Geometrie

Modul 4b

Susanne Digel & Jürgen Roth

26.01.2024

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Geometrie 4b

1. Ideen der Geometrie
2. Kongruenzabbildungen der Ebene
3. Figuren in der Ebene
4. Flächeninhalte
5. Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren
6. Satzgruppe des Pythagoras

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)"
https://roth.tel/geometrie_4b

5

Geometrie 4b

Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren

Probeklausur

https://ilias-public.uni-landau.de/goto.php?target=tst_264&client_id=ilias

Anmeldung mit Uni-Kennung benötigt:
Diese Einstellung im Klausursystem ist nötig, damit Punkte angezeigt werden können.
Die Punkte werden nicht gewertet. Sie können die Probeklausur beliebig oft durchführen.

Handling in der Klausur:
Wenn Sie ein Bild anklicken, wird dieses als Vollbild angezeigt. Um zur Klausuraufgabe zurückzukehren müssen Sie mit dem Cursor an den oberen Rand des Bildschirms gehen, damit Ihnen eine Übersicht der Tabs angezeigt wird. In dieser können Sie dann das Tab mit Bild schließen – die Klausur wird dann nicht geschlossen – und Sie können die Klausuraufgaben weiter bearbeiten.

Tipp zu den Beweisaufgaben:
In den Beweisaufgaben müssen Sie Beweisschritte und deren Begründungen in die korrekte Reihenfolge bringen. Einige Schritte sind als Bilder hinterlegt. Bilder die Begründungen darstellen, sind blau, diejenigen die Beweisschritte darstellen sind schwarz.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

5 Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

5 Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

Streckenverhältnisse

(1) Maßstab

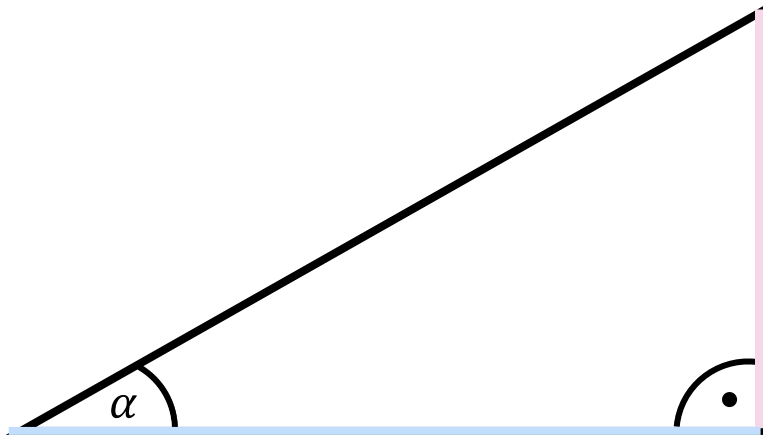
- Reine Verhältniszahl $Maßstabsfaktor\ f = \frac{Bildlänge}{Originallänge}$
- Bsp.: Maßstab $1{:}\,100.000$

$$Maßstabsfaktor\ f = \frac{1\ cm}{1\ km} = \frac{1}{100.000} = 1{:}\,100.000$$

(2) Steigung einer Strecke

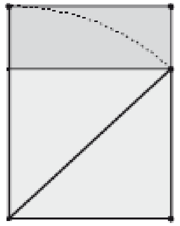
- Reine Verhältniszahl $Steigung = \frac{Höhenzunahme}{waagerechte\ Entfernung}$
- Häufiger Irrtum:
  gefahrene Strecke statt waagerechte Entfernung
- Bezug zu Steigungswinkel:

$$Steigung = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \tan\alpha$$



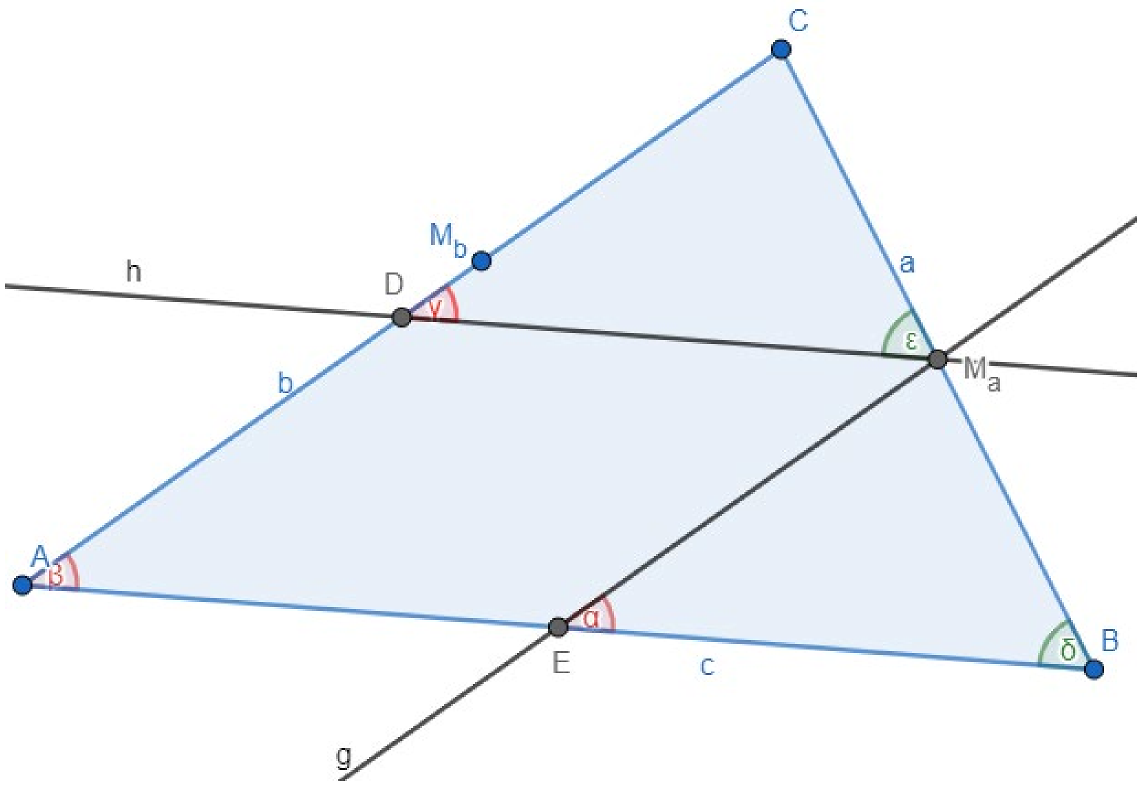
Freiwillige Übung
Falten Sie ein A4-Blatt, so dass ein Quadrat entsteht. Falten Sie es wieder auf und zeichnen Sie dann mit dem Zirkel einen Kreisbogen mit einer Ecke des Quadrats (und des Blatts) als Mittelpunkt und der Diagonale des Quadrats als Radius. Begründen Sie an dieser Figur anschaulich das Seitenverhältnis der DIN-Formate.

DIN-Verhältnis: Wurzel(2):1



Dreiecksmitten

Satz 5.1 von der Mittelparallele im Dreieck
Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten eines Dreiecks ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.



Beweis:

Idee: Zeichne Parallelen zu b und c durch M_a
Voraussetzung: (1) $\overline{BM_a} = \overline{M_aC}$
(2) $g \parallel b$ und $h \parallel c$
Zu zeigen: $\overline{AD} = \overline{DC}$ und $2 \cdot \overline{DM_a} = \overline{AB}$

$\alpha = \gamma$ und $\beta = \gamma$ und $\delta = \varepsilon$ (Vor. 2, StW Satz 3.2)
→ $\measuredangle DCM_a = \measuredangle EM_aB$ (WSD Satz 3.3)
Mit Vor. (1) → $\Delta EM_aB \cong \Delta DM_aC$ (WSW)
→ $\overline{EB} = \overline{DM_a}$ und $\overline{DC} = \overline{EM_a}$

Aus Vor. 2 folgt $\overline{DM_a} = \overline{AE}$ und $\overline{EM_a} = \overline{AD}$
(*Hilfssatz: im Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang)

→ $\overline{EB} = \overline{DM_a} = \overline{AE}$ und $\overline{DC} = \overline{EM_a} = \overline{AD}$
Damit ist D *identisch mit* M_b und E *identisch mit* M_c q.e.d

*Bisher nicht bewiesen! – Vor.: $\overline{AE} \parallel \overline{DM_a}$ und $\overline{AD} \parallel \overline{EM_a}$ zu zeigen: $\overline{AE} = \overline{DM_a}$ und $\overline{AD} = \overline{EM_a}$
Idee: Diagonale einzeichnen, WSD, WW, StW und WSW

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

5 Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren

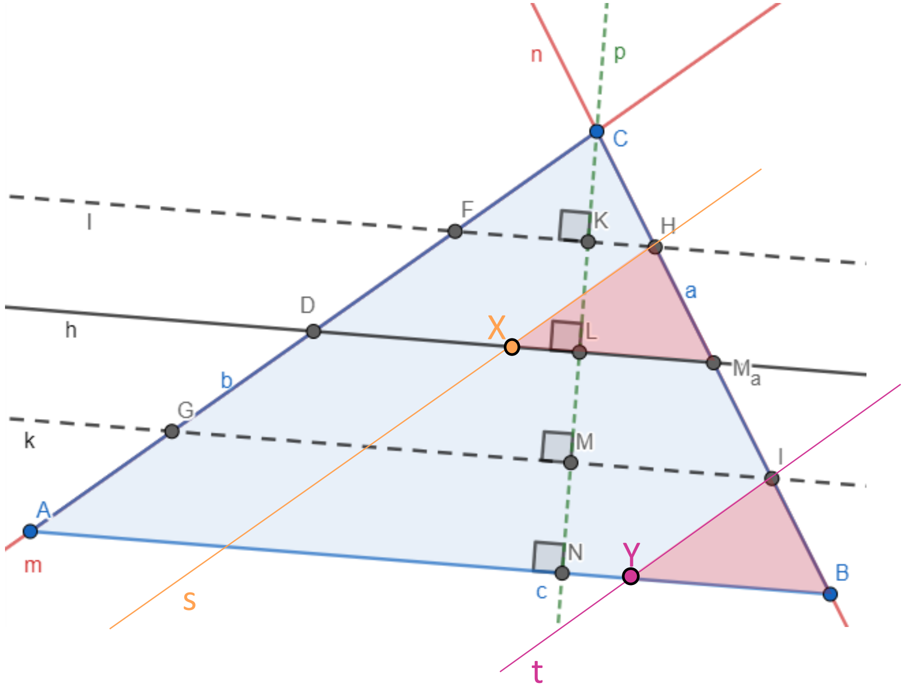
GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

Projektionssatz

Idee:
Iterativ den Satz von der Mittenparallelen auf Teildreiecke angewendet erzeugt immer weitere äquidistante Parallelenscharen



Satz 5.2 Projektionssatz
Erzeugt eine Parallelenschar auf einer schneidenden Geraden gleichlange Abschnitte, dann erzeugt sie gleichlange Abschnitte auf allen schneidenden Geraden. Insbesondere sind die Parallelen äquidistant.

Beweisidee:
Voraussetzung: Auf der Geraden n sind die Parallelenschnittpunkte äquidistant.

$$\overline{CH} = \overline{HM_a} = \overline{M_aI} = \overline{IB} \ \ldots$$

Zu zeigen: Auf der Geraden m sind die Parallelenschnittpunkte äquidistant.

Zeichne Parallele s zu m durch Punkt H. Diese schneidet h in Punkt X.
Zeichne Parallele t zu m durch Punkt I. Diese schneidet c in Punkt Y.

Zeige Kongruenz der Dreiecke ΔHM_aX und ΔIBY mit WSW
(StW Satz 3.2, Vor. , StW Satz 3.2)
→ $\overline{YI} = \overline{XH}$

Mit Hilfssatz gilt dann auch $\overline{AG} = \overline{YI}$ und $\overline{XH} = \overline{DF}$ (Parallelogramme)
→ $\overline{AG} = \overline{YI} = \overline{XH} = \overline{DF}$

Spezialfall Gerade p liefert Äquidistanz der Parallelen (Def. Abstand von Geraden)

Streckeneinteilung

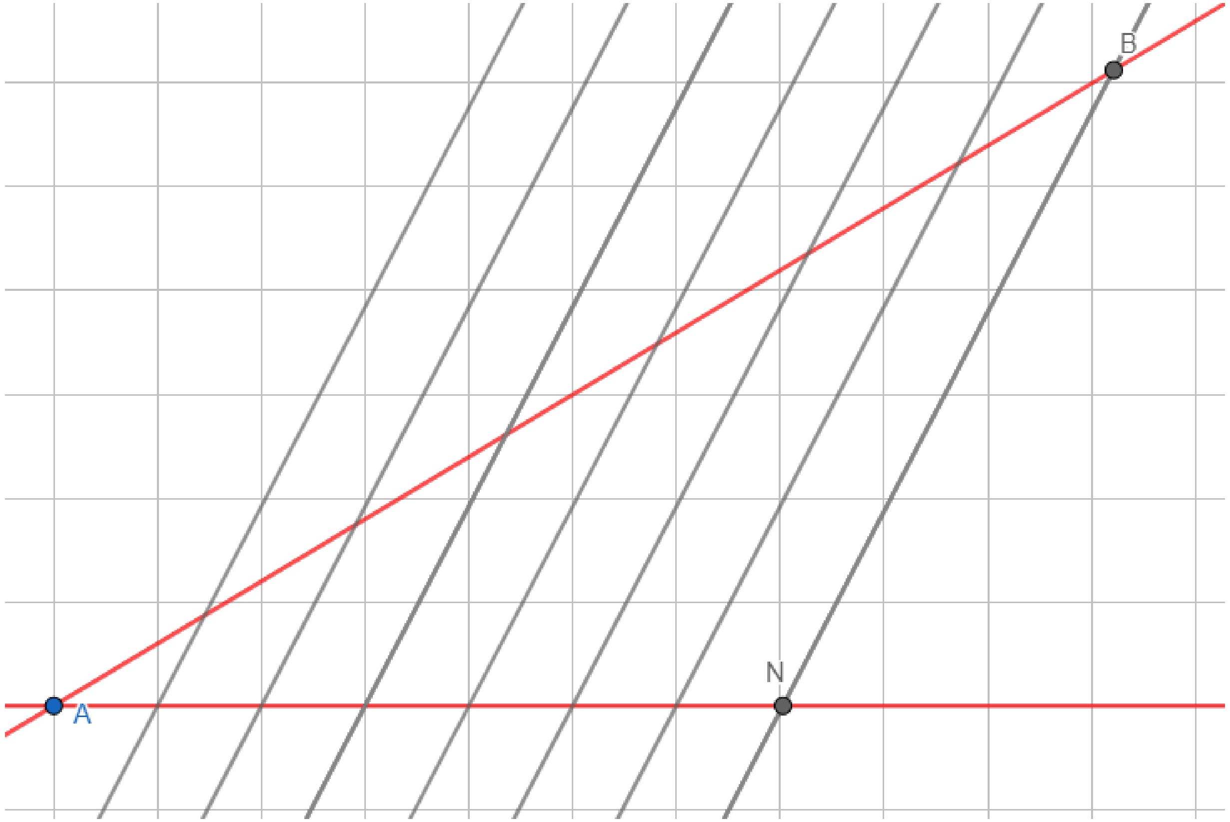
Anwendung des Projektionssatzes

Teilen Sie eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ in n gleichlange Teilstrecken!

1. *Strecke AB sei gegeben*
2. *Gerade g durch A zeichnen (beliebige Lage)*
3. *Von A aus an Gerade g n-mal eine beliebige Länge abtragen ergibt Punkte A_1 bis A_n= Endpunkt N*
4. *Gerade h durch N und B zeichnen*
5. *Parallelen zu h_i durch A_i zeichnen*
6. *Parallelen h_i teilen Strecke AB in n gleichlange Teilstrecken*

Präsenzauftrag

Führen Sie die Streckeneinteilung an einem selbstgewählten Zahlenbeispiel durch und notieren Sie die notwendigen Schritte.

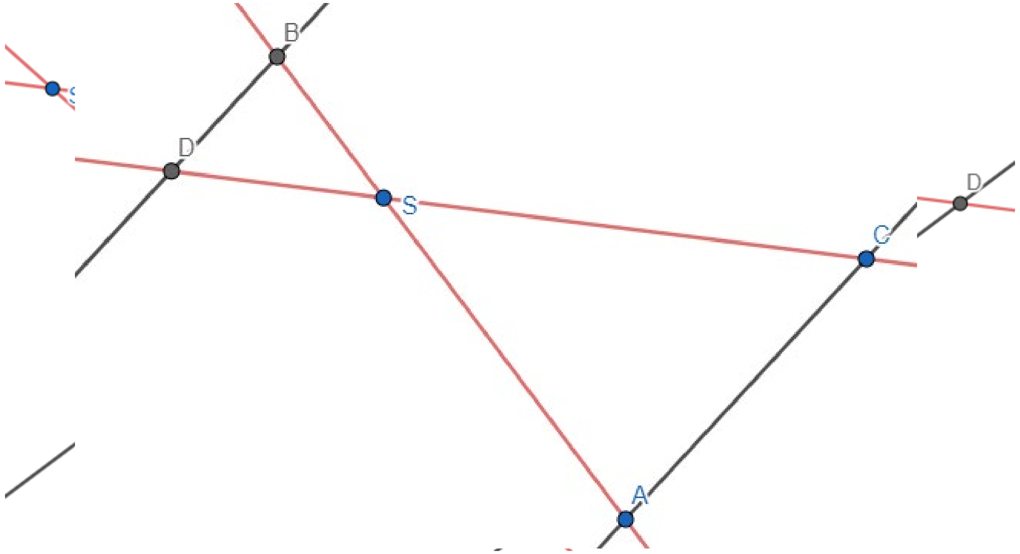


Strahlensätze

Satz 5.3 – 1. Strahlensatz

Werden zwei sich schneidende Geraden (Schnittpunkt S) von zwei Parallelen geschnitten (Schnittpunkte $A, B, C, D \text{ mit } \overline{AC} \parallel \overline{BD}$), so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden:

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} \text{ bzw. } \frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$$



Beweisidee:

Einbetten der Strahlensatzfigur in eine Schar äquidistanter Parallelen. Dann folgt der erste Strahlensatz automatisch aus Satz 5.2.

Problem:

Gibt es für beliebige Einteilungen der Geraden eine solche Schar äquidistanter Parallelen?

→ Gemeinsames „Maß“ benötigt für $(\text{o. B. d. A.})\ \overline{SA} \text{ und } \overline{SB}$,
um die beiden Strecken zu unterteilen
und äquidistante Parallelen zu errichten

Inkommensurabel

Erinnerung Rechteckflächeninhalt
Lösung: Intervallschachtelung

Weiteres Problem:

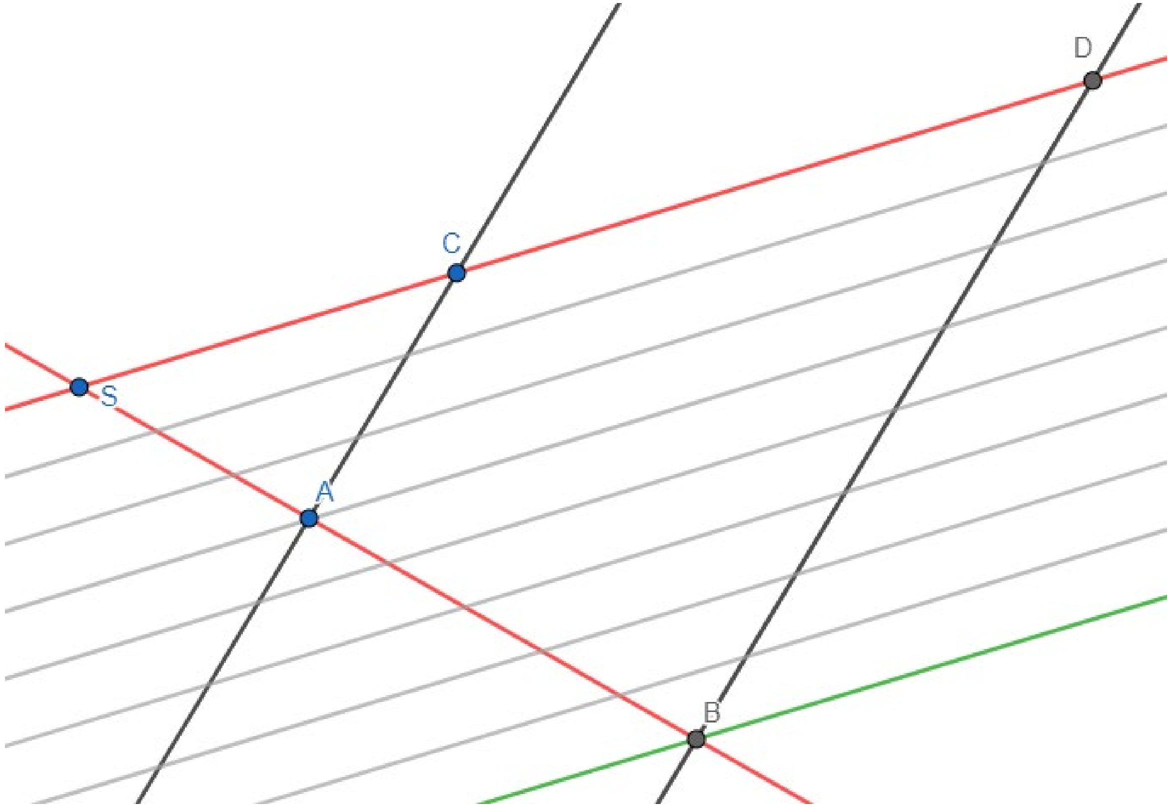
Strahlensatz ←→ sich schneidende Geraden
Idee: Punktspiegelung

Strahlensätze

Satz 5.4 – 2. Strahlensatz

Werden zwei sich schneidende Geraden (Schnittpunkt S) von zwei Parallelen geschnitten (Schnittpunkte A, B, C, D mit $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$), so verhalten sich die vom Schnittpunkt aus gemessenen Abschnitte auf einer Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf den Parallelen:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$$



Beweisidee:

Parallele zu $\overline{SD}$ durch B einzeichnen.
Einbetten der Strahlensatzfigur in eine Schar äquidistanter Parallelen.
Dann folgt der zweite Strahlensatz analog zum ersten aus Satz 5.2.

Übungsblatt 6
Umkehrung von Satz 5.3 und 5.4

Anwendungen der Strahlensätze

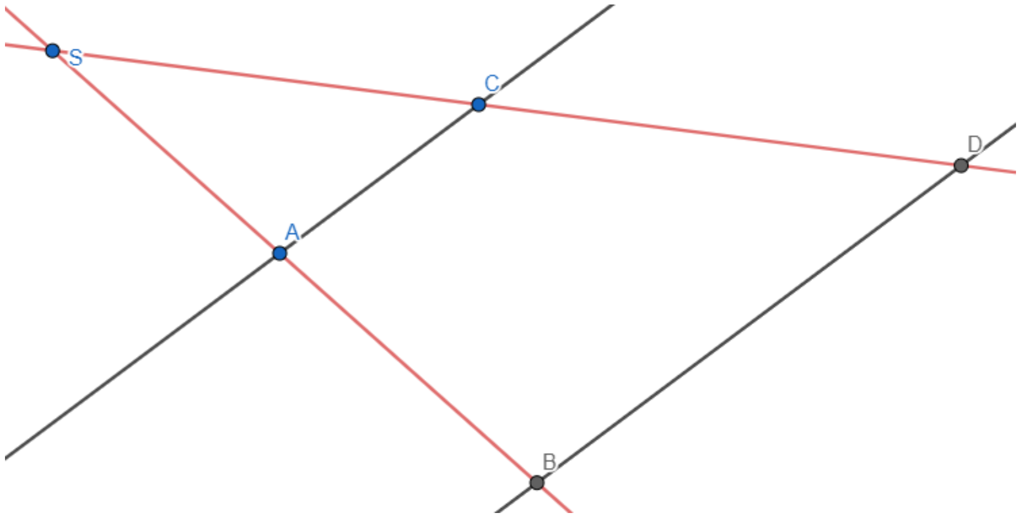
Konstruktion von Streckenlängen

Mithilfe der Strahlensätze lassen sich zu gegebenen Streckenlängen a und b durch geschicktes Zuordnen der Längen $1, a$ und b zu der Strahlensatzfigur folgende Streckenlängen konstruieren (Zirkel, Lineal):

a) Produkt $a \cdot b$

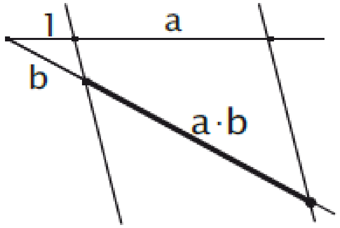
b) Quotient $\frac{a}{b}$

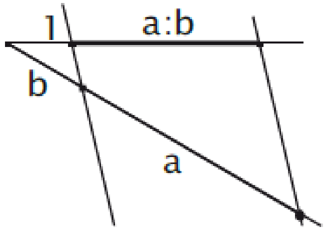
c) Kehrwert $\frac{1}{a}$

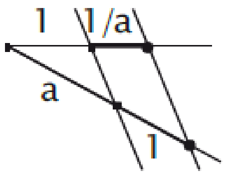


Präsenzauftrag

Wählen Sie eine der Optionen oben aus und konstruieren Sie die gesuchte Streckenlänge. Abtragen dürfen Sie lediglich die Streckenlängen $1, a$ und b.





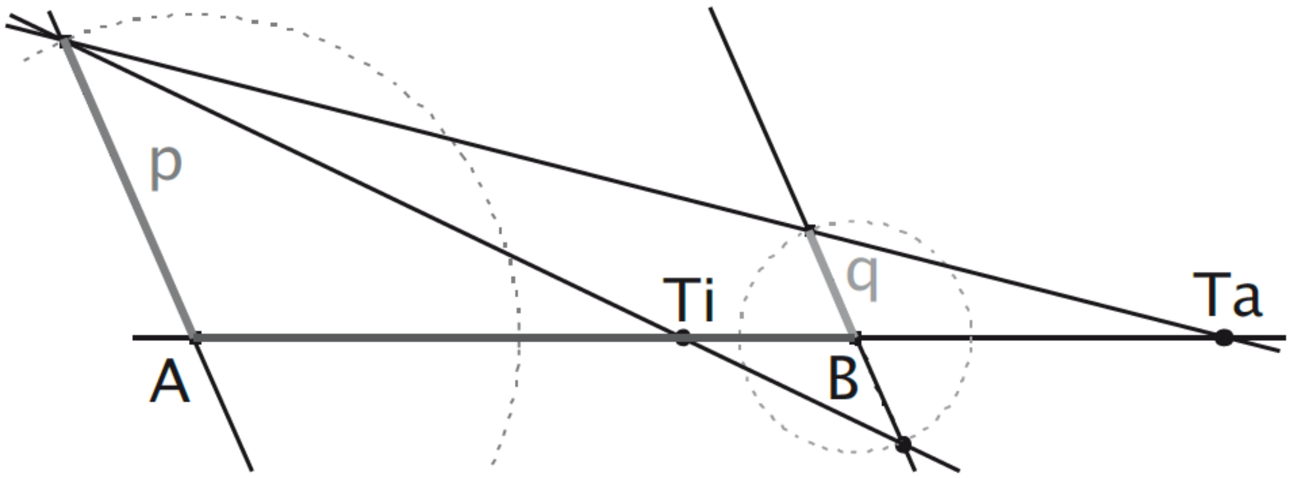


Anwendungen der Strahlensätze II

Harmonische Teilung einer Strecke

Mithilfe der Strahlensätze lässt sich auch eine gegebene Streckenlänge $\overline{AB}$ in einem vorgegebenen Verhältnis $p : q$ harmonisch teilen und zwar mithilfe eines inneren und eines äußeren Teilpunkts.

- Innerer Teilpunkt $\frac{\overline{AT_i}}{\overline{BT_i}} = \frac{p}{q}$
- Äußerer Teilpunkt $\frac{\overline{AT_a}}{\overline{BT_a}} = \frac{p}{q}$



Präsenzauftrag

Identifizieren Sie die Strahlensatzfiguren in der rechts dargestellten Lösungsfigur zur harmonischen Teilung und erklären Sie die Lösung.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

5 Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

Rückblick Kap.2: Abbildung

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Definition 2.1

Eine **Funktion** oder **Abbildung** $f: A \to B$ von einer Menge *A* auf die Menge *B* ist eine Zuordnung, die jedem Element von A genau ein Element von B zuordnet.

Abbildungen der Ebene ε auf sich

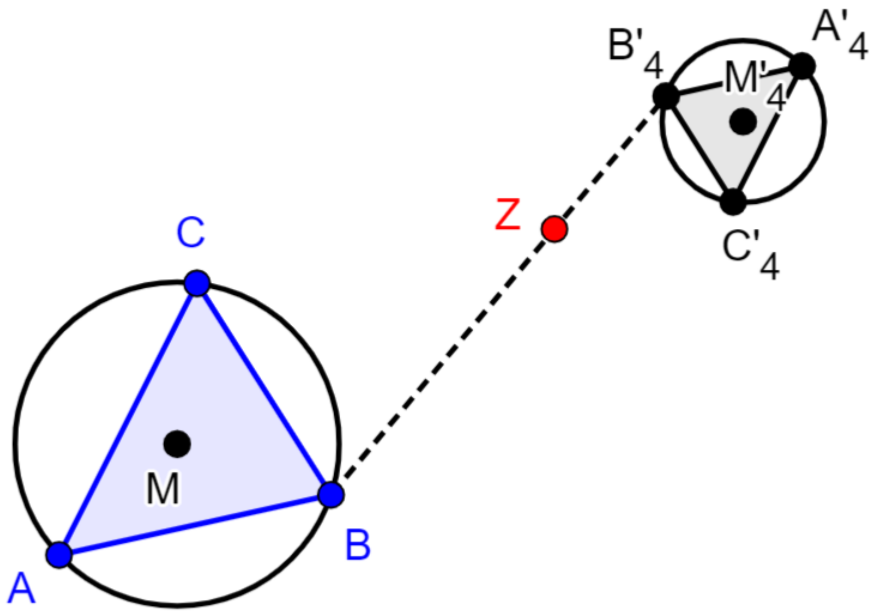
- In der ebenen Geometrie beschäftigen wir uns mit Abbildungen φ der (Zeichen-)Ebene ε auf sich selbst.
- Eine solche Abbildung φ ordnet jedem Punkt P der Ebene ε genau einen Bildpunkt $P' = \varphi(P)$ zu.
  $$\varphi: \varepsilon \to \varepsilon, P \mapsto \varphi(P) = P'$$
- Machen Sie sich klar, dass eine solche Abbildung φ die gesamte Ebene ε auf sich selbst abbildet. Damit hat – bezüglich φ – jeder Punkt P der Ebene ε eine Doppelrolle: Er ist sowohl ein Originalpunkt als auch ein Bildpunkt.
- Wir werden uns auf Abbildungen beschränken, die **bijektiv** sind, für die also gilt, dass jeder Original-punkt einen eindeutig bestimmten Bildpunkt besitzt und umgekehrt jeder Bildpunkt auch einen eindeutig bestimmten Originalpunkt.

Rückblick Kap.2: Beispiele für Abbildungen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Zentrische Streckung $Z_{Z,k}$ der Ebene um das Streckungszentrum Z und mit Streckungsfaktor $k = -0{,}5$.

3



1 2 3 4

Beantworten Sie die folgenden Fragen für jede der vier Abbildungen

(1) **W**elche geometrischen Eigenschaften der Figuren (Längen, Winkelgrößen, Flächeninhalte, Geradlinigkeit, …) bleiben bei der Abbildung erhalten und welche ändern sich?

(2) **G**ibt es Punkte, sogenannte Fixpunkte, die bei der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden? Welche sind es?

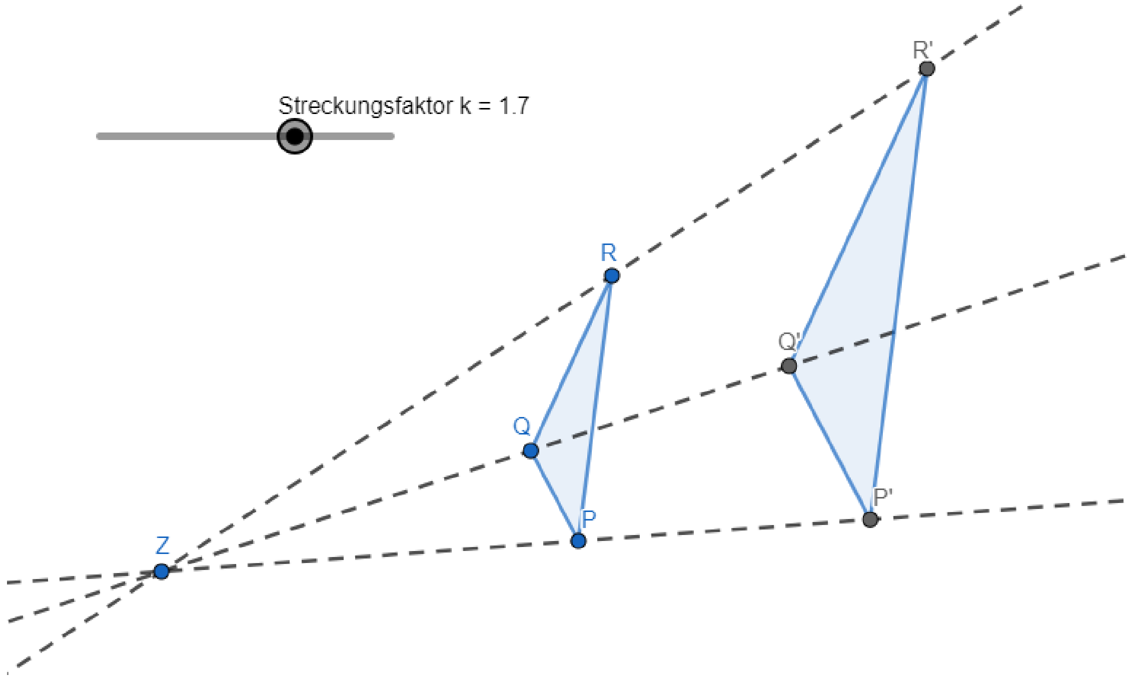
(3) **I**st die Bildfigur zur Originalfigur deckungsgleich (kongruent)?

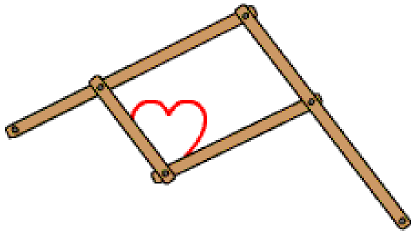
Zentrische Streckung $Z_{Z,k}$

Definition 5.1

Eine Abbildung $Z_{Z,k}$ der Ebene ε auf sich heißt **zentrische Streckung** mit dem **Zentrum** Z und dem **Streckungsfaktor** $k \in \mathbb{R}^{\setminus\{0\}}$ genau dann, wenn gilt:

- Jeder Punkt P liegt mit dem Zentrum Z und seinem Bildpunkt $P' = Z_{Z,k}(P)$ auf einer Geraden.
- Für die Vektoren $\overrightarrow{ZP}$ und $\overrightarrow{ZP'}$ gilt: $\overrightarrow{ZP} = k \cdot \overrightarrow{Z'P'}$





Bildquelle: wikipedia

Bemerkung:

Das Bild $P' = Z_{Z,k}(P)$ von P wird konstruiert, indem man auf der Geraden ZP von Z aus die $|k|$-fache Länge der Strecke $\overline{ZP}$ abträgt, für $k > 0$ auf der Halbgeraden, auf der P liegt, für $k < 0$ auf der entgegengesetzten Halbgeraden.

https://www.geogebra.org/m/drka6tpk

Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$

Satz 5.5: Eigenschaften der zentrischen Streckung

a) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ bildet jeden Vektor $\overrightarrow{AB}$ so auf den Vektor $\overrightarrow{A'B'}$ ab, dass gilt $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ bildet jede Gerade g auf eine dazu parallele Gerade g‘ ab.

c) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ ist geradentreu, d.h. sind P, Q, R kollinear dann sind ihre Bilder $P‘, Q‘, R‘$ ebenfalls kollinear.

d) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ ist winkel(maß)treu, d.h. es gilt $\measuredangle PQR = \measuredangle P‘Q‘R‘$.

e) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ ist streckenverhältnistreu, d. h. für beliebige Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$ ihre Bilder $\overline{A'B'}$ und $\overline{P'Q'}$ gilt stets $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{PQ}|} = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{P'Q'}|}$ und $\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = |k|$.

f) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ ist flächenverhältnistreu und es gilt $F(Z_{Z,k}(Polygon)) = k^2 \cdot F(Polygon)$.

g) Die Abbildung $Z_{Z,k}$ ist volumenverhältnistreu und es gilt $V(Z_{Z,k}(Polyeder) = |k|^3 \cdot V(Polyeder)$.

Beweise zu Satz 5.5

Beweis zu b)

Voraussetzung: (1) P, Q auf g

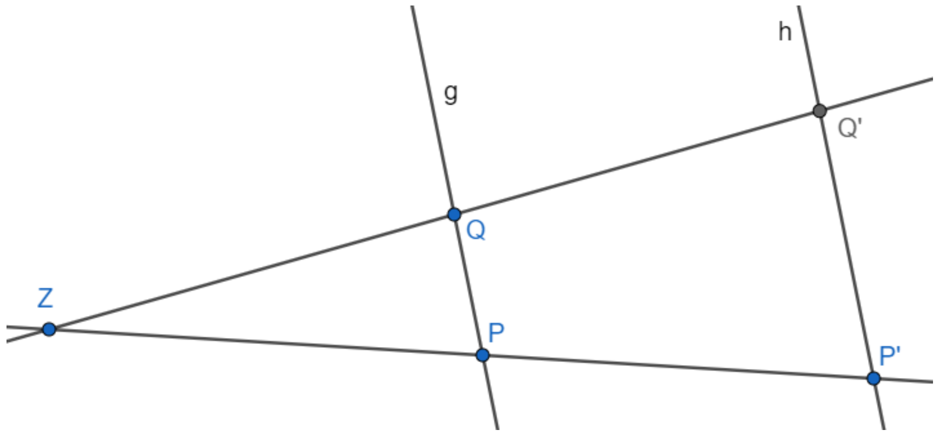
(2) P', Q' auf h

Zu zeigen: $g \parallel h$

$\frac{|\overline{ZQ'}|}{|\overline{ZQ}|} = \frac{|\overline{ZP'}|}{|\overline{ZP}|} = |k|$ (Def. 5.1)

→ $g \parallel h$ (Umkehrung Satz 5.3)

q.e.d.



Beweis zu e) streckenverhältnistreu

Voraussetzung: $\frac{|\overline{ZQ'}|}{|\overline{ZQ}|} = \frac{|\overline{ZP'}|}{|\overline{ZP}|} = |k| = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$

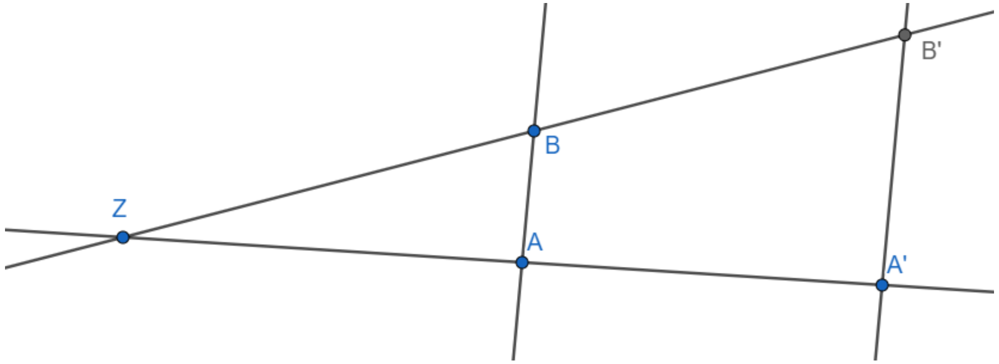
Zu zeigen: $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{PQ}|} = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{P'Q'}|}$ und $\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = |k|$

$\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|}$ (Satz 5.4)

$\frac{|\overline{ZP'}|}{|\overline{ZP}|} = \frac{|\overline{P'Q'}|}{|\overline{PQ}|}$ (Satz 5.4)

→ $\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = |k| = \frac{|\overline{ZP'}|}{|\overline{ZP}|} = \frac{|\overline{P'Q'}|}{|\overline{PQ}|}$ (Vor.)

→ $\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{P'Q'}|}{|\overline{PQ}|} \Leftrightarrow \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{P'Q'}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{PQ}|}$ q.e.d.



Beweise zu Satz 5.5

Beweis zu f)

Idee: Da jedes (einfach zusammenhängende) Polygon trianguliert werden kann, genügt es den Satz für Dreiecke zu beweisen.

Voraussetzung: $F(\Delta PQR) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ (nach Satz 4.7)

Zu zeigen: $F(\Delta P'Q'R') = k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

$h' = |k| \cdot h$ und $g' = |k| \cdot g$ (Satz 5.5 e)

→ $F(\Delta P'Q'R') = \frac{1}{2} \cdot g' \cdot h' = \frac{1}{2} \cdot |k| \cdot g \cdot |k| \cdot h$ (Satz 4.7) q.e.d.

Beweis zu g) analog

Beweis zu d) winkel(maß)treu

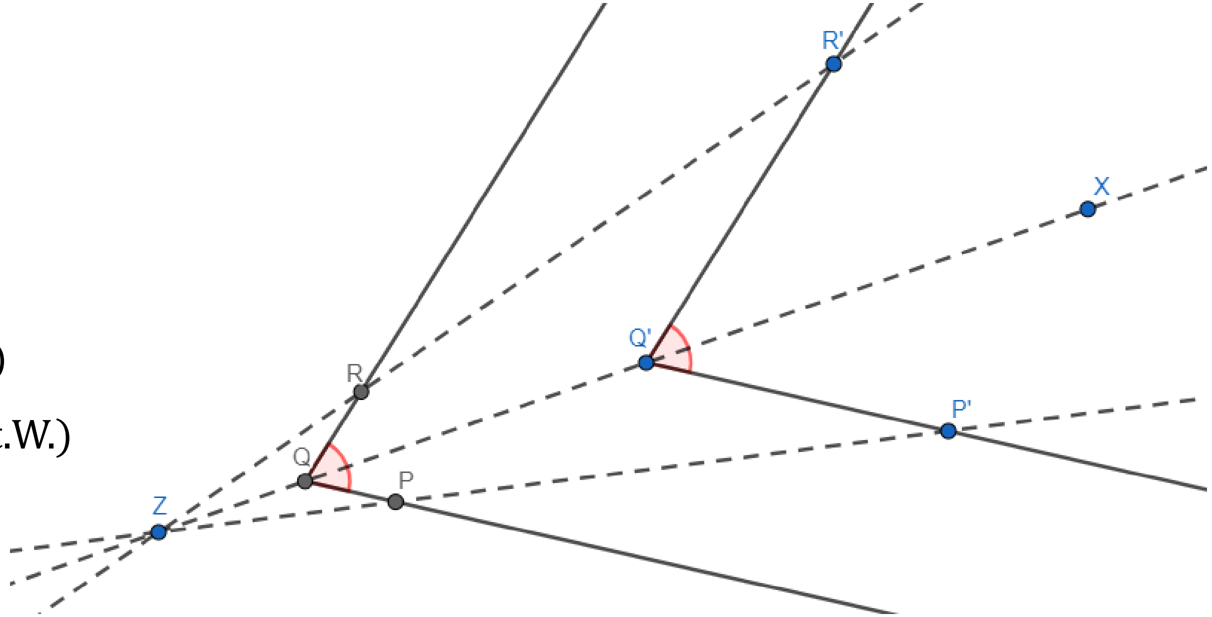
Voraussetzung: P', Q', R' sind Bilder von P, Q, R

Zu zeigen: $\measuredangle PQR = \measuredangle P'Q'R'$

$\overline{PQ} \parallel \overline{P'Q'}$ und $\overline{QR} \parallel \overline{Q'R'}$ (Satz 5.5 b)

→ $\measuredangle PQQ' = \measuredangle P'Q'X$ und $\measuredangle Q'QR = \measuredangle XQ'R'$ (Satz 3.2 St.W.)

→ $\measuredangle PQR = \measuredangle P'Q'R'$ q.e.d.



Beweise zu Satz 5.5

Beweis zu c)

Voraussetzung: P, Q, R auf g

Zu zeigen: P', Q', R' auf h

Fallunterscheidung:

1. Fall: $Z \in g$

   → P, Q, R, Z, P', Q', R' liegen auf einer Geraden (Vor., Def. 5.1)

2. Fall: $Z \notin g$

   Idee: zeichne Parallele h zu g durch P'

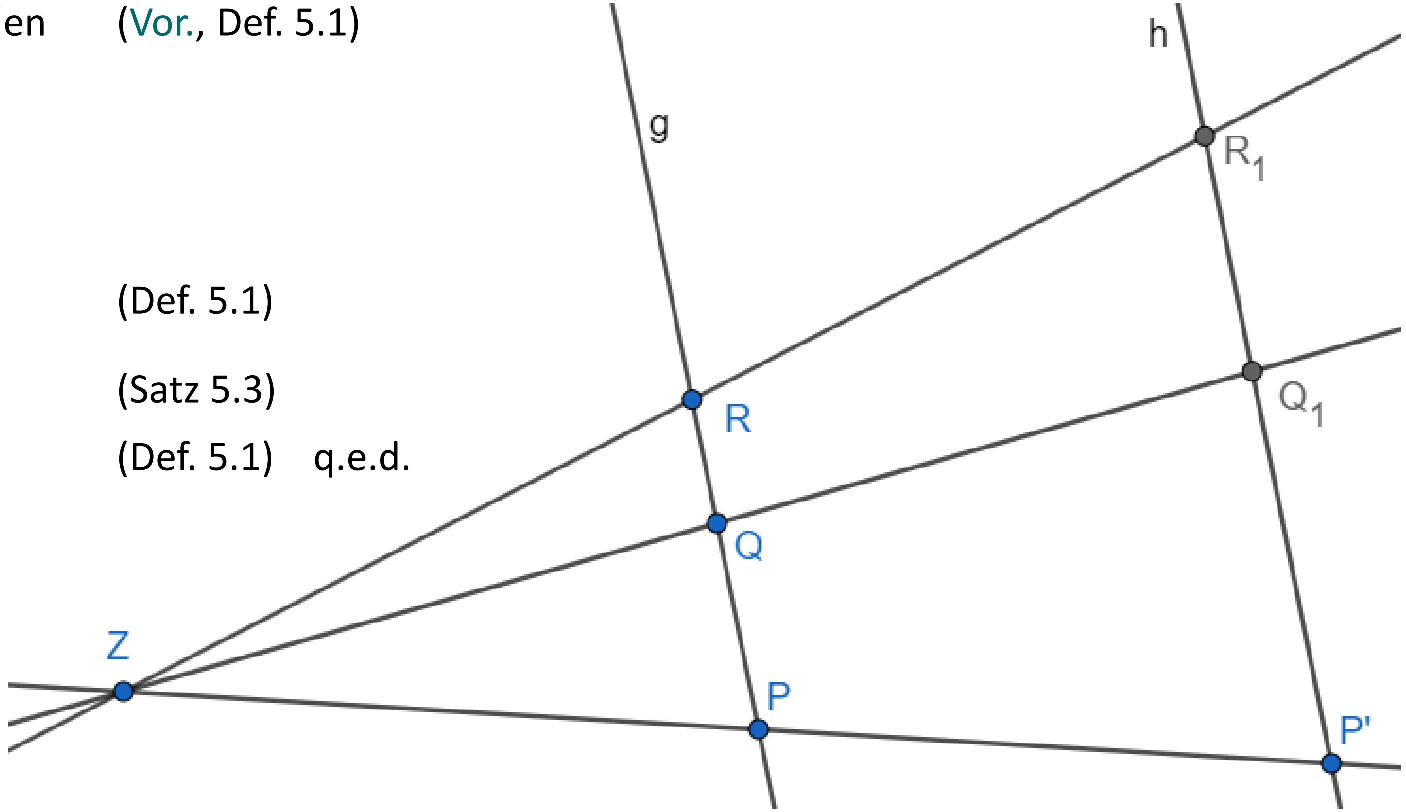
   h schneidet Gerade durch Z und Q in Q_1

   h schneidet Gerade durch Z und R in R_1

   $\frac{|\overline{ZP'}|}{|\overline{ZP}|} = |k|$ (Def. 5.1)

   $\frac{|\overline{ZQ_1}|}{|\overline{ZQ}|} = \frac{|\overline{ZR_1}|}{|\overline{ZR}|} = \frac{|\overline{ZP'}|}{|\overline{ZP}|} = |k|$ (Satz 5.3)

   → $Z_{Z,k}(Q) = Q_1$ und $Z_{Z,k}(R) = R_1$ (Def. 5.1) q.e.d.



Anwendung und weitere Eigenschaften

Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$

(außer $k = 1$ Identität und $k = -1$ Punktspiegelung)

- **Bijektivität:**
  Verschiedene Urbilder haben verschiedene Bilder und jeder Punkt der Ebene besitzt ein Urbild.
- **Geradentreu:** ja
- **Längentreu:** nein
- **Inverses:** Die zu $z_{Z,k}$ inverse Abbildung ist eine zentrische Streckung mit demselben Zentrum und dem Streckungsfaktor $\frac{1}{k}$.
- **Fixpunkt, Fixgeraden und Fixrichtung:**
  - Das Zentrum Z ist der einzige Fixpunkt.
  - Jede Gerade durch das Zentrum Z ist eine Fixgerade. Andere Fixgeraden gibt es nicht.
  - Jede Gerade wird auf eine dazu parallele Gerade abgebildet. $\Rightarrow$ Alle Richtungen sind Fixrichtungen.

Anwendung: Ähnlichkeitskonstruktion
Man konstruiert zunächst eine zur Lösung ähnliche Figur (mit der „Form“ der Lösung). Durch anschließende zentrische Streckung „streckt“ man die Figur danach auf die richtige Größe.

Präsenzübung:
Konstruieren Sie in GeoGebra ein Dreieck mit dem Seitenverhältnis $a:b:c = 5:6:7$ und dem Umkreisradius $r = 5$ cm.

Bsp.: https://www.geogebra.org/m/ru955bzr
Ecke A ist auch Zentrum der zentr. Streckung

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

5 Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

Abbildungen

Definition 5.2

a) Eine Abbildung der Ebene ε auf sich, die bijektiv und geradentreu ist, heißt **Kollineation**.

b) Eine Kollineation, die jede Gerade auf eine parallele Bildgerade abbildet, heißt **Dilatation**.

Achtung! Die besondere Eigenschaft der Dilatation ist NICHT gleich der Parallelentreue!

Satz 5.6: Jede Kollineation ist parallelentreu.

Präsenzübung

Tragen Sie die bisher in der Vorlesung thematisierten Abbildungen der Ebene ε auf sich und deren Eigenschaften in einer Tabelle zusammen.

Fügen Sie eine weitere Spalte an, in der Sie angeben, ob die jeweilige Abbildung eine Kollineation, eine Dilatation oder weder noch ist.

Eigenschaften von bisherigen Abbildungen der Ebene ε auf sich selbst

- Bijektivität
- Geradentreue
- Fixpunkte
- Fixgeraden
- Fixrichtungen
- Parallelentreue
- Winkeltreue
- Längentreue
- Orientierungstreue

Ähnlichkeitsabbildungen

Definition 5.3

a) Eine **Ähnlichkeitsabbildung** ist die Verkettung einer endlichen Anzahl von zentrischen Streckungen mit einer endlichen Anzahl von Kongruenzabbildungen.

b) Eine Figur F ist genau dann **ähnlich** zu einer Figur G, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung φ gibt, die F auf G abbildet.

Satz 5.7

a) Jede Ähnlichkeitsabbildung lässt sich als Verkettung **einer** zentrischen Streckung und **einer** Kongruenzabbildung darstellen.

b) Ähnlichkeitsabbildungen sind geradentreu, winkel(maß)treu, parallelentreu und streckenverhältnistreu.

Typen von Abbildungen der Ebene ε auf sich selbst

- Kongruenzabbildungen
  - Achsenspiegelung
  - Drehung
    - Punktspiegelung
  - Verschiebung
  - Schubspiegelung

Kollineationen

Dilatationen

- Ähnlichkeitsabbildungen
  - Zentrische Streckung

Ähnlichkeitssätze

Satz 5.8 – Ähnlichkeitssatz WW für Dreiecke

Sind zwei Winkel eines Dreiecks kongruent zu den entsprechenden Winkeln eines anderen Dreiecks, dann sind die Dreiecke ähnlich.

Satz 5.9 – Ähnlichkeitssatz Seitenverhältnis für Dreiecke

Stimmen zwei Dreiecke in den Verhältnissen der drei Seitenlängen überein, dann sind die Dreiecke ähnlich.

Präsenzübung

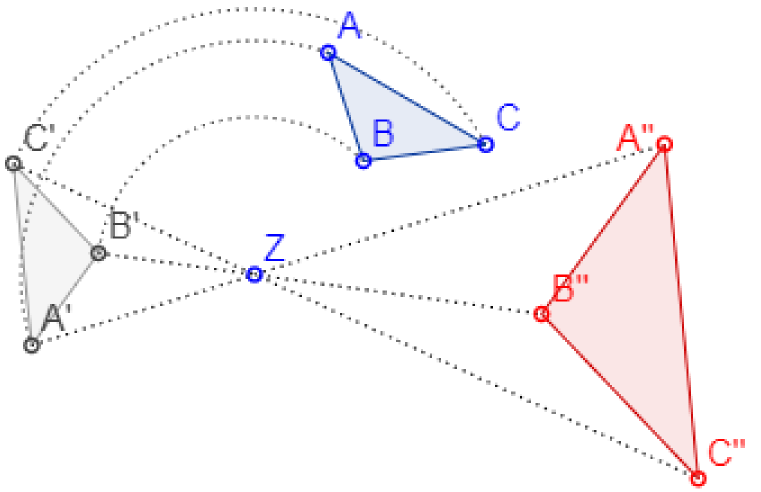
Formulieren Sie Ähnlichkeitssätze für gleichschenklige Dreiecke, gleichseitige Dreiecke, rechtwinklige Dreiecke und rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke.

Typen von Ähnlichkeitsabbildungen

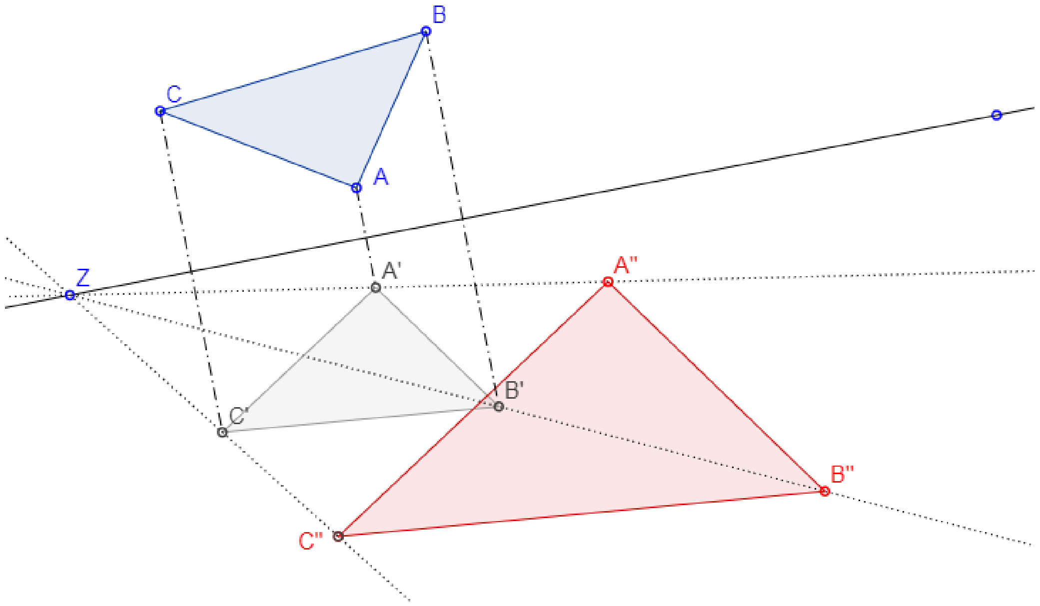
Definition 5.4

a) Eine **Drehstreckung** ist die Verkettung einer zentrischen Streckung und einer Drehung mit demselben Zentrum Z: $D_{Z,\alpha,k} := D_{Z,\alpha} \circ Z_{Z,k}$.

b) Eine **Klappstreckung** (Streckspiegelung) ist die Verkettung einer zentrischen Streckung und einer Achsenspiegelung, deren Achse g durch das Zentrum Z verläuft: $K_{Z,k,g} := S_g \circ Z_{Z,k}$.



https://www.geogebra.org/m/T8cH2kpl



https://www.geogebra.org/m/AZBvPPTJ

Typen von Ähnlichkeitsabbildungen

Definition 5.4

a) Eine **Drehstreckung** ist die Verkettung einer zentrischen Streckung und einer Drehung mit demselben Zentrum Z: $D_{Z,\alpha,k} := D_{Z,\alpha} \circ Z_{Z,k}$.

b) Eine **Klappstreckung** (Streckspiegelung) ist die Verkettung einer zentrischen Streckung und einer Achsenspiegelung, deren Achse g durch das Zentrum Z verläuft: $K_{Z,k,g} := S_g \circ Z_{Z,k}$.

Satz 5.10

a) Bei einer Drehstreckung sind die zentrische Streckung und die Drehung miteinander vertauschbar:
$D_{Z,\alpha,k} = D_{Z,\alpha} \circ Z_{Z,k} = Z_{Z,k} \circ D_{Z,\alpha}$.

b) Bei einer Klappstreckung sind die zentrische Streckung und die Achsenspiegelung miteinander vertauschbar:
$K_{Z,k,g} = S_g \circ Z_{Z,k} = Z_{Z,k} \circ S_g$.

Typen von Abbildungen der Ebene ε auf sich selbst

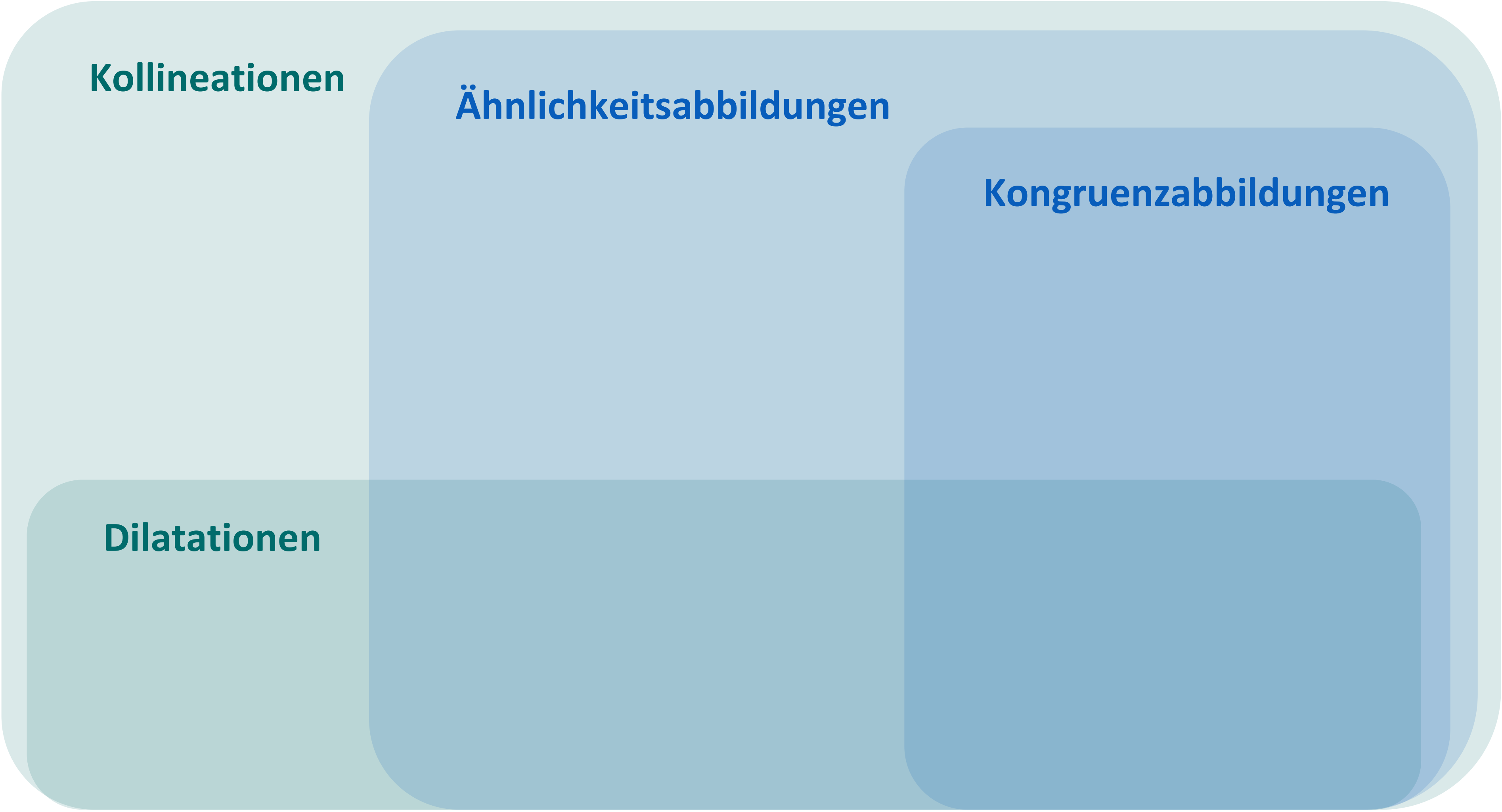
- Kongruenzabbildungen
  - Achsenspiegelung
  - Drehung
    - Punktspiegelung
  - Verschiebung
  - Schubspiegelung

Kollineationen

Dilatationen

- Ähnlichkeitsabbildungen
  - Zentrische Streckung
  - Drehstreckung
  - Klappstreckung

Abbildungen ordnen



Klapp-streckungen

Dreh-streckungen

Zentr. Streckungen

Ver-schiebungen

Drehungen

Achsen-spiegelungen

Schub-spiegelungen

Punkt-spiegelungen

Abbildungen ordnen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Kollineationen

Scherung

Ähnlichkeitsabbildungen

Klapp-
streckungen

Dreh-
streckungen

Kongruenzabbildungen

Schub-
spiegelungen

Drehungen

Achsen-
spiegelungen

Dilatationen

Zentr.
Streckungen

Punkt-
spiegelungen

Ver-
schiebungen

Übung
Machen Sie sich anhand der Eigenschaften die Ordnung klar.

https://www.geogebra.org/m/gbcvky3y

Kontakt

Dr. Susanne Digel

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

s.digel@rptu.de

dms.nuw.rptu.de

RPTU