z und seinem Bildpunkt $P' = Z_{Z,k}(P)$ auf einer Geraden.
- Für die Vektoren $\overrightarrow{ZP}$ und $\overrightarrow{ZP'}$ gilt: $\overrightarrow{ZP} = k \cdot \overrightarrow{Z'P'}$



Bemerkung:

Das Bild $P‘ = Z_{Z,k}(P)$ von P wird konstruiert, indem man auf der Geraden ZP von Z aus die $|k|$-fache Länge der Strecke $\overline{ZP}$ abträgt, für $k > 0$ auf der Halbgeraden, auf der P liegt, für $k < 0$ auf der entgegengesetzten Halbgeraden.

Bildquelle: wikipedia

https://www.geogebra.org/m/drka6tpk

Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$

Satz 5.5: Eigenschaften der zentrischen Streckung

a) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ bildet jeden Vektor $\overrightarrow{AB}$ so auf den Vektor $\overrightarrow{A'B'}$ ab, dass gilt $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ bildet jede Gerade g auf eine dazu parallele Gerade g‘ ab.

c) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ ist geradentreu, d.h. sind P, Q, R kollinear dann sind ihre Bilder $P‘, Q‘, R‘$ ebenfalls kollinear.

d) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ ist winkel(maß)treu, d.h. es gilt $\measuredangle PQR = \measuredangle P‘Q‘R‘$.

e) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ ist streckenverhältnistreu, d. h. für beliebige Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$ ihre Bilder $\overline{A'B'}$ und $\overline{P'Q'}$ gilt stets $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{PQ}|} = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{P'Q'}|}$ und $\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = |k|$.

f) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ ist flächenverhältnistreu und es gilt $F(Z_{Z,k}(Polygon)) = k^2 \cdot F(Polygon)$.

g) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ ist volumenverhältnistreu und es gilt $V(Z_{Z,k}(Polyeder) = |k|^3 \cdot V(Polyeder)$.

Weitere Eigenschaften

Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$
(außer $k = 1$ Identität und $k = -1$ Punktspiegelung)

- **Bijektivität:**
  Verschiedene Urbilder haben verschiedene Bilder und jeder Punkt der Ebene besitzt ein Urbild.
- **Geradentreu:** ja
- **Längentreu:** nein
- **Inverses:** Die zu $z_{Z,k}$ inverse Abbildung ist eine zentrische Streckung mit demselben Zentrum und dem Streckungsfaktor $\frac{1}{k}$.
- **Fixpunkt, Fixgeraden und Fixrichtung:**
  - Das Zentrum Z ist der einzige Fixpunkt.
  - Jede Gerade durch das Zentrum Z ist eine Fixgerade. Andere Fixgeraden gibt es nicht.
  - Jede Gerade wird auf eine dazu parallele Gerade abgebildet. $\Rightarrow$ Alle Richtungen sind Fixrichtungen.

Abbildungen

Definition 5.2

a) Eine Abbildung der Ebene ε auf sich, die bijektiv und geradentreu ist, heißt **Kollineation**.

b) Eine Kollineation, die jede Gerade auf eine parallele Bildgerade abbildet, heißt **Dilatation**.

Achtung! Die besondere Eigenschaft der Dilatation ist NICHT gleich der Parallelentreue!

Satz 5.6: Jede Kollineation ist parallelentreu.

Definition 5.3

a) Eine **Ähnlichkeitsabbildung** ist die Verkettung einer endlichen Anzahl von zentrischen Streckungen mit einer endlichen Anzahl von Kongruenzabbildungen.

b) Eine Figur F ist genau dann **ähnlich** zu einer Figur G, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung φ gibt, die F auf G abbildet.

Ähnlichkeitssätze

Satz 5.7

a) Jede Ähnlichkeitsabbildung lässt sich als Verkettung **einer** zentrischen Streckung und **einer** Kongruenzabbildung darstellen.

b) Ähnlichkeitsabbildungen sind geradentreu, winkel(maß)treu, parallelentreu und streckenverhältnistreu.

Satz 5.8 – Ähnlichkeitssatz WW für Dreiecke

Sind zwei Winkel eines Dreiecks kongruent zu den entsprechenden Winkeln eines anderen Dreiecks, dann sind die Dreiecke ähnlich.

Satz 5.9 – Ähnlichkeitssatz Seitenverhältnis für Dreiecke

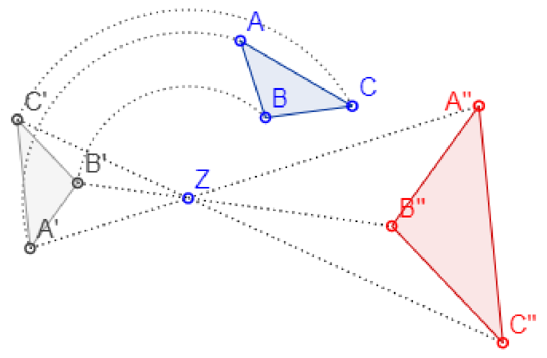
Stimmen zwei Dreiecke in den Verhältnissen der drei Seitenlängen überein, dann sind die Dreiecke ähnlich.

Typen von Ähnlichkeitsabbildungen

Definition 5.4

a) Eine **Drehstreckung** ist die Verkettung einer zentrischen Streckung und einer Drehung mit demselben Zentrum Z: $D_{Z,\alpha,k} := D_{Z,\alpha} \circ Z_{Z,k}$.

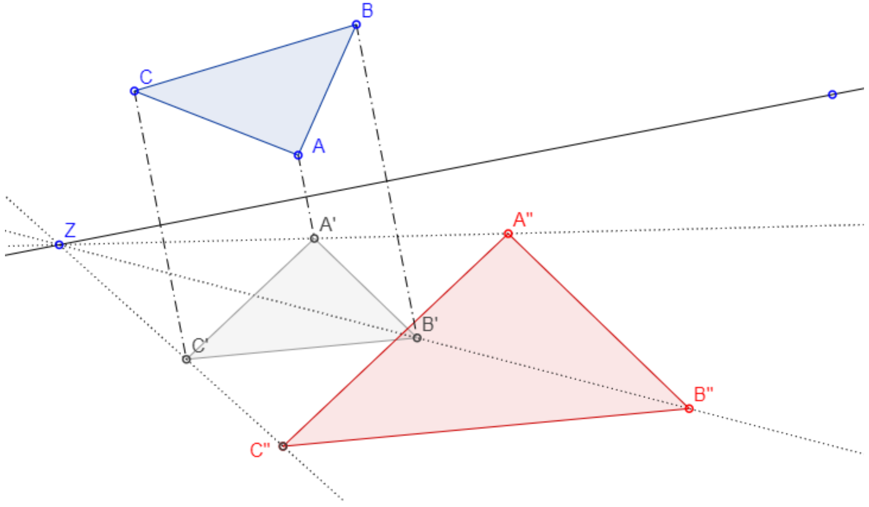
b) Eine **Klappstreckung** (Streckspiegelung) ist die Verkettung einer zentrischen Streckung und einer Achsenspiegelung, deren Achse g durch das Zentrum Z verläuft: $K_{Z,k,g} := S_g \circ Z_{Z,k}$.



Satz 5.10

a) Bei einer Drehstreckung sind die zentrische Streckung und die Drehung miteinander vertauschbar:
$D_{Z,\alpha,k} = D_{Z,\alpha} \circ Z_{Z,k} = Z_{Z,k} \circ D_{Z,\alpha}$.

b) Bei einer Klappstreckung sind die zentrische Streckung und die Achsenspiegelung miteinander vertauschbar:
$K_{Z,k,g} = S_g \circ Z_{Z,k} = Z_{Z,k} \circ S_g$.



6

Geometrie 4b

Satzgruppe des Pythagoras

Ähnlichkeit am rechtwinkligen Dreieck

Satz 6.1
Die Höhe der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck zerlegt dieses in zwei zueinander und zum gesamten Dreieck ähnliche Teildreiecke.

Folgerungen aus Satz 6.1

(1) Kathetensatz

Für die Kathetenlängen a, b und die Längen der Hypotenusenabschnitte p, q im rechtwinkligen Dreieck gilt: $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$.

(2) Satz des Pythagoras

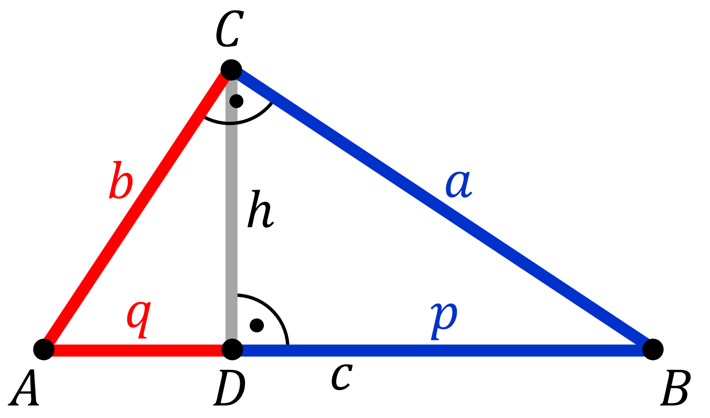
Für die Kathetenlängen a, b und die Länge der Hypotenuse c im rechtwinkligen Dreieck gilt:
$a^2 + b^2 = c^2$.

(3) Höhensatz

Für die Länge der Höhe h der Hypotenuse c und die Längen der Hypotenusenabschnitte p, q im rechtwinkligen Dreieck gilt: $h^2 = p \cdot q$.

Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

- Hypotenuse: dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite
- Katheten: am rechten Winkel anliegende Seiten
- Höhe: die zur Hypotenuse gehörende
- Hypotenusenabschnitte: durch die Höhe unterteilte Abschnitte der Hypotenuse



Kathetensatz und Höhensatz

Satz 6.2 – Satz des Pythagoras

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächen-inhalt des Quadrates über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.

Satz 6.3 – Kathetensatz

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat ein Kathetenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt: $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$.

Satz 6.4 – Höhensatz

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Höhenquadrat (der Höhe der Hypotenuse) denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten: $h^2 = p \cdot q$.