Geometrie

Modul 4b

Susanne Digel & Jürgen Roth

01.02.2024

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Geometrie 4b

1. Ideen der Geometrie
2. Kongruenzabbildungen der Ebene
3. Figuren in der Ebene
4. Flächeninhalte
5. Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren
6. Satzgruppe des Pythagoras

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

6

Geometrie 4b

Satzgruppe des Pythagoras

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

6 Satzgruppe des Pythagoras

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

6 Satzgruppe des Pythagoras

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

Ähnlichkeit am rechtwinkligen Dreieck

Satz 6.1
Die Höhe der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck zerlegt dieses in zwei zueinander und zum gesamten Dreieck ähnliche Teildreiecke.

Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

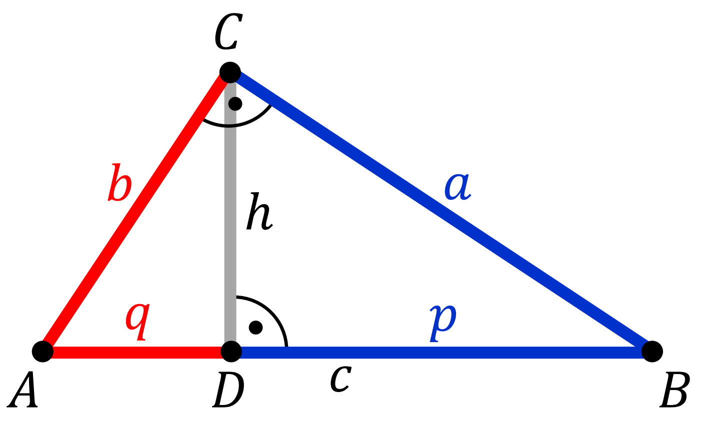
- Hypotenuse: dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite
- Katheten: am rechten Winkel anliegende Seiten
- Höhe: die zur Hypotenuse gehörende
- Hypotenusenabschnitte: durch die Höhe unterteilte Abschnitte der Hypotenuse

Beweis:
Voraussetzung: $\measuredangle CDA = \measuredangle ACB = \measuredangle BDC = 90°$
Zu zeigen: $\Delta ACD \sim \Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\measuredangle CDA = \measuredangle ACB$ und $\measuredangle DAC = \measuredangle BAC$ (Vor., Id.)
→ $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (Satz 5.9)

$\measuredangle ACB = \measuredangle BDC$ und $\measuredangle CBD = \measuredangle CBA$ (Vor., Id.)
→ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (Satz 5.9)
→ $\Delta ACD \sim \Delta BDC$ (Transitivität)

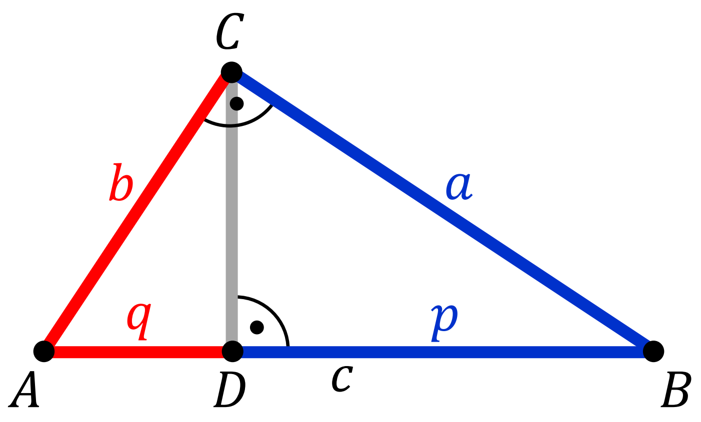
q.e.d.



Folgerungen aus der Ähnlichkeit

(1) Kathetensatz

Für die Kathetenlängen a, b und die Längen der Hypotenusenabschnitte p, q im rechtwinkligen Dreieck gilt:
$a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$.



Beweis:

Voraussetzung: $\sphericalangle CDA = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BDC = 90°$

Zu zeigen: $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (Satz 6.1)

$\rightarrow \frac{a}{p} = \frac{c}{a}$ (streckenverhältnistreu, Satz 5.7 b)

$\Leftrightarrow a^2 = c \cdot p$

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (Satz 6.1)

$\rightarrow \frac{b}{q} = \frac{c}{b}$ (streckenverhältnistreu, Satz 5.7 b)

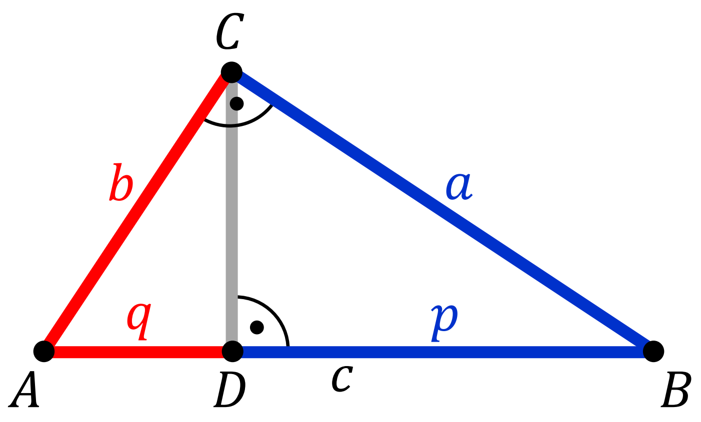
$\Leftrightarrow b^2 = c \cdot q$

q.e.d.

Folgerungen aus der Ähnlichkeit

(2) Satz des Pythagoras

Für die Kathetenlängen a, b und die Länge der Hypotenuse c im rechtwinkligen Dreieck gilt:
$a^2 + b^2 = c^2$.



Beweis:

Voraussetzung: $\measuredangle CDA = \measuredangle ACB = \measuredangle BDC = 90°$

Zu zeigen: $a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$ (Folgerung 1)

→ $a^2 + b^2 = c \cdot (p + q)$ (Addition der Gleichungen)

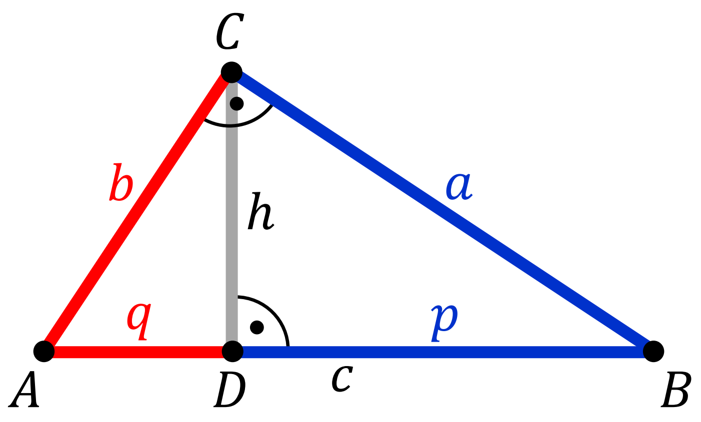
⇔ $a^2 + b^2 = c^2$

q.e.d.

Folgerungen aus der Ähnlichkeit

(3) Höhensatz

Für die Länge der Höhe h der Hypotenuse c und die Längen der Hypotenusenabschnitte p, q im rechtwinkligen Dreieck gilt: $h^2 = p \cdot q$.



Beweis:

Voraussetzung: $\measuredangle CDA = \measuredangle ACB = \measuredangle BDC = 90°$

Zu zeigen: $h^2 = p \cdot q$

$\Delta BDC \sim \Delta ACD$ (Satz 6.1)

$\rightarrow \frac{h}{p} = \frac{q}{h}$ (streckenverhältnistreu, Satz 5.7 b)

$\Leftrightarrow h^2 = p \cdot q$

q.e.d.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

6 Satzgruppe des Pythagoras

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

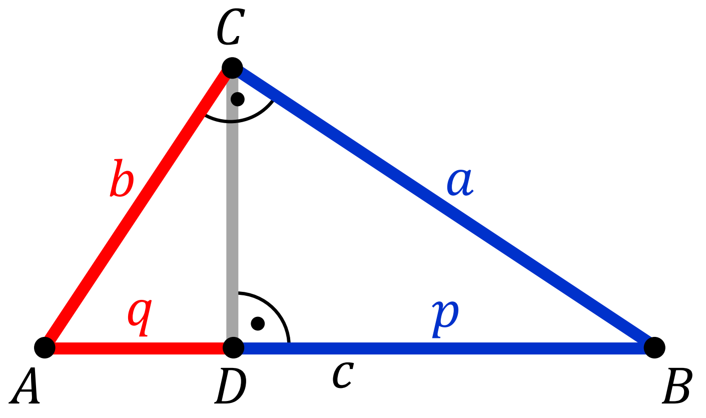
Satz des Pythagoras

Satzgruppe des Pythagoras

Bezieht sich auf rechtwinklige Dreiecke.

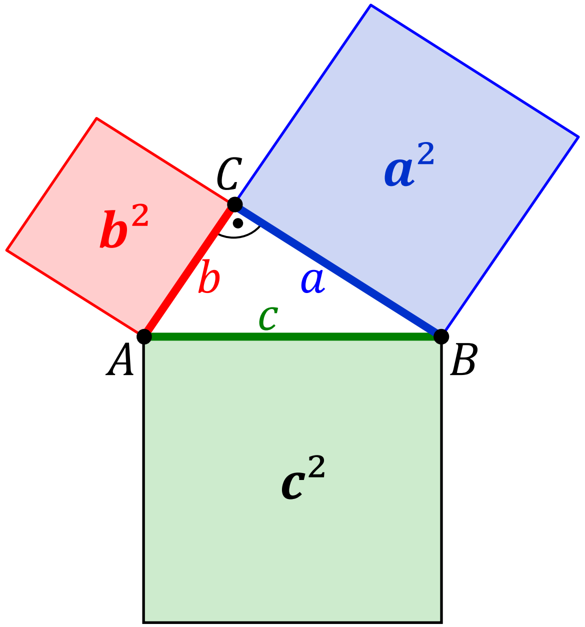
Wird meist in der Flächendeutung angegeben.

Zur Satzgruppe gehören folgende drei Sätze:



Satz 6.2 – Satz des Pythagoras

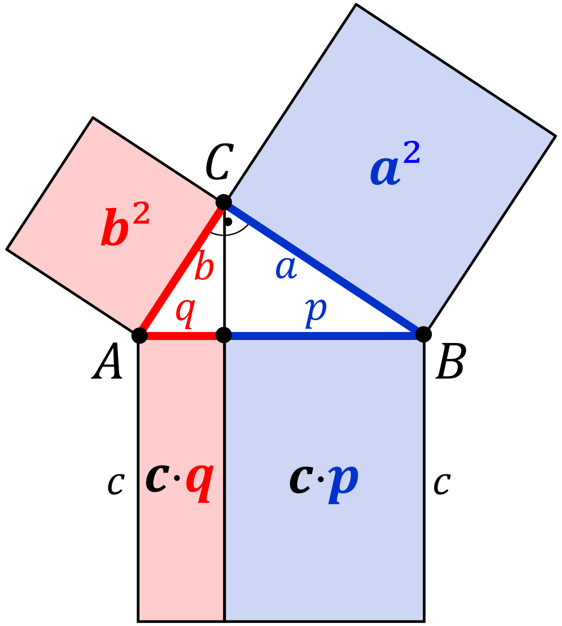
Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$.



Kathetensatz und Höhensatz

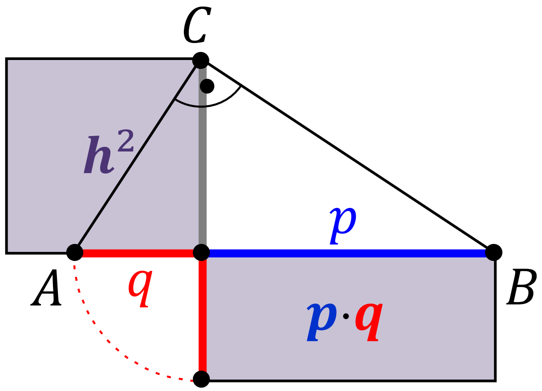
Satz 6.3 – Kathetensatz

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat ein Kathetenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt:
$a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$.



Satz 6.4 – Höhensatz

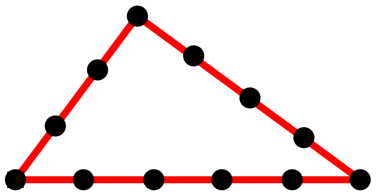
Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Höhenquadrat (der Höhe der Hypotenuse) denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten:
$h^2 = p \cdot q$.



Logische Struktur der Satzgruppe

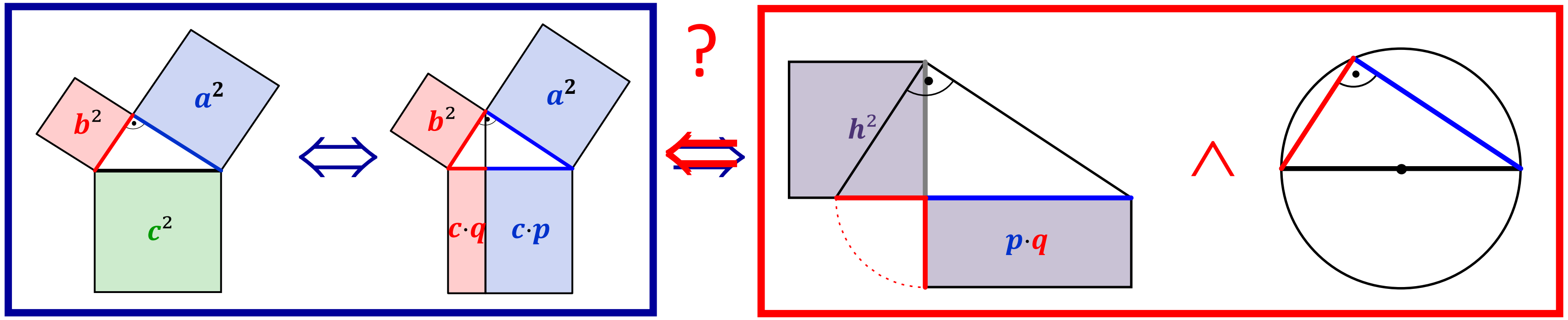
Satz ⇔ Kehrsatzproblematik!

Satz des Pythagoras ⇔ Ägyptische Seilspanner



Logische Abhängigkeit der Sätze:

- Satz des Pythagoras ⇔ Kathetensatz
- Satz des Pythagoras ⇒ Höhensatz
- Kathetensatz ⇒ Höhensatz
- Höhensatz ∧ Satz des Thales ⇒ Satz des Pythagoras
- Höhensatz ∧ Satz des Thales ⇒ Kathetensatz



Beweisideen für Übergänge

Satz des Pythagoras ⇒ Kathetensatz bzw. Höhensatz:

- Anwendung des Satzes des Pythagoras auf die Teildreiecke
- Arithmetische Umformungen

Höhensatz ∧ Satz des Thales ⇒ Satz des Pythagoras bzw. Kathetensatz:

- Einzeichnen eines geeigneten Thaleskreises
- Anwenden des Höhensatzes auf ein geeignetes Teildreieck

Kathetensatz ⇒ Höhensatz:

- Mehrfache Anwendung des Kathetensatzes auf (Teil-)dreiecke.

s. dazu https://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/pythagoras/site4.html

Freiwillige Übung
Notieren Sie dazu ausführliche Beweise.

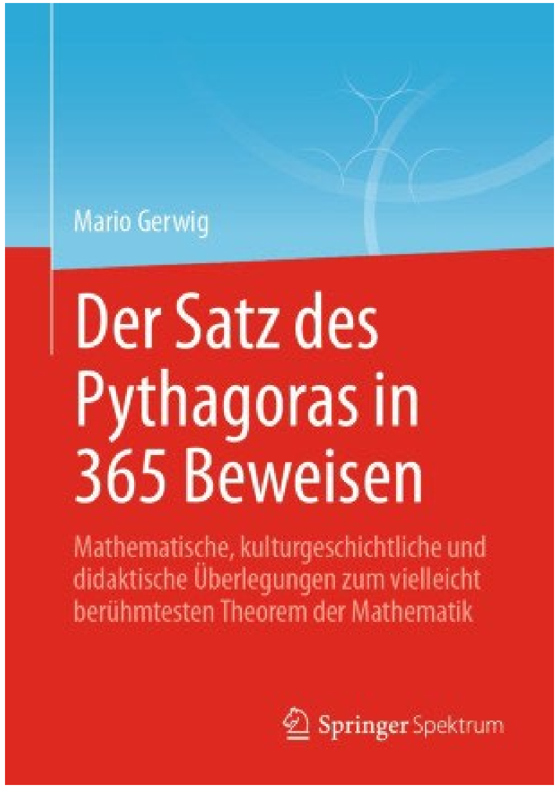
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

6 Satzgruppe des Pythagoras

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

Satz des Pythagoras

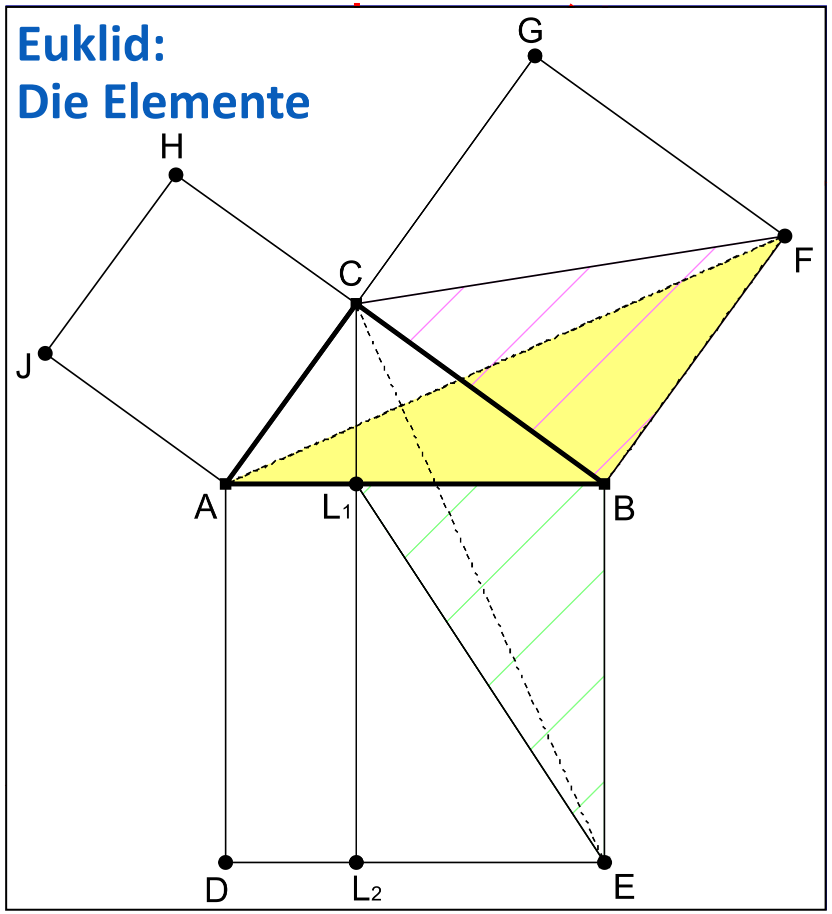
Gerwig, Mario (2021). *Der Satz des Pythagoras in 365 Beweisen*. Mathematische, kulturgeschichtliche und didaktische Überlegungen zum vielleicht berühmtesten Theorem der Mathematik. Berlin: Springer



Beweistypen und -methoden

- Ähnlichkeitsbeweis
- Kongruenzbeweis (Elemente des Euklid)
- Abbildungsbeweis (Scherung)
- Prinzip der Zerlegungsgleichheit (Stuhl der Braut)
- Prinzip der Ergänzungsgleichheit (Altindischer Beweis)
- Arithmetischer Beweis (Beweis von Garfield)

Kongruenzbeweis



Beweis:

(I) $AC \parallel BF \Rightarrow A_{\Delta CBF} = A_{\Delta ABF}$

(II) $CL_1 \parallel BE \Rightarrow A_{\Delta L_1 EB} = A_{\Delta CEB}$

(III) Zu zeigen: $\Delta ABF \cong \Delta CEB$

(1) $|AB| = |EB|$ [Hypotenuse c]

(2) $|\measuredangle FBA| = |\measuredangle CBE|$ [$90° + \beta$]

(3) $|BF| = |BC|$ [Kathete a]

$\overset{SWS}{\Longrightarrow} \Delta ABF \cong \Delta CEB$ Kongruenz-beweis

$\Longrightarrow A_{\Delta ABF} = A_{\Delta CEB}$

$\xRightarrow{\text{(I),(II),(III)}} A_{\Delta CBF} = A_{\Delta L_1 BE}$

$\Rightarrow a^2 = c \cdot |L_1B|$ [Kathetensatz 1. Teil]

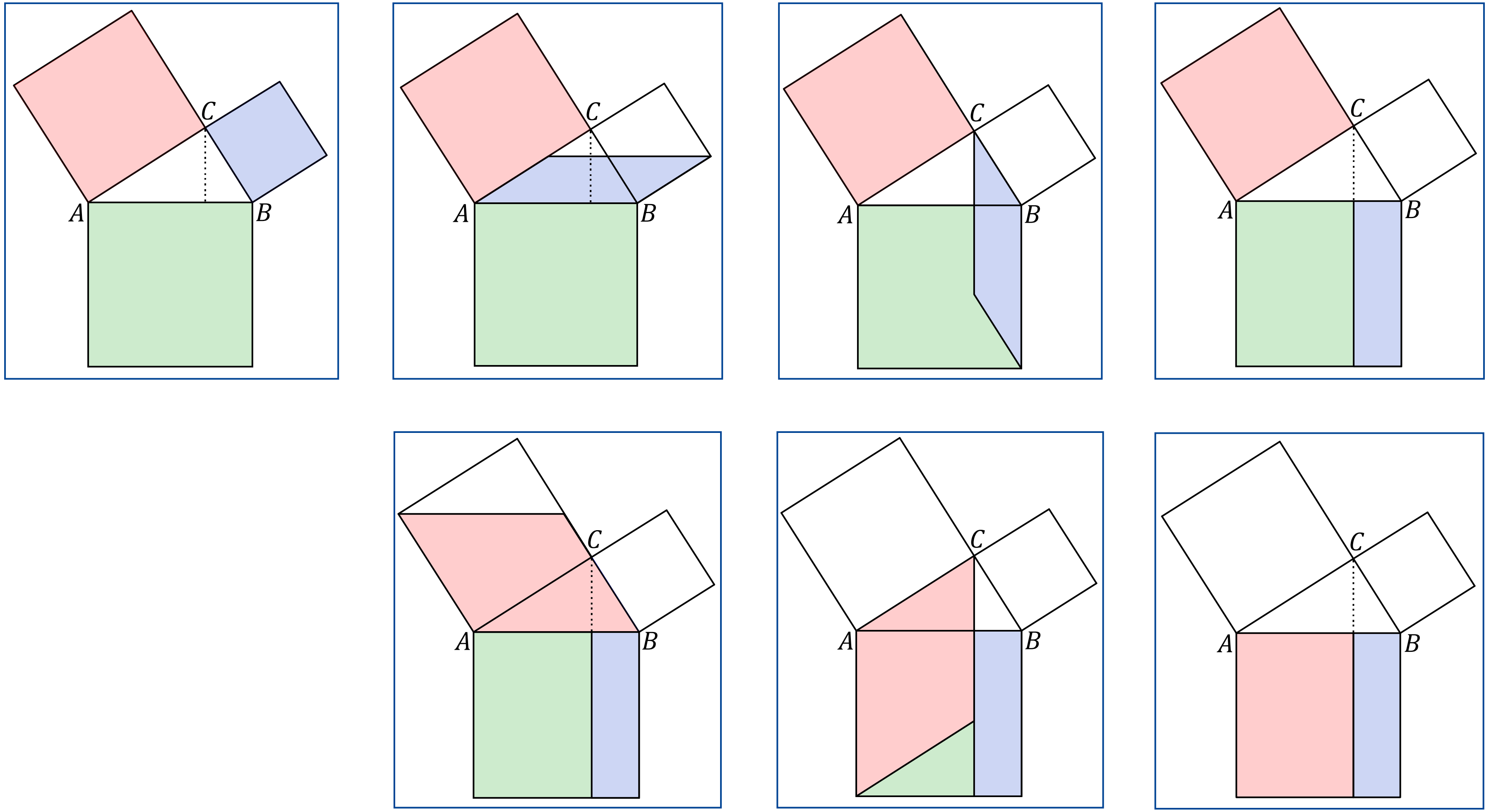
Analog ergibt sich:

$b^2 = c \cdot |AL_1|$ [Kathetensatz 2. Teil]

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c \cdot |L_1B| + c \cdot |AL_1| = c \cdot (|L_1B| + |AL_1|) = c \cdot c = c^2 \quad \blacksquare$$

Abbildungsbeweis (Flächeninhaltsvergleiche)

Scherung → Drehung → Scherung

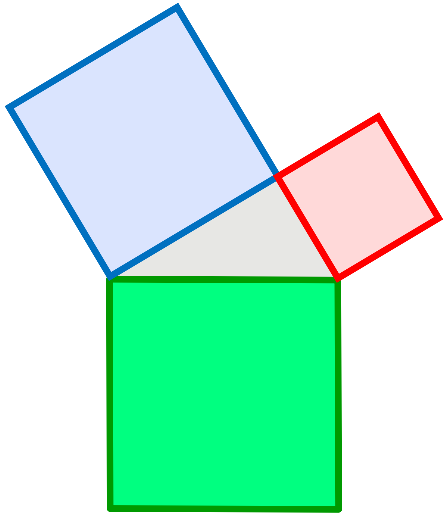


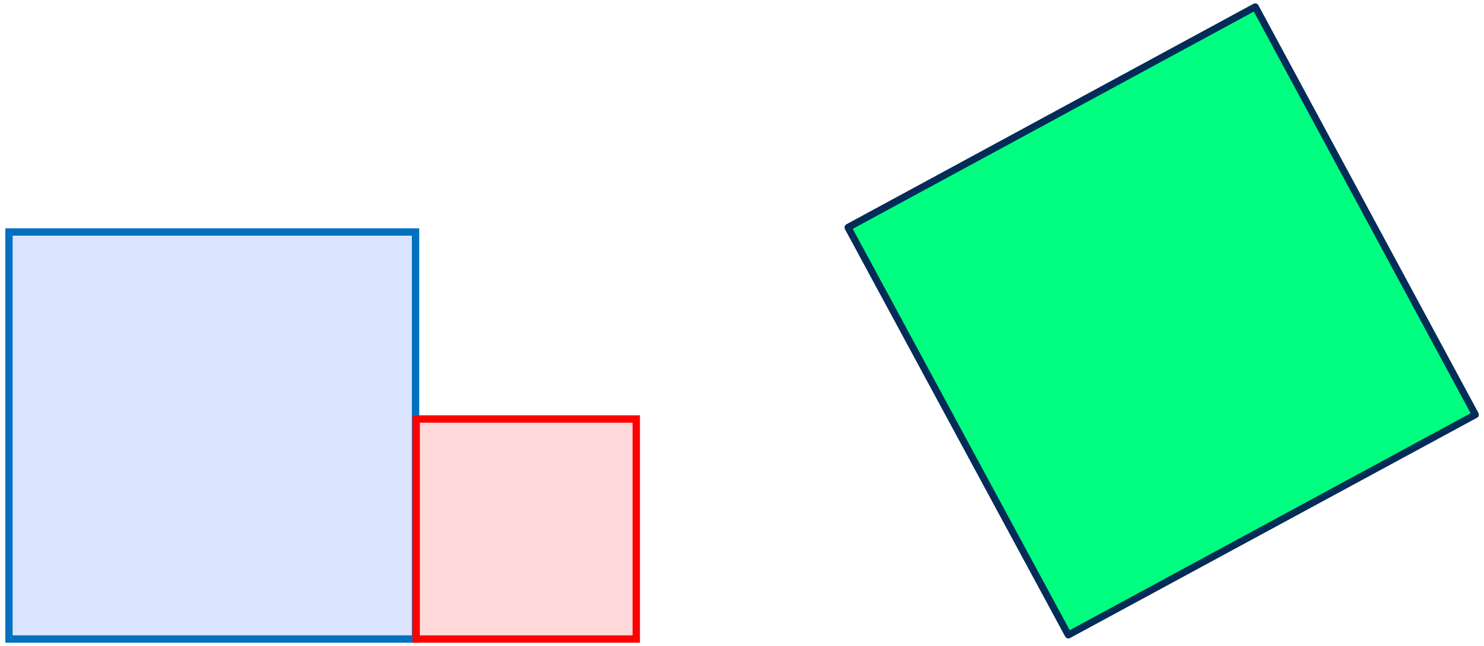
https://www.geogebra.org/m/ndadzzhp

Prinzip der Zerlegungsgleichheit

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Stuhl der Braut

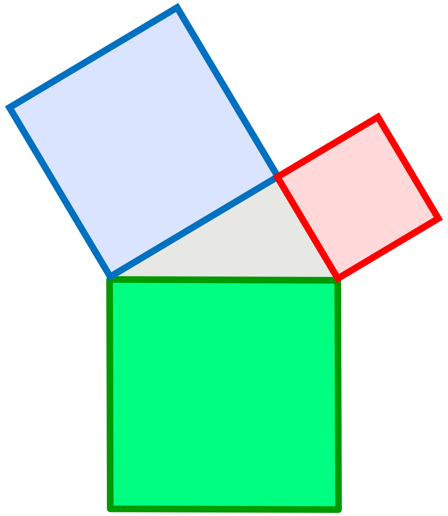


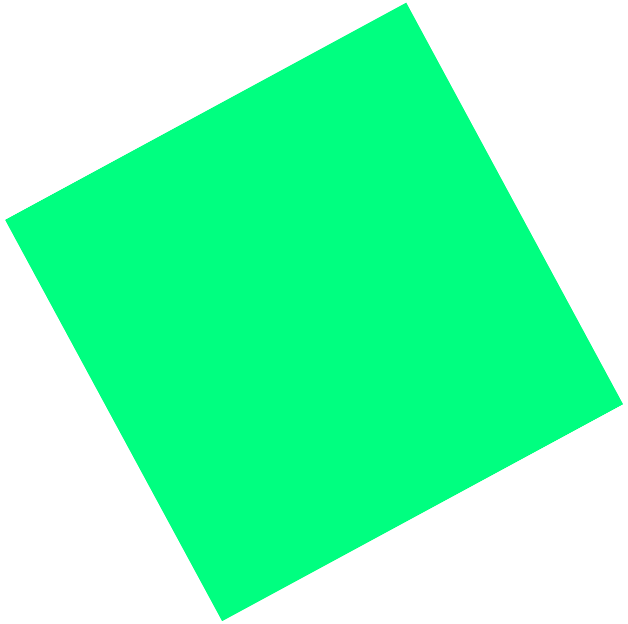


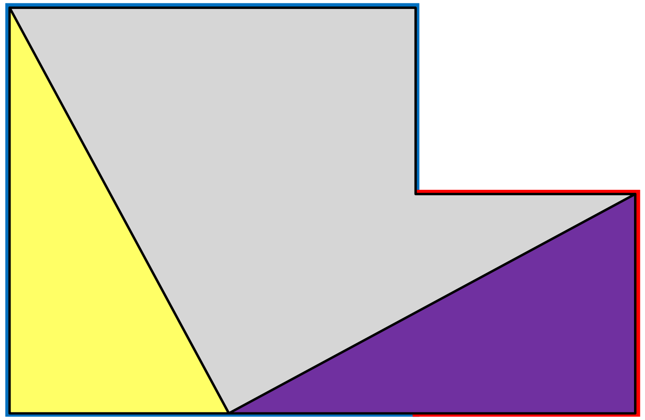
https://www.geogebra.org/m/zmrcqcnr

Prinzip der Zerlegungsgleichheit

Stuhl der Braut



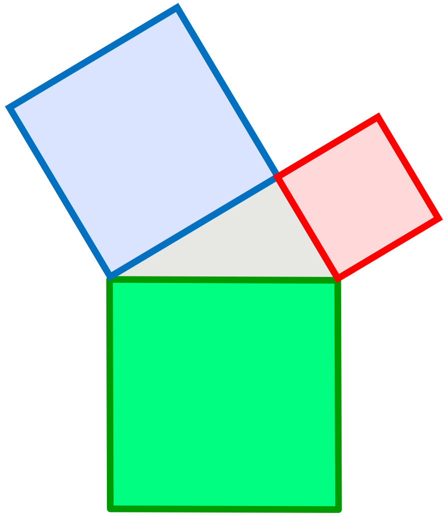


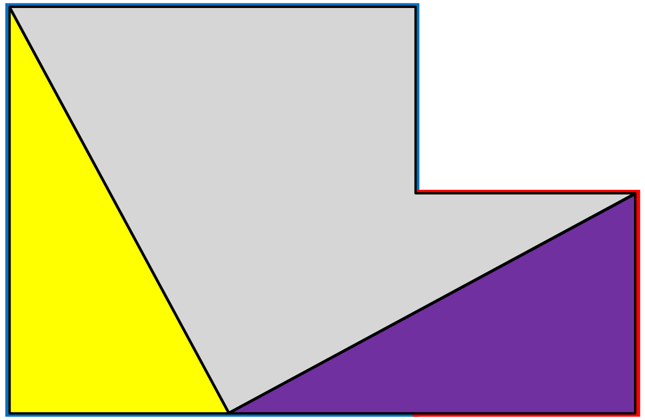


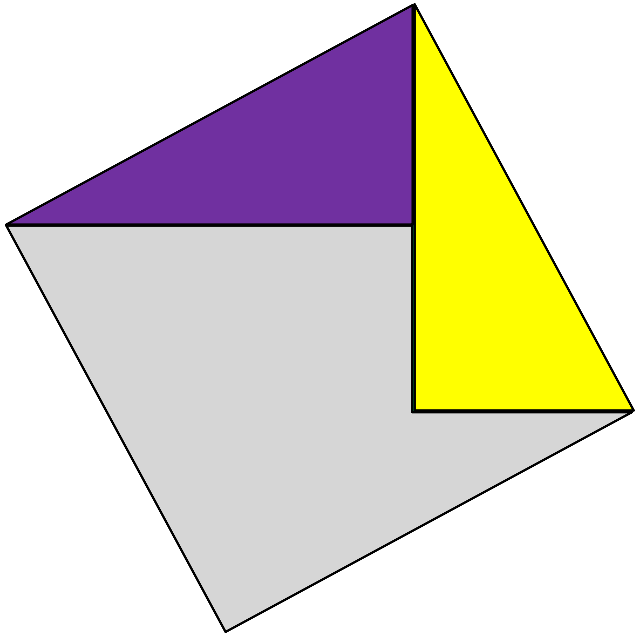
https://www.geogebra.org/m/zmrcqcnr

Prinzip der Zerlegungsgleichheit

Stuhl der Braut



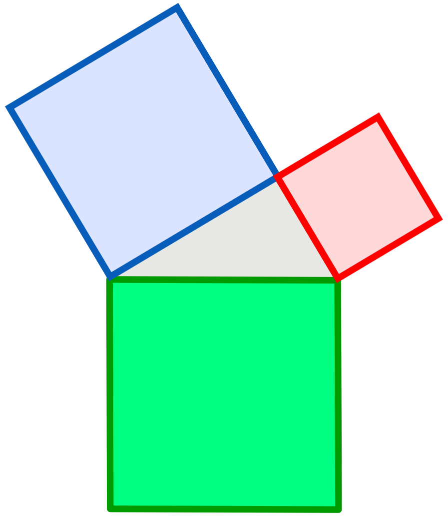


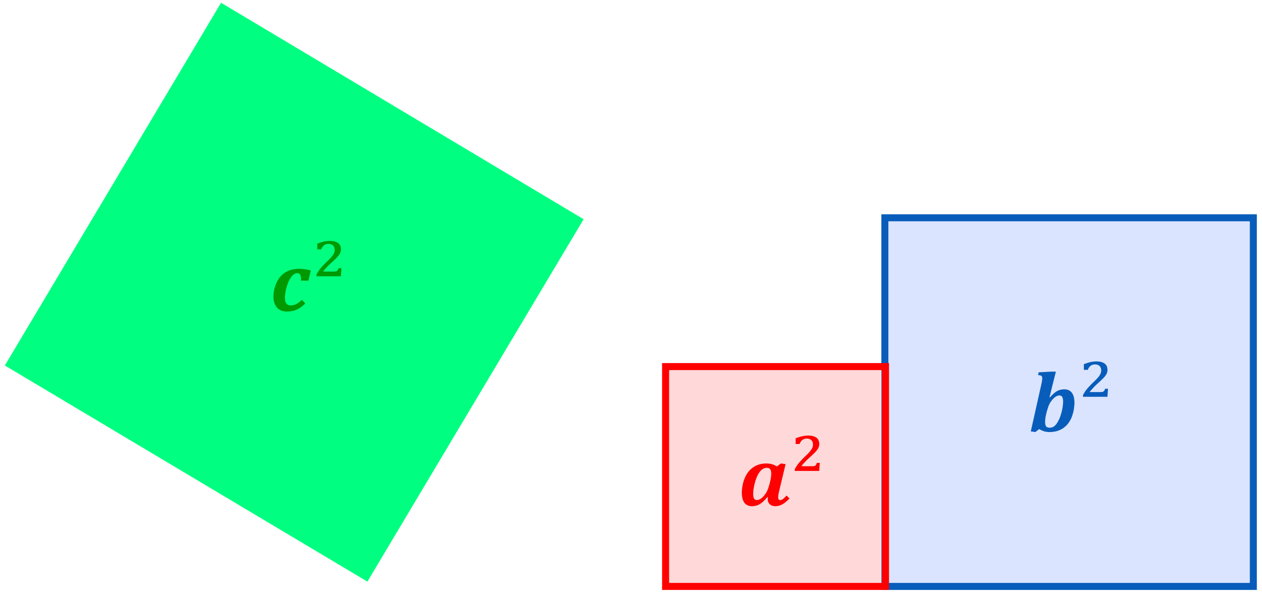


https://www.geogebra.org/m/zmrcqcnr

Prinzip der Ergänzungsgleichheit

Altindischer Ergänzungsbeweis

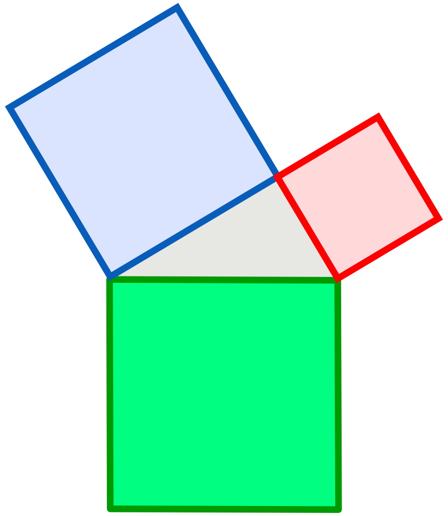


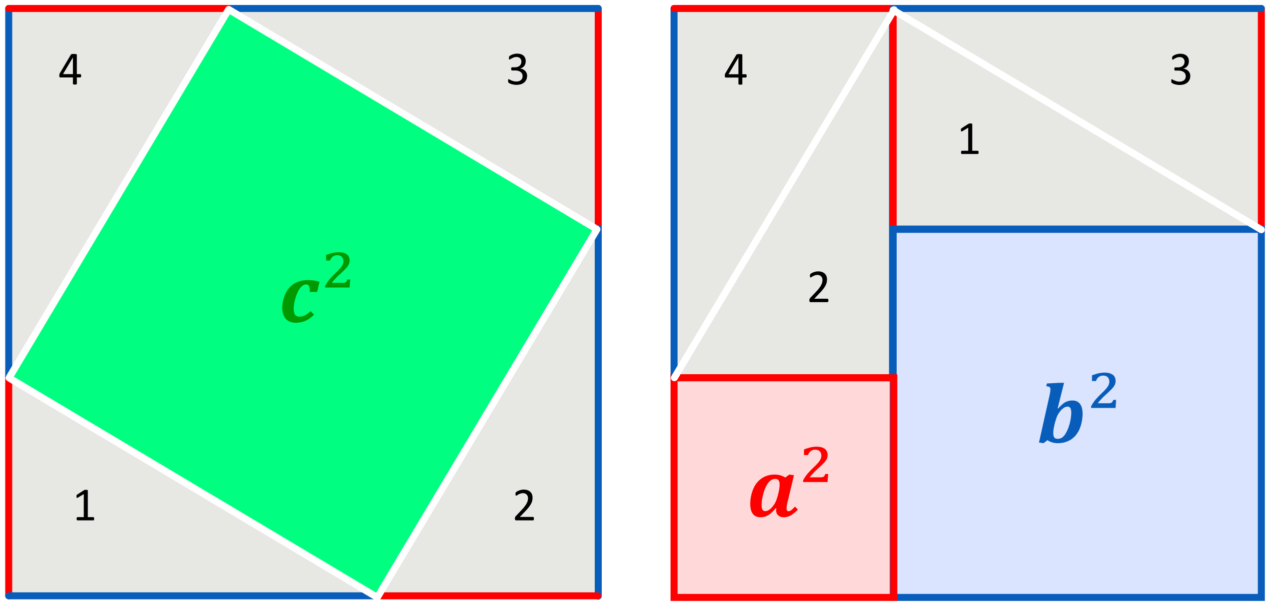


https://www.geogebra.org/m/zmrcqcnr

Prinzip der Ergänzungsgleichheit

Altindischer Ergänzungsbeweis

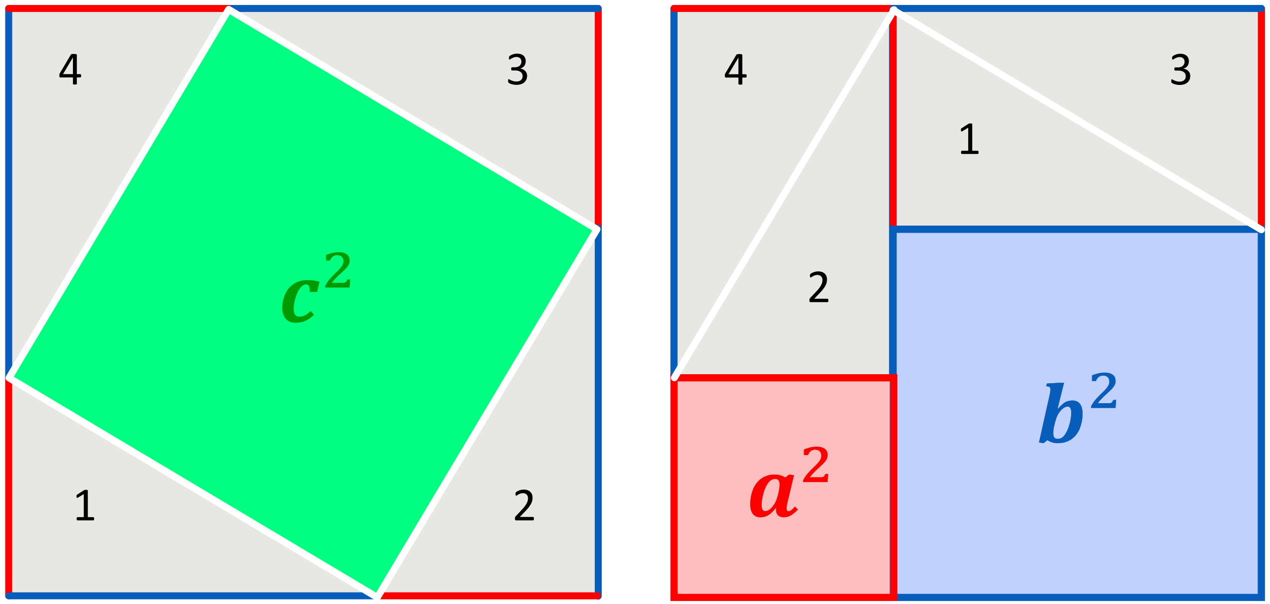


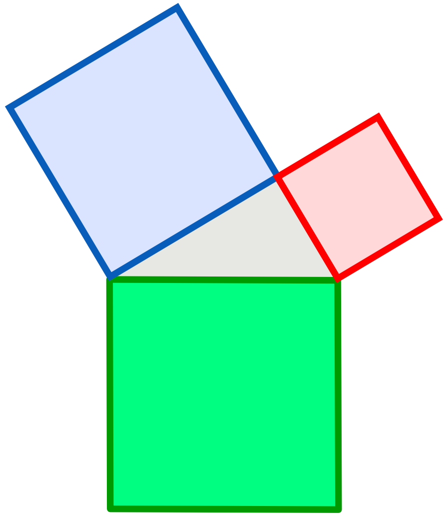


https://www.geogebra.org/m/yxdhFZuQ

Prinzip der Ergänzungsgleichheit

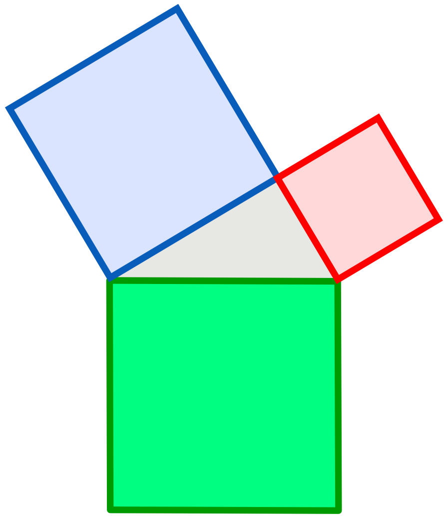
Altindischer Ergänzungsbeweis



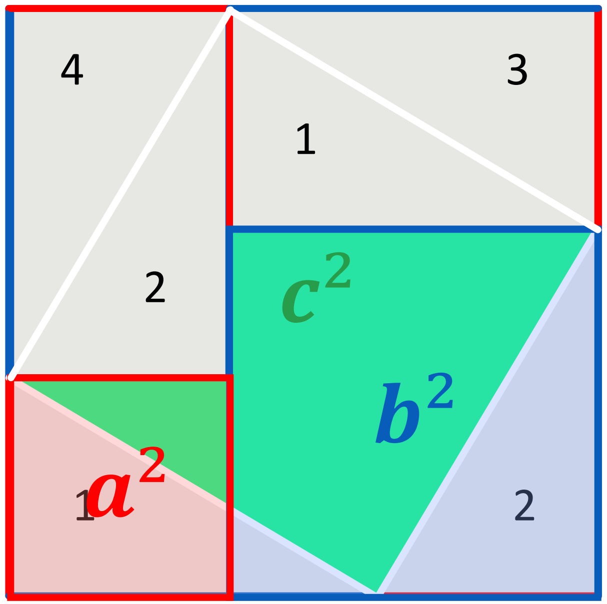


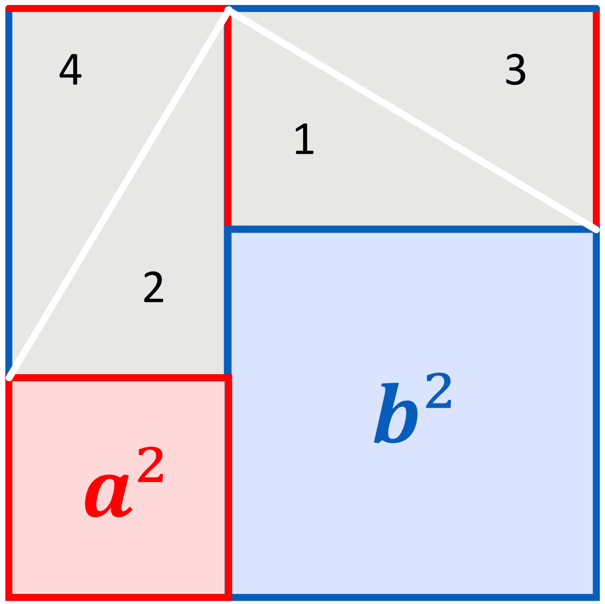
https://www.geogebra.org/m/yxdhFZuQ

Prinzip der Ergänzungsgleichheit



Altindischer Ergänzungsbeweis



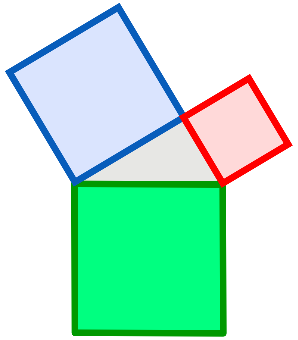


https://www.geogebra.org/m/yxdhFZuQ

Altindischer Ergänzungsbeweis

Offene Begründungen

1. Handelt es sich in der linken Figur um ein Quadrat?
2. Handelt es sich in der rechten Figur um ein Quadrat?
3. Sind beide Quadrate kongruent?



Begründungen:

Zu 1: Dreiecke 1-4 sind rechtwinklig und kongruent

→ $\alpha + \beta + 90° = 180°$ (WSD)

→ Alle Seiten der Figur gleich lang: $a + b$ und alle Winkelmaße 90°

→ Quadrat

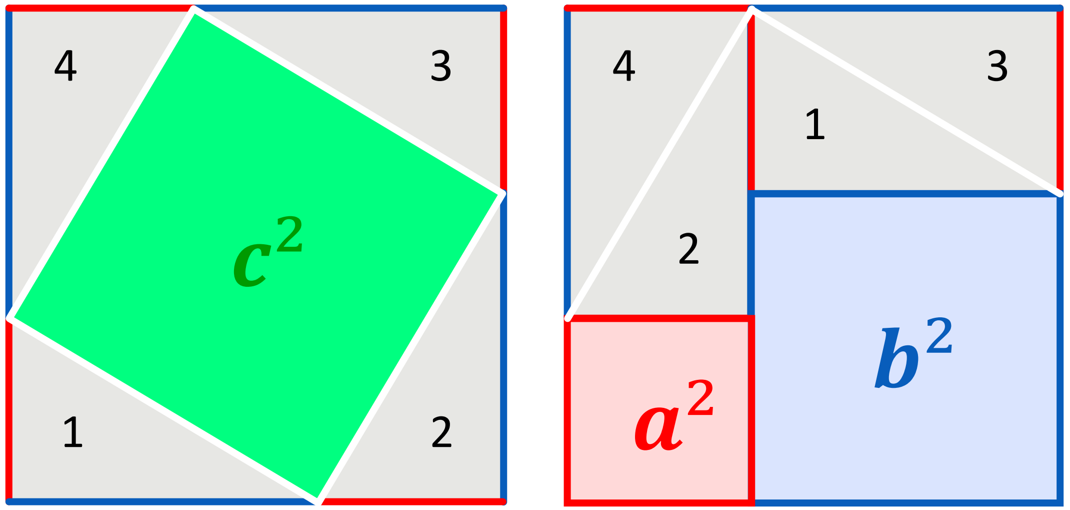
Zu 2: Dreiecke 1-4 sind rechtwinklig und kongruent

→ $\alpha + \beta + 90° = 180°$ und $2\alpha + 2\beta = 180°$ (WSD)

→ Alle Seiten der Figur gleich lang: $a + b$ und alle Winkelmaße 90°

→ Quadrat

Zu 3: Seiten der beiden Quadrate gleich lang: $a + b$



https://www.geogebra.org/m/yxdhFZuQ

Arithmetischer Beweis

Beweis von J.A. Garfield (1881 Präsident der U.S.A.)

(1) $A_{\text{Trapez}} = A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2} + A_{\Delta_3}$

$= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$

$= ab + \frac{1}{2}c^2$

(2) $A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b)$

$= \frac{1}{2}(a+b)^2$

$= \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2)$

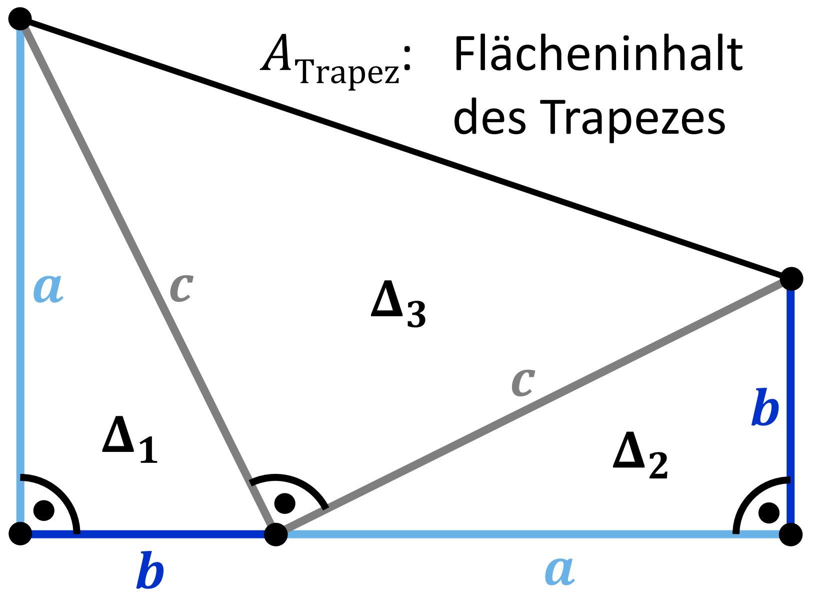
Gleichsetzen der Terme aus (1) und (2) liefert:

$$\frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) = ab + \frac{1}{2}c^2 \qquad | \cdot 2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \qquad | - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

■



Offene Begründungen

1. Ist das Dreieck Δ_3 rechtwinklig?
2. Handelt es sich um ein Trapez?

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

6 Satzgruppe des Pythagoras

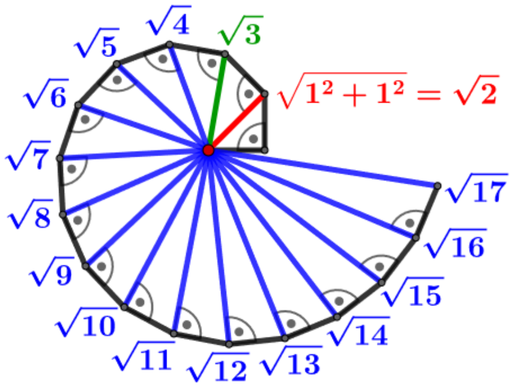
GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

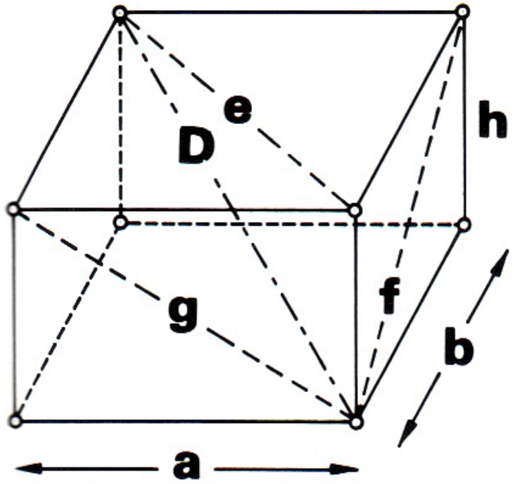
RPTU

Anwendungen der Satzgruppe des Pythagoras

- **Berechnungen in der Ebene**
  - Diagonale des Rechtecks
  - Höhe & Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks
  - Abstand zweier Punkte (im Koordinatensystem)
  - Sehnenlänge am Kreis
  - Reguläre n-Ecke
  - Kosinussatz
- **Berechnungen im Raum**
  - Raumdiagonale
  - Längen im Raum
- **Konstruktionen**
  - Strecken der Länge $\sqrt{n}$
  - Flächenverwandlung



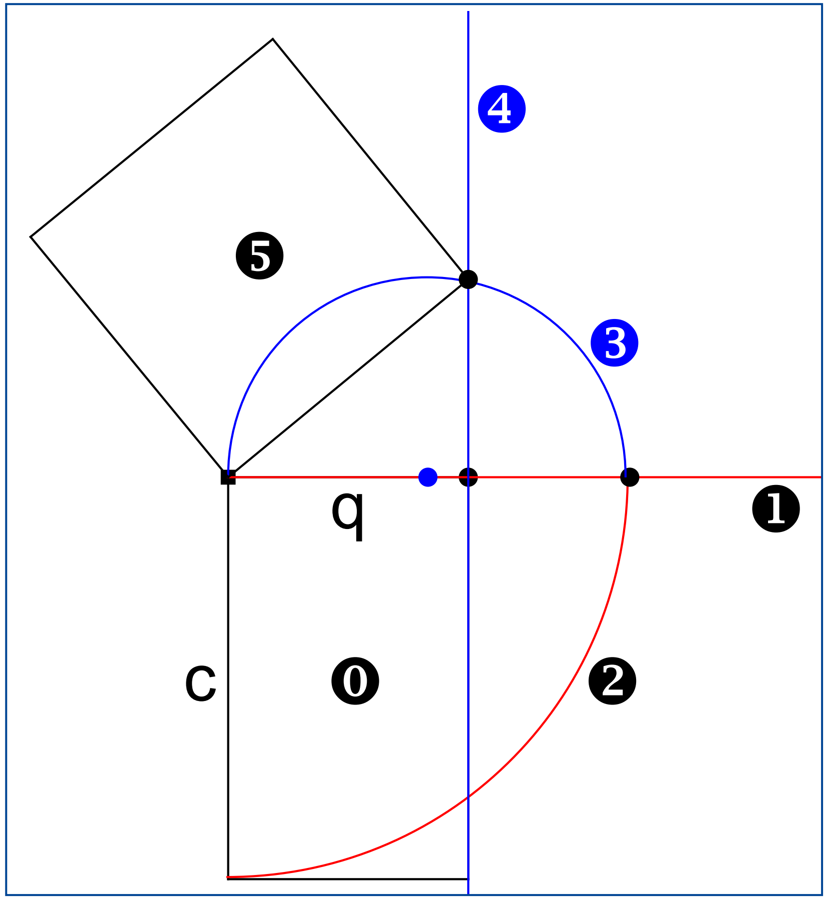
https://www.geogebra.org/m/PJEDcvFx



Flächenverwandlung

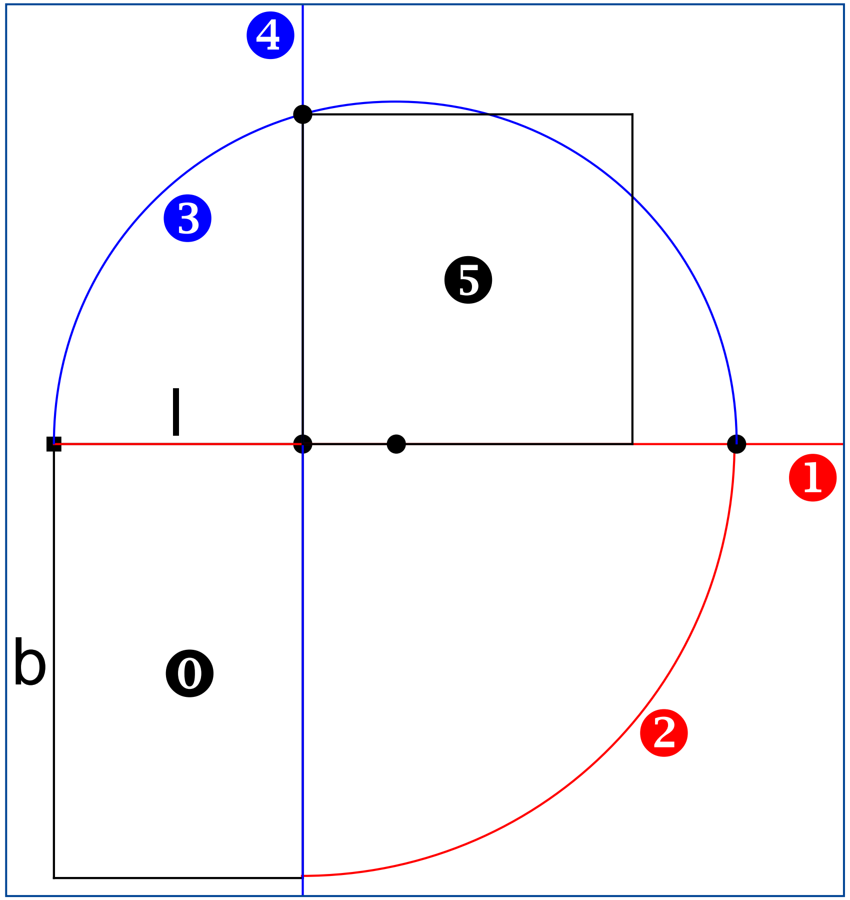
Verwandlung eines Rechtecks in ein inhaltsgleiches Quadrat

Kathetensatz



https://www.geogebra.org/m/ZuH6749V

Höhensatz

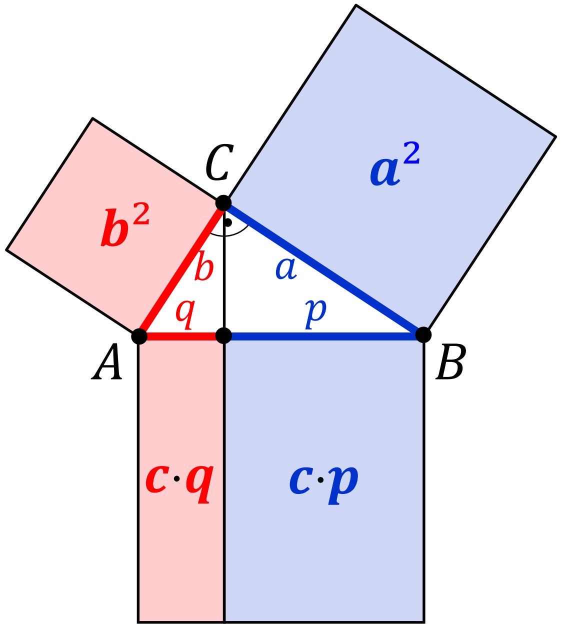


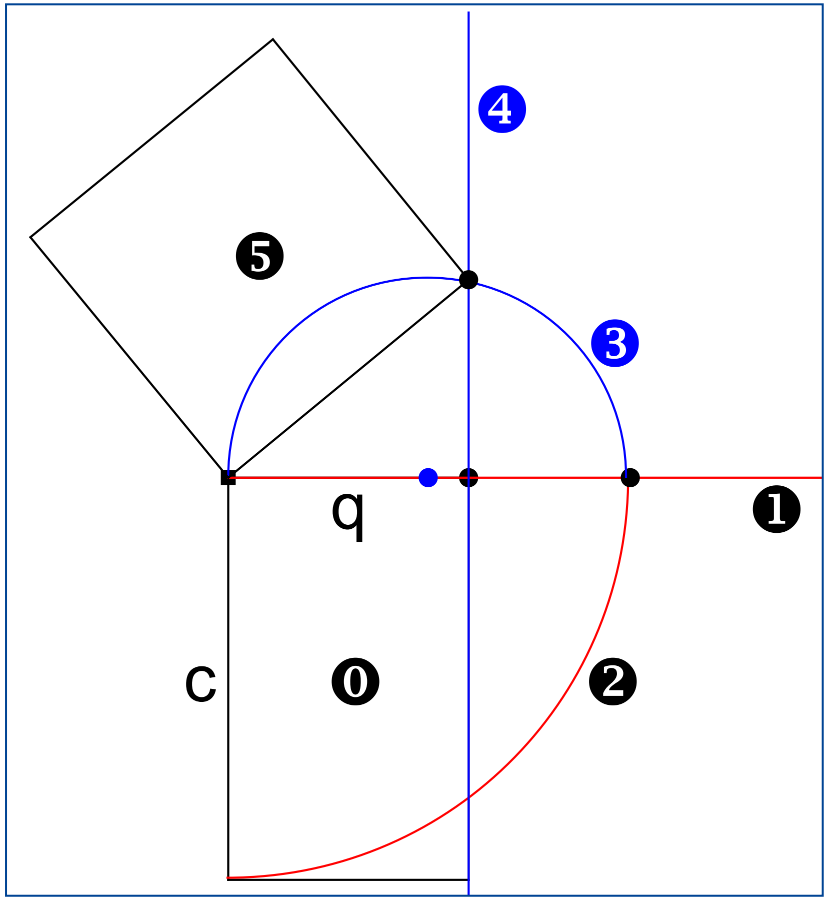
https://www.geogebra.org/m/khTUH8CQ

Flächenverwandlung Kathetensatz

Verwandlung eines Rechtecks in ein inhaltsgleiches Quadrat mithilfe des Kathetensatzes

- Ausgangspunkt Figur zum Kathetensatz
- Rechtecksseiten sind Hypotenuse und Hypotenusenabschnitt
- Quadratseite ist Kathete
- Notwendige Schritte s. Abbildung rechts





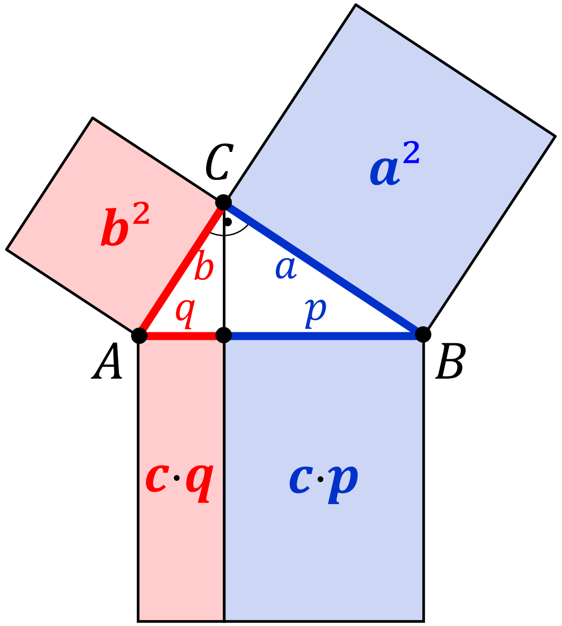
https://www.geogebra.org/m/ZuH6749V

Flächenverwandlung umgekehrt

Verwandlung eines Quadrats in ein inhaltsgleiches Rechteck …

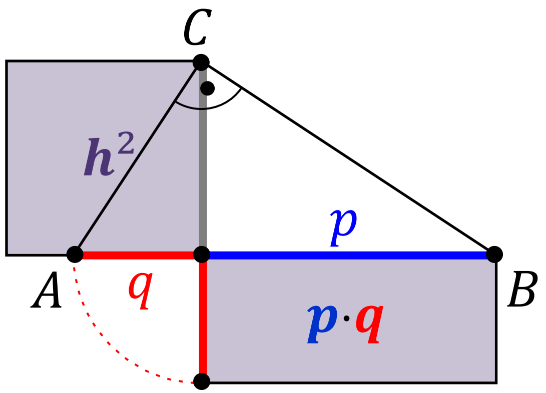
… mithilfe des Kathetensatzes

- wenn eine Seitenlänge des Rechtecks gegeben ist.



… mithilfe des Höhensatzes

- wenn eine Seitenlänge des Rechtecks ODER
- wenn der Umfang des Rechtecks ODER
- wenn die Seitendifferenz gegeben ist.



Kontakt

Dr. Susanne Digel

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

s.digel@rptu.de

dms.nuw.rptu.de

RPTU

Probeklausur

https://ilias-public.uni-landau.de/goto.php?target=tst_264&client_id=ilias

Anmeldung mit Uni-Kennung benötigt:
Diese Einstellung im Klausursystem ist nötig, damit Punkte angezeigt werden können. Die Punkte werden nicht gewertet. Sie können die Probeklausur beliebig oft durchführen.

Handling in der Klausur:
Wenn Sie ein Bild anklicken, wird dieses als Vollbild angezeigt. Um zur Klausuraufgabe zurückzukehren müssen Sie mit dem Cursor an den oberen Rand des Bildschirms gehen, damit Ihnen eine Übersicht der Tabs angezeigt wird. In dieser können Sie dann das Tab mit Bild schließen – die Klausur wird dann nicht geschlossen – und Sie können die Klausuraufgaben weiter bearbeiten.

Tipp zu den Beweisaufgaben:
In den Beweisaufgaben müssen Sie Beweisschritte und deren Begründungen in die korrekte Reihenfolge bringen. Einige Schritte sind als Bilder hinterlegt. Bilder die Begründungen darstellen, sind blau, diejenigen die Beweisschritte darstellen sind schwarz.