Geometrie

Modul 4b

Susanne Digel & Jürgen Roth

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

11.01.2024

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Geometrie 4b

1. Ideen der Geometrie
2. Kongruenzabbildungen der Ebene
3. Figuren in der Ebene
4. Flächeninhalte
5. Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren
6. Satzgruppe des Pythagoras

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

4

Geometrie 4b

Flächeninhalte

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

4 Flächeninhalte

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

4 Flächeninhalte

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

Flächeninhalt als reelle Maßfunktion

Definition 4.1

Sei $\mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte der reellen Ebene. Betrachte bestimmte Teilmengen dieser Ebene, die Polygone.

Die Funktion F, die jedem Polygon einen reellen Zahlenwert als Flächenmaßzahl zuordnet, heißt **Flächenfunktion**.

Sie muss folgende Forderungen erfüllen:

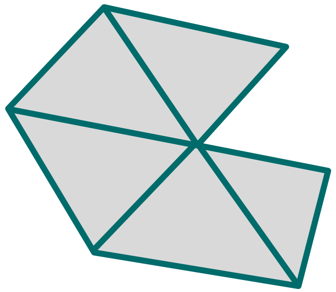
(M1) Nichtnegativität: Für jedes Polynom A gilt $F(A) \geq 0$.

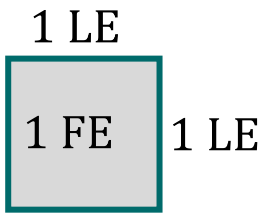
(M2) Additivität: Für alle Polygone A, B gilt:
Wenn A und B keine inneren Punkte gemeinsam haben (also höchstens Randpunkte), dann gilt: $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$

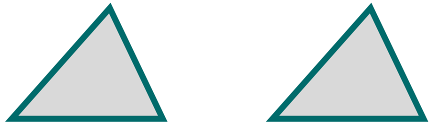
(M3) Normierung: Für das fest definierte Einheitsquadrat E mit der Kantenlänge 1 gilt: $F(E) = 1$.

(M4) Verträglichkeit mit der Kongruenz: Für alle Polygone A, B gilt:
Wenn A kongruent zu B ist, dann ist $F(A) = F(B)$.

Vgl. die Axiome des Wahrscheinlichkeitsmaßes von Kolmogorov



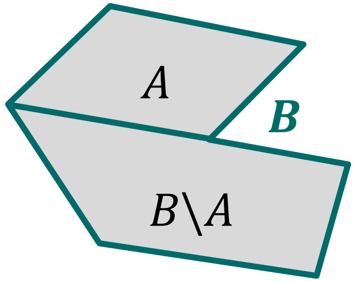




Monotonie

Die Existenz und Eindeutigkeit der Maßfunktion F für beliebige Polygone nehmen wir ohne Beweis an.

Satz 4.1
Die Flächeninhaltsfunktion ist monoton,
d.h. wenn $A \subseteq B$, dann gilt $F(\mathrm{A}) \leq F(B)$.

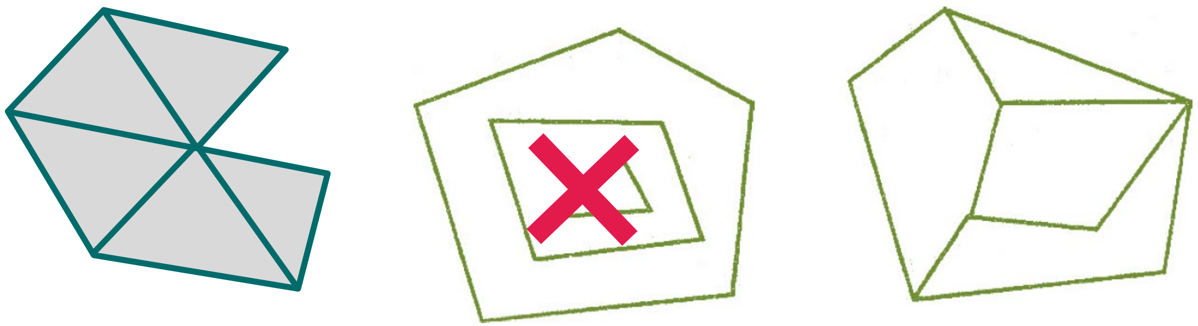


Beweis:
Voraussetzung: $A \subseteq B$
Zu zeigen: $F(\mathrm{A}) \leq F(B)$

Zerlegung von B in $B\setminus\mathrm{A}$ (B ohne A) und A (Vor.)
→ $F(B) = F(A) + F(B\setminus\mathrm{A})$ (M2)
→ $F(B) \geq F(A)$ (M1)

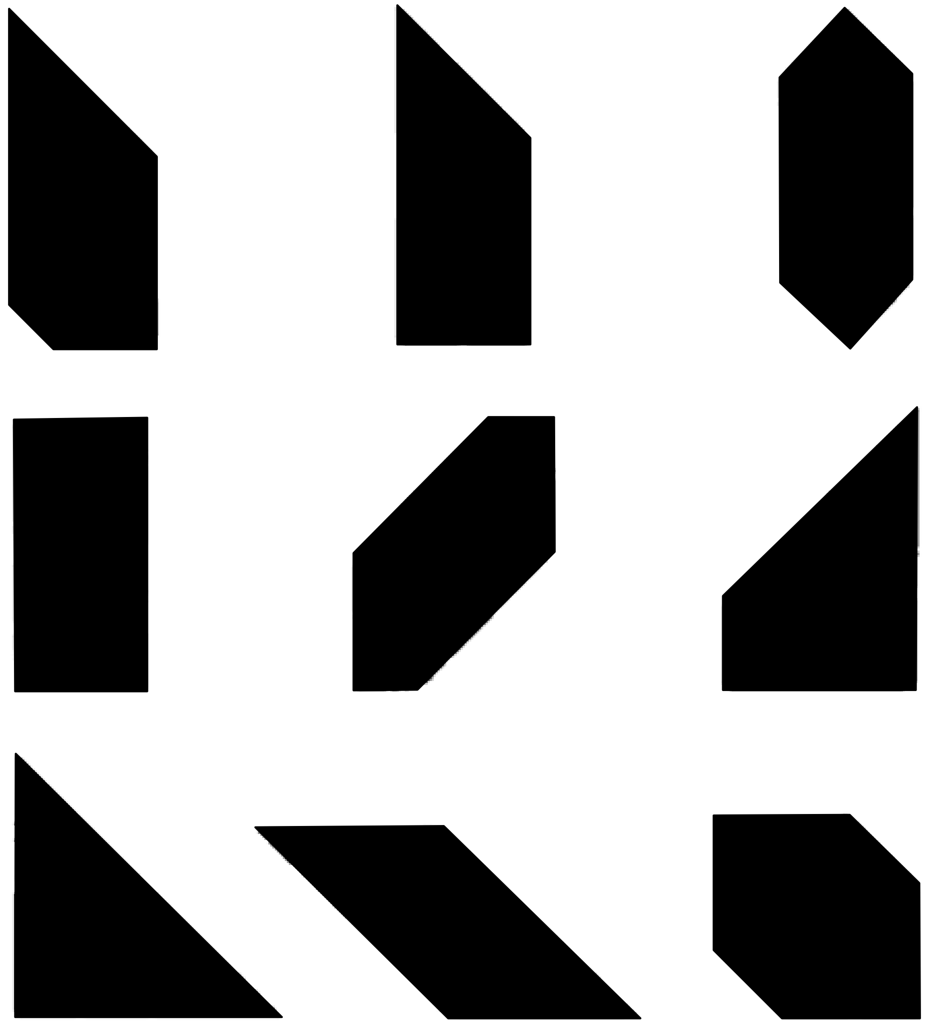
q.e.d.

Definition 4.2
Die Vereinigungsmenge von endlich vielen* Polygonen P_i heißt **Zerlegung** eines äußeren Polygons P, wenn gilt:
1) Zwei verschiedene Polygone haben keine inneren Punkte gemeinsam.
2) Zwei Polygone, die nicht disjunkt sind, haben nur Ecken oder Seiten gemeinsam *(höchstens Randpunkte)*.
3) Die Seiten, die jeweils nur zu einem der Polygone gehören, bilden zusammen das **äußere* Polygon** P.

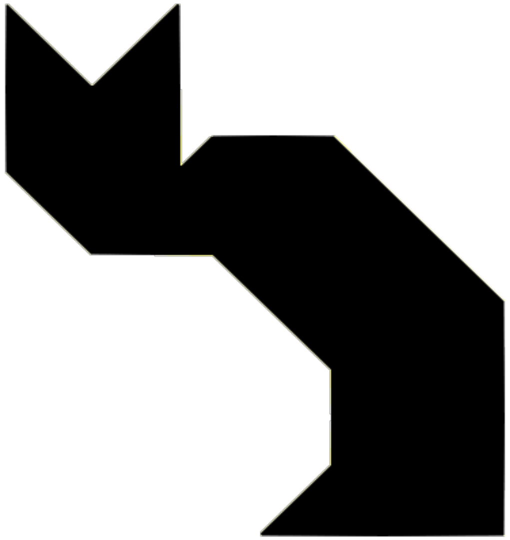


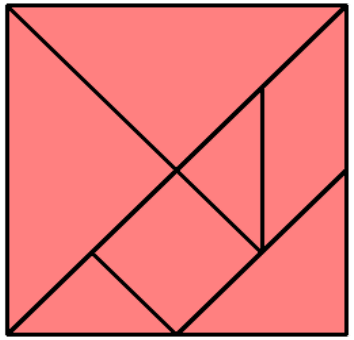
*einfach zusammenhängende(n)

Zerlegungsgleiche Polygone



Definition 4.3
Zwei Polygone P und Q heißen **zerlegungsgleich**, wenn sie sich so in gleichviele Teilpolygone $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$ und $Q_1, Q_2, Q_3 \dots Q_n$ zerlegen lassen, dass sich jedem Teilpolygon P_i ein zu diesem kongruentes Teilpolygon Q_j eindeutig und umkehrbar zuordnen lässt.





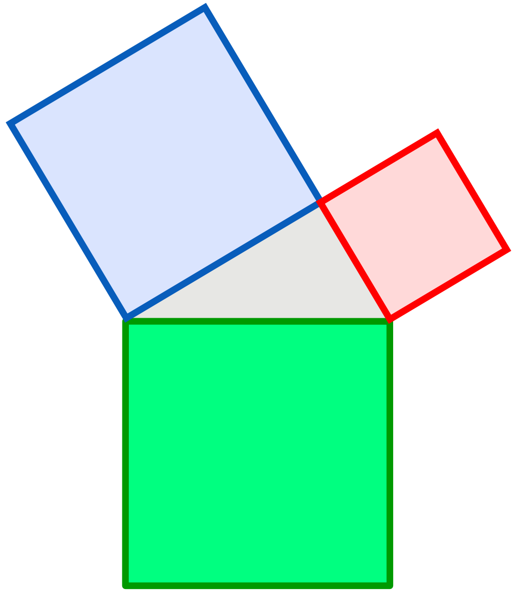
Ergänzungsgleiche Polygone

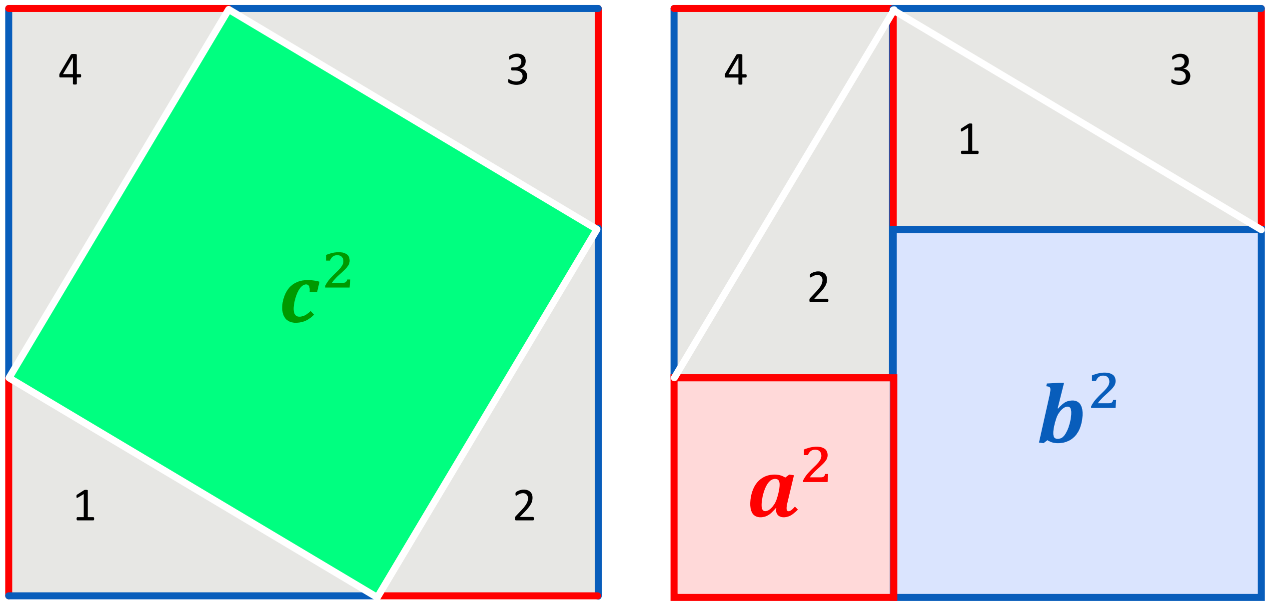
Definition 4.4

Zwei Polygone P und Q heißen **ergänzungsgleich**, wenn zu P und Q endlich viele, paarweise zerlegungsgleiche Polygone P_i und Q_j so hinzufügen lassen, dass P und P_i bzw. Q und Q_j jeweils eine Zerlegung bilden und die beiden Gesamtpolygone zerlegungsgleich sind.

Ergänzungsgleiche Polygone

Definition 4.4
Zwei Polygone P und Q heißen **ergänzungsgleich**, wenn zu P und Q endlich viele, paarweise zerlegungsgleiche Polygone P_i und Q_j so hinzufügen lassen, dass P und P_i bzw. Q und Q_i jeweils eine Zerlegung bilden und die beiden Gesamtpolygone zerlegungsgleich sind.

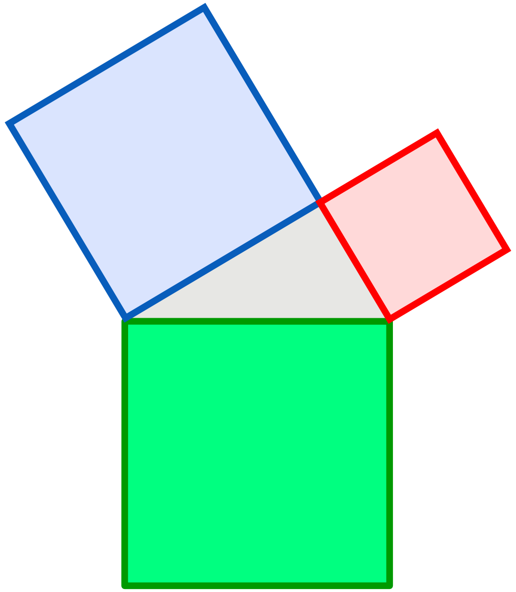


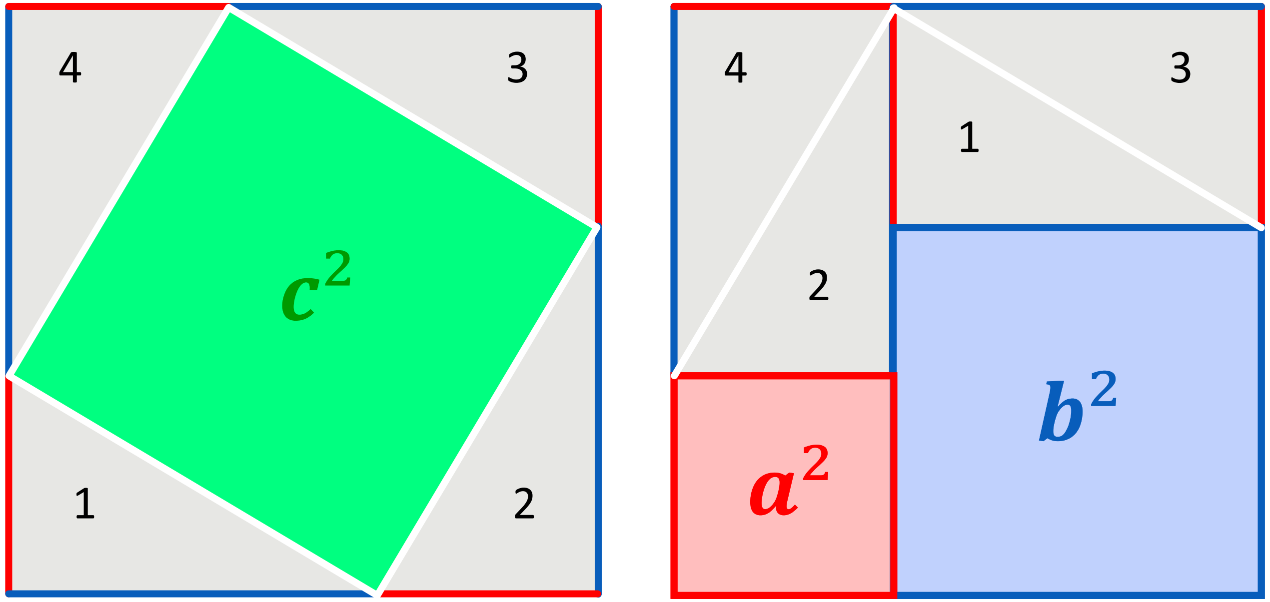


Satz des Pythagoras Ergänzungsgleichheit

Definition 4.4

Zwei Polygone P und Q heißen **ergänzungsgleich**, wenn zu P und Q endlich viele, paarweise zerlegungsgleiche Polygone P_i und Q_j so hinzufügen lassen, dass P und P_i bzw. Q und Q_i jeweils eine Zerlegung bilden und die beiden Gesamtpolygone zerlegungsgleich sind.





Zerlegungs-, ergänzungs- und inhaltsgleich

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Satz 4.2

a) Zerlegungsgleiche Polygone sind inhaltsgleich.
b) Ergänzungsgleiche Polygone sind inhaltsgleich.
c) Inhaltsgleiche Polygone sind stets auch zerlegungs- und ergänzungsgleich.

Beweisskizze zu a):

Sei $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ eine Zerlegung von A und $B_1, B_2, B_3 \dots B_n$ eine Zerlegung von B

Voraussetzung: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$ und $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n$
mit $A_i \cap A_j = \{Randpunkte\}$ und $B_i \cap B_j = \{Randpunkte\}$ $\forall\, i, j = 1 \dots n \;\; i \neq j$
$o.B.d.A$ sei $A_1 \cong B_1, A_2 \cong B_2, A_3 \cong B_3 \dots A_n \cong B_n$

Zu zeigen: $F(\mathrm{A}) = F(B)$

$F(A_1) = F(B_1) \dots F(A_n) = F(B_n)$ (Vor., M4)
Betrachte $A_1 \cup A_2$ und $B_1 \cup B_2$:
→ $F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) + F(A_2) = F(B_1) + F(B_2) = F(B_1 \cup B_2)$ (M2)
Betrachte $(A_1 \cup A_2) \cup A_3$ und $(B_1 \cup B_2) \cup B_3$:
$F\big((A_1 \cup A_2) \cup (A_3)\big) = F(A_1) + F(A_2) + F(A_3) = F(B_1) + F(B_2) + F(B_3) = F((B_1 \cup B_2) \cup B_3)$ (M2)
…
$F(A) = F\big((A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) \cup A_n\big) = F(A_1) + F(A_2) + F(A_3) + \cdots + F(A_n)$
$= F(B_1) + F(B_2) + F(B_3) + \cdots + F(B_n) = F\big((B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \cdots) \cup B_n\big) = F(B)$ (M2)

q.e.d.

Präsenzübung
Beweisskizze zu Satz 4.2 b)

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

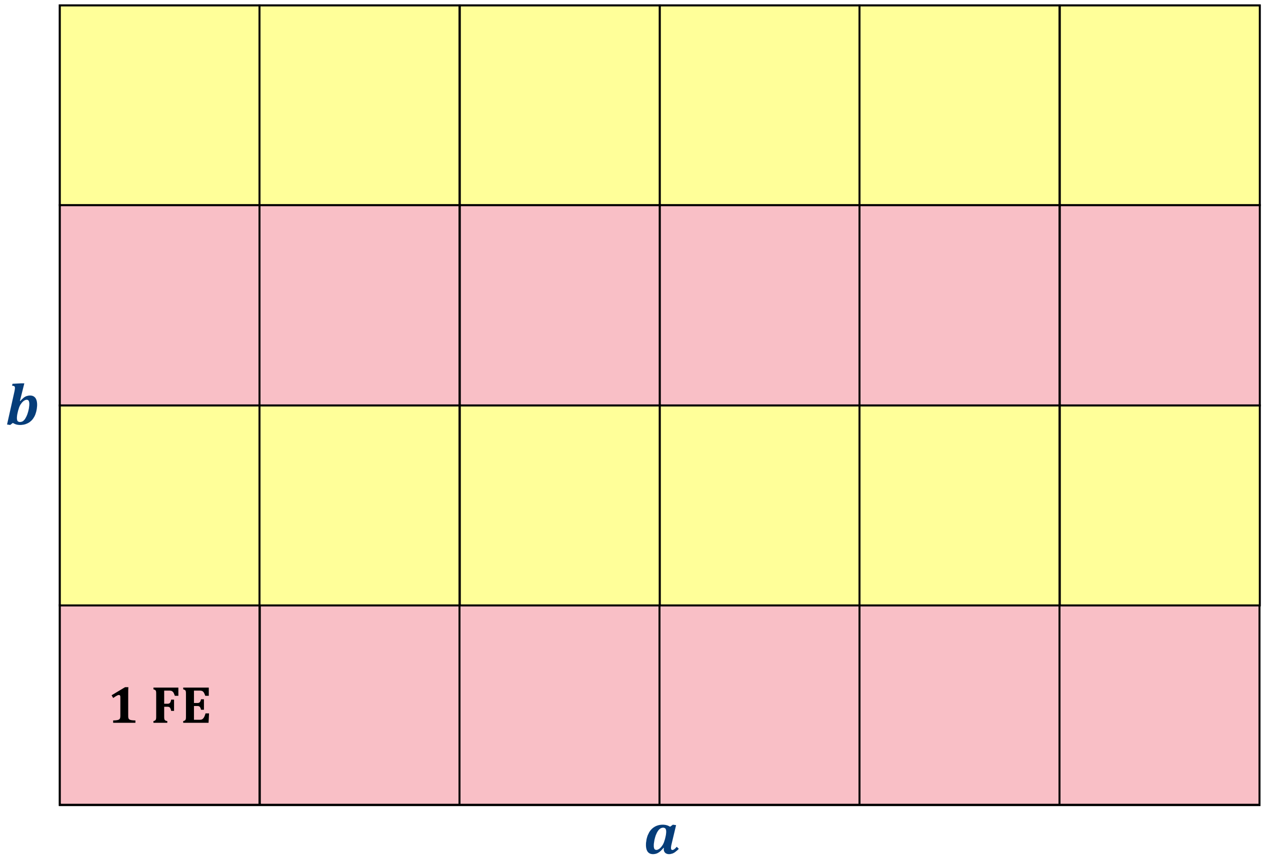
4 Flächeninhalte

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

Flächenmessung

Rechtecksflächeninhalt $(a, b \in \mathbb{N})$

- Lückenlos und überschneidungsfrei auslegen mit Einheitsquadraten
- b Reihen zu je a Einheitsquadraten → $A = a \cdot b$



$Maßfunktion:$
$F(A) = Anzahl\ Einheitsquadrate$

Überprüfung: Erfüllt das Vorgehen die Eigenschaften aus Def. 4.1?

(M1) $Anzahl \geq 0$

(M2) $Anzahlen\ addieren\ sich$

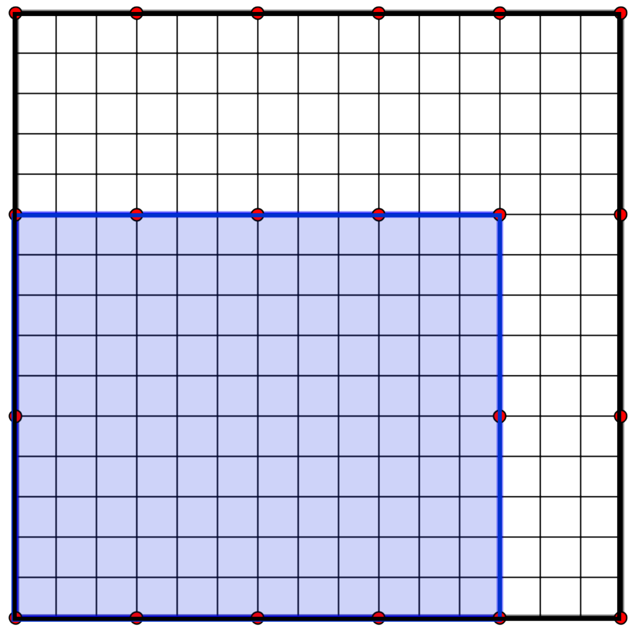
(M3) $Anzahl\ (Einheitsquadrat) = 1$

(M4) $kongruente\ Figuren:$

$Auslegung\ in\ gleicher\ Weise$

Rechtecksflächeninhalt $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}^+\right)$

- **Idee**
  - Ein Rechteck mit den Kantenlängen $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ lässt sich nicht mit Einheitsquadraten auslegen.
  - Verfeinern der Einteilung beider Kantenlängen führt zu $\frac{p \cdot s}{q \cdot s}, \frac{r \cdot q}{s \cdot q} \in \mathbb{Q}$.
  - In das Einheitsquadrat passen folglich $(q \cdot s) \cdot (q \cdot s) = (q \cdot s)^2$ kleine Teilquadrate. Im Beispiel: $(3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$
  - Ein Teilquadrat besitzt also den Flächeninhalt $\frac{1}{(q \cdot s)^2}\,\mathrm{FE} = \frac{1}{225}\,\mathrm{FE}$.
- **Flächenmessung**
  - Auslegen mit Teilquadraten ergibt $p \cdot s$ Zeilen mit je $r \cdot q$ Quadraten.
  - $A = (p \cdot s) \cdot (r \cdot q) \cdot \frac{1}{(q \cdot s)^2} = \frac{(p \cdot s) \cdot (r \cdot q)}{(q \cdot s)^2} = \frac{p \cdot s \cdot r \cdot q}{q \cdot s \cdot q \cdot s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$



$$\frac{p}{q} = \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{p \cdot s}{q \cdot s}$$

$$\frac{r}{s} = \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{r \cdot q}{s \cdot q}$$

Rechtecksflächeninhalt $(a, b \in \mathbb{R}^+)$

$a = \{[a_n; A_n]\}$

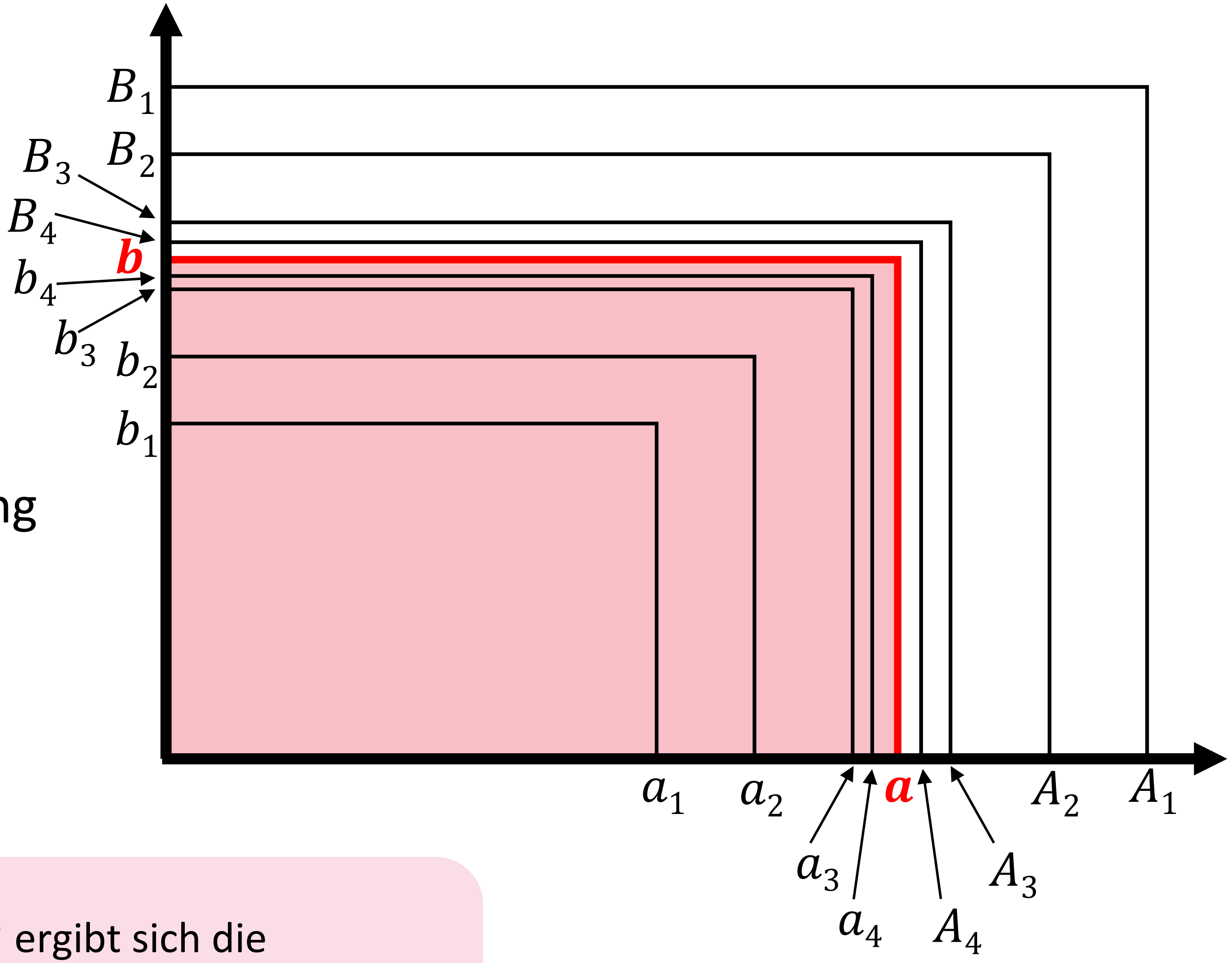
$b = \{[b_n; B_n]\}$

mit

$a_n, b_n, An, B_n \in \mathbb{Q}^+$

$\Rightarrow \{[a_n b_n; A_n B_n]\} = a \cdot b$

ist eine Intervallschachtellung für den Flächeninhalt



Inkommen-surabilität

Satz 4.3

Für den Flächeninhalt F des Rechtecks R ergibt sich die multiplikative Vorschrift $F(R) = a \cdot b$ wobei a und b die Längen der beiden Rechteckseiten beschreiben $(a, b \in \mathbb{R})$.

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

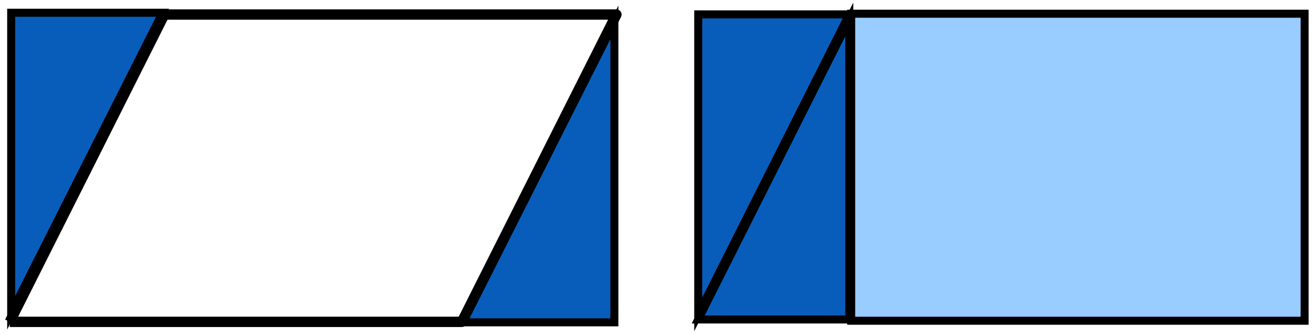
4 Flächeninhalte

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

Parallelogramm

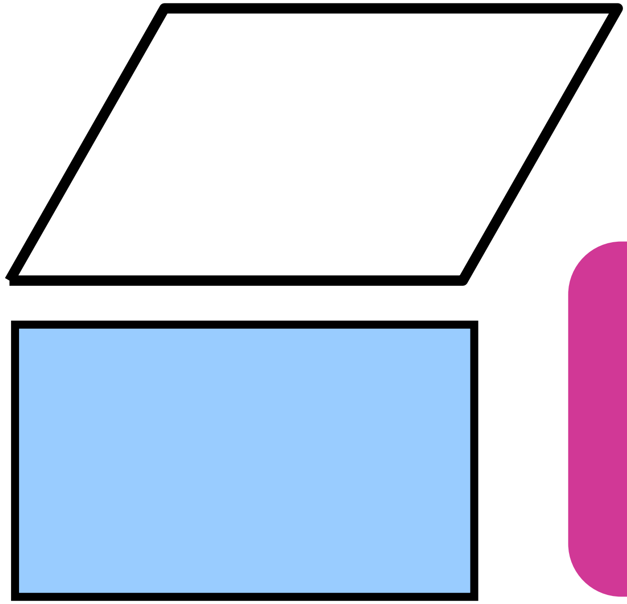
Ergänzungsgleichheit (nach Satz 3.2 b)

- Parallelogramm mit Polygonen ergänzen
- Rechteck mit dazu kongruenten Polygonen ergänzen
- Zwei kongruente Gesamtflächen entstehen
- Nach Satz 3.2 b) sind die Flächeninhalte der Ausgangsfiguren gleich.



Zerlegungsgleichheit (nach Satz 3.2 a)

- Parallelogramm in Polygone zerlegen
- Rechteck in dazu kongruente Polygone zerlegen
- Nach Satz 3.2 a) sind die Flächeninhalte der Ausgangsfiguren gleich.

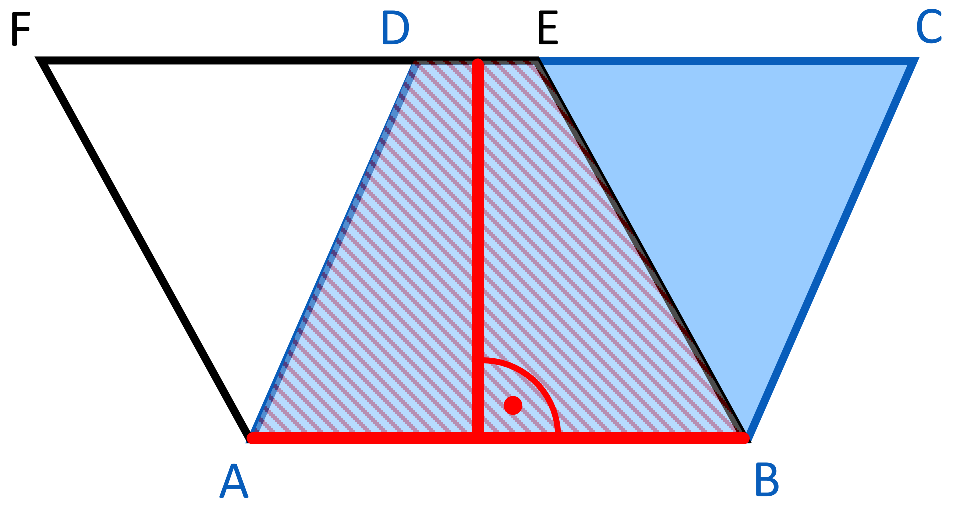


Zeichnen Sie eine geeignete Zerlegung beider Vierecke.

Satz 4.4
Der Flächeninhalt F eines Parallelogramms P mit den Seitenlängen a und b berechnet sich als $F(P) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ wobei h_a die Höhe auf der Seite a und h_b die Höhe auf der Seite b bezeichnen.

Flächeninhaltsgleiche Parallelogramme

Satz 4.5
Parallelogramme, die in der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen sind zerlegungsgleich.



Beweisidee:

Fallunterscheidung:

1. Fall: $[CD] \cap [EF] \neq \emptyset$

$P(ABDE)$ Teilpolygon von $ABCD$ und $ABEF$

$\Delta ADF \cong \Delta BCE$

$ABCD$ und $ABEF$ sind zerlegungsgleich

$F(ABCD) = F(ABEF)$ (Satz 4.3 a))

Flächeninhaltsgleiche Parallelogramme

Satz 4.5
Parallelogramme, die in der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen sind zerlegungsgleich.

2. Fall: $[CD] \cap [EF] = \emptyset$

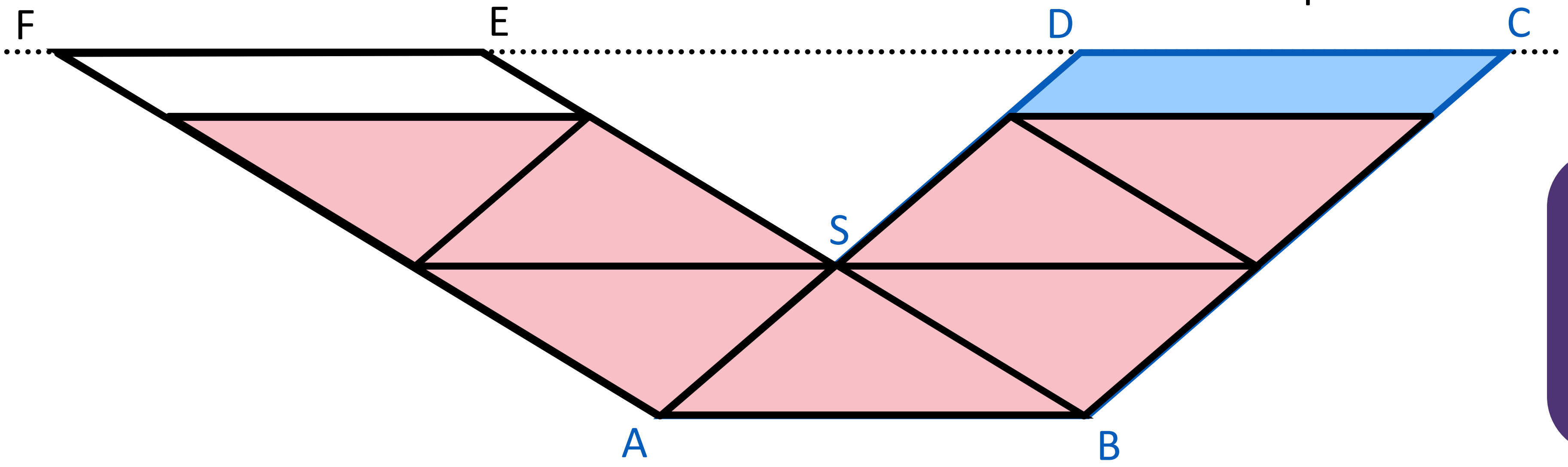
Mehrfache Punktspiegelung ΔABS an Seitenmitten

Für kleine Restparallelogramme analog 1. Fall.

$ABCD$ und $ABEF$ sind zerlegungsgleich

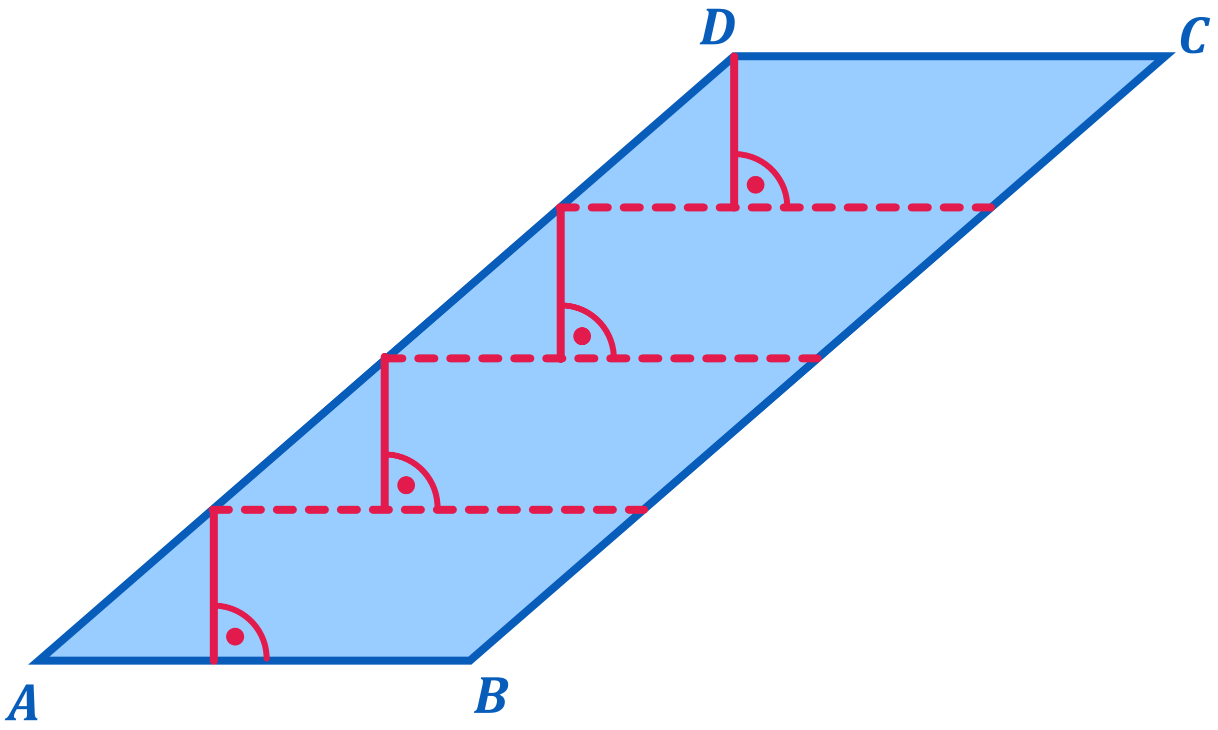
$F(ABCD) = F(ABEF)$ (Satz 4.3 a))

q.e.d.



Damit auch zerlegungsgleich zu Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB}$ und h_{AB}
→ Bew. Satz 4.4

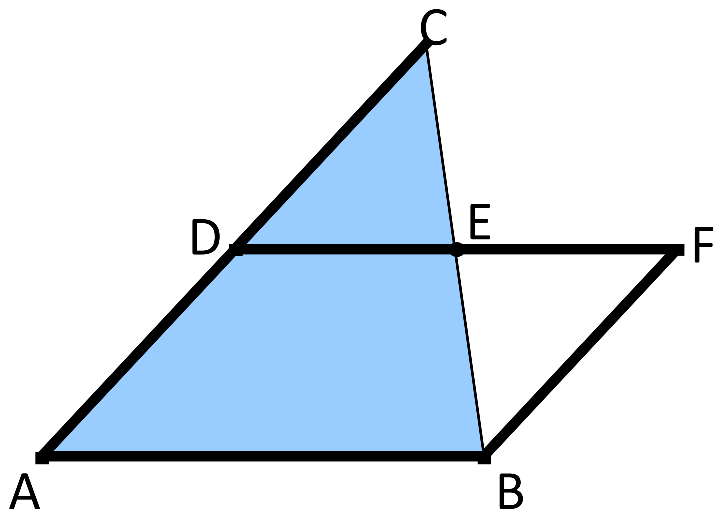
Parallelogramm



Dreieck

Zerlegungsleich zu Parallelogramm

- Konstruiere $\overline{DE}$ als Mittelparallele zu $\overline{AB}$ (s. Beweisfigur Satz 3.10)
- Parallele zu AD schneidet diese in F
- Kongruente Dreiecke $\Delta CDE \cong \Delta BEF$
- Kongruente Restpolygone (Identität) $P(ABDE)$
- ΔABC und $ABDF$ zerlegungsgleich



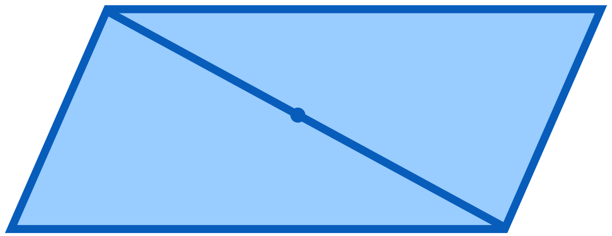
Satz 4.6

Zu jedem Dreieck existiert ein zerlegungsgleiches Parallelogramm, das mit dem Dreieck in einer wählbaren Seite übereinstimmt.

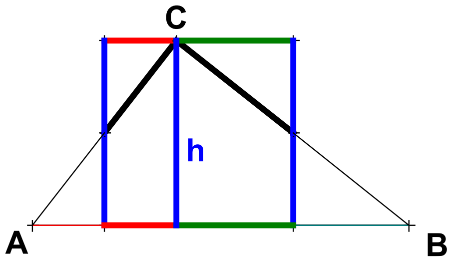
Dreieck

Zu Parallelogramm ergänzen

- Punktspiegelung an einer Seitenmitte → Parallelogramm
- Parallelogramm besitzt Seite und zugehörige Höhe des Dreiecks
- Flächeninhalt durch Spiegelung verdoppelt (M2,4)

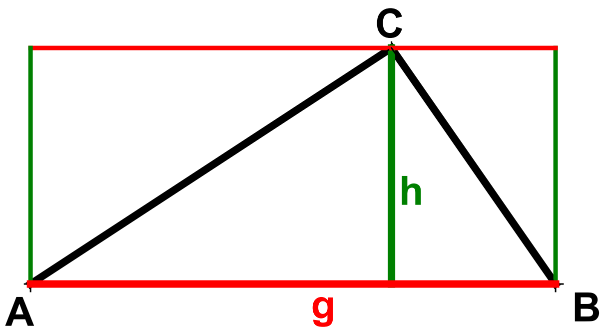


Beschreiben Sie das Vorgehen zur Flächen-berechnung mithilfe dieser dritten Figur:



Zu Rechteck ergänzen

- Höhe zu längster Seite einzeichnen → zwei rechtwinklige Teildreiecke
- Punktspiegelung der Teildreiecke an der Seitenmitte der Hypotenuse
- Flächeninhalt durch Spiegelung verdoppelt (M2,4)



Satz 4.7

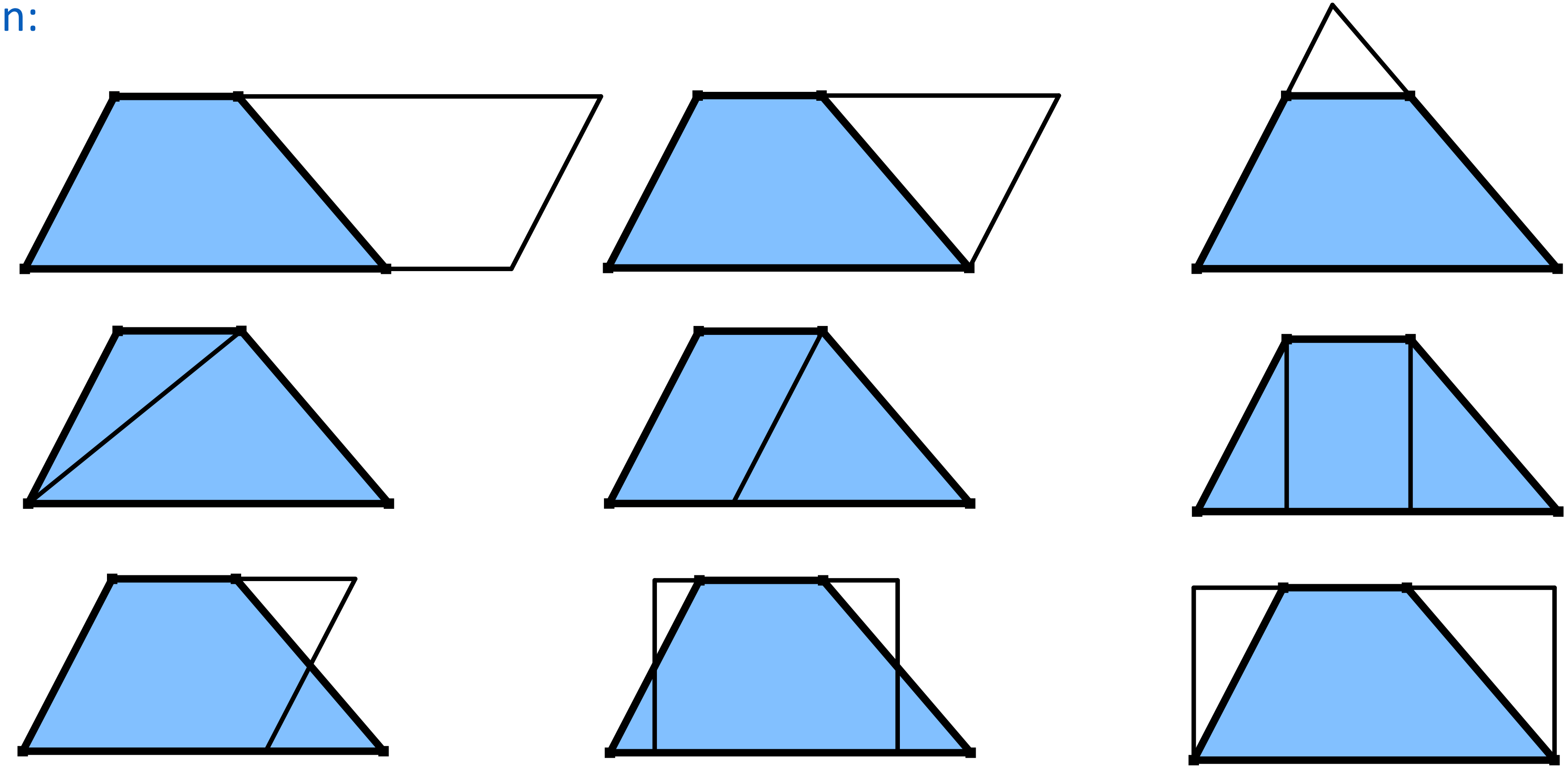
Der Flächeninhalt F eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c berechnet sich zu $F(D) = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$, wobei h_a die Höhe auf der Seite a, h_b die auf b und h_c die auf c bezeichnen.

Flächeninhaltsbestimmung beim Trapez

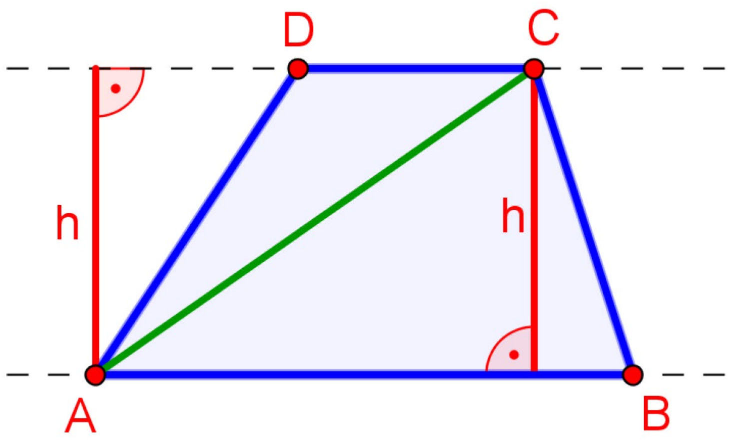
Satz 4.8

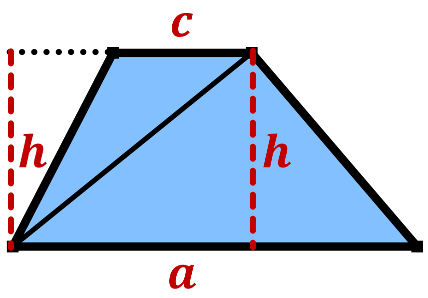
Der Flächeninhalt F eines Trapezes mit den Seitenlängen a und c (der parallelen Seiten) und der Länge der Höhe h (Abstand der Trägergeraden der parallelen Seiten) berechnet sich zu $F(T) = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$.

Beweisideen:



Beweis zu Flächeninhalt des Trapezes





$$A_{Trapez} = A_{Dreieck_1} + A_{Dreieck_2}$$
$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h}$$
$$= \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{2} \cdot \boldsymbol{h}$$

Beweis zu Satz 4.8:

Voraussetzung: $h = d(\overline{AB}, \overline{CD})$

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Zu zeigen: $F(\mathrm{ABCD}) = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AB}| + |\overline{DC}|) \cdot h$

Zerlegung in Teildreiecke ΔADC und ΔABC

Betrachte ΔADC:

Höhe $h_{DC} = h$ (Vor.)

→ $F(\Delta ADC) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DC}| \cdot h_{DC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DC}| \cdot h$ (Vor., Satz 4.6)

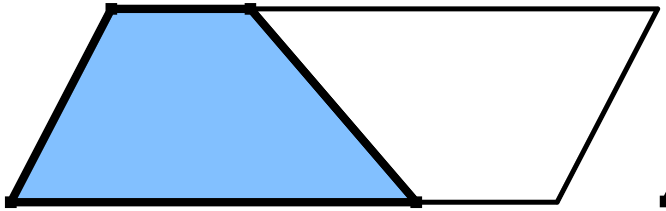
Betrachte ΔABC:

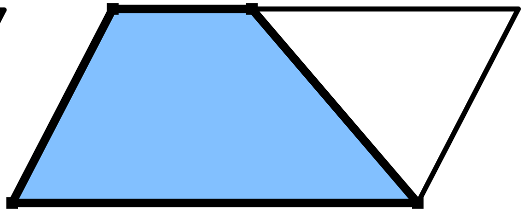
Höhe $h_{AB} = h$ (Vor.)

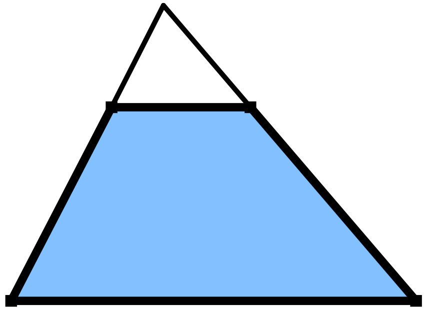
→ $F(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot h_{AB} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot h$ (Vor., Satz 4.6)

→ $F(\mathrm{ABCD}) = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AB}| + |\overline{DC}|) \cdot h$ (M2)

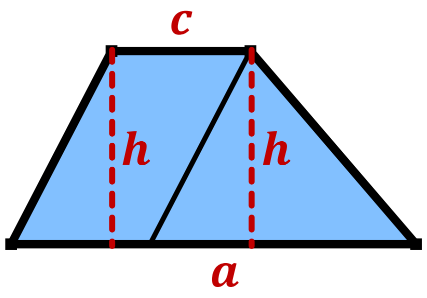
Weitere Beweisskizzen

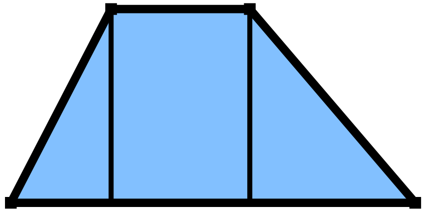


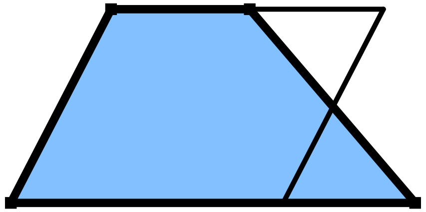


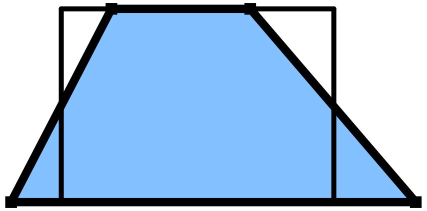


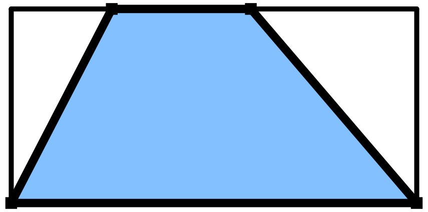
$$
\begin{aligned}
A_{Trapez} &= A_{Parallelogramm} + A_{Dreieck} \\
&= c \cdot h + \tfrac{1}{2}(a - c) \cdot h \\
&= c \cdot h + \tfrac{1}{2} a \cdot h - \tfrac{1}{2} c \cdot h \\
&= \tfrac{1}{2} a \cdot h + \tfrac{1}{2} c \cdot h = \tfrac{a+c}{2} \cdot h
\end{aligned}
$$











a) Notieren Sie zu dem Beispiel links einen formalen Beweis.

b) Notieren Sie zu möglichst vielen der weiteren Figuren eine Beweisskizze bzw. einen Beweis.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

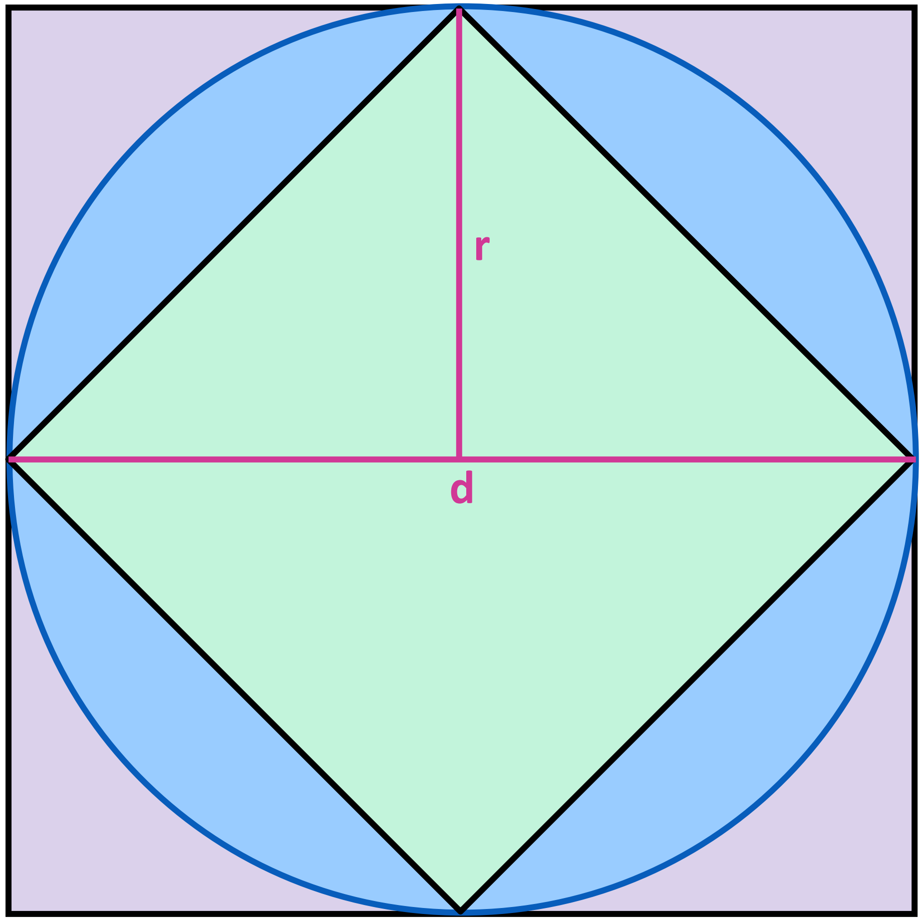
4 Flächeninhalte

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

Kreisumfang und Kreisinhalt



Kreisumfang $U \cong$

Kreisinhalt $A \cong$

Erste Abschätzung

Vergleichsfiguren:

- das dem Kreis einbeschriebene Quadrat
- das dem Kreis umbeschriebene Quadrat

einbeschriebenes Quadrat < Kreis < umbeschriebenes Quadrat

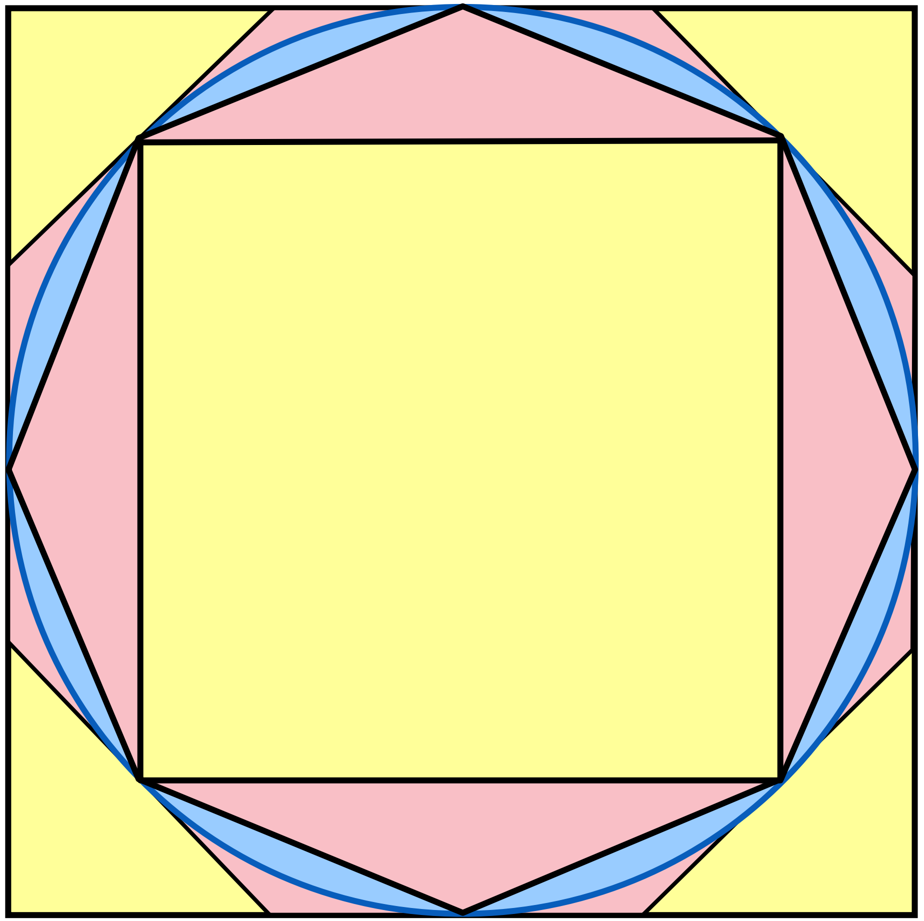
einbeschriebenes Quadrat	umbeschriebenes Quadrat
Seitenlänge	Seitenlänge
Umfang	Umfang
Flächeninhalt	Flächeninhalt

Abschätzungen

< Kreisumfang <

< Kreisinhalt <

Kreisinhaltsbestimmung



Eingrenzung durch regelmäßige Vielecke

Archimedes von Syrakus

- Einschachtelung durch ein- und umbeschriebene regelmäßige Vielecke
- Verdoppelung der Eckenanzahlen

Berechnung von Umfang und Flächeninhalt rekursiv

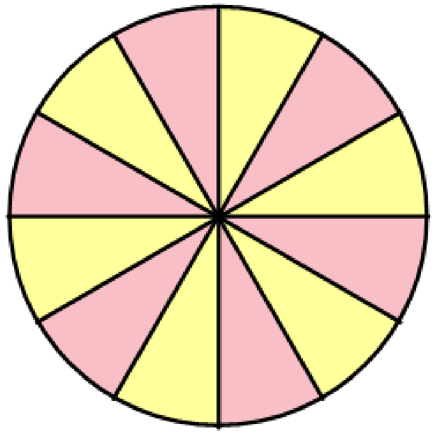
→ Anwendung in Kapitel 6 Satzgruppe des Pythagoras

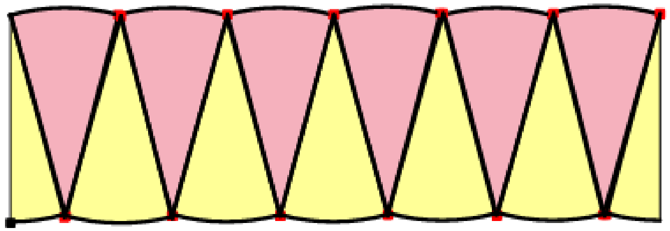
Kreisinhaltsbestimmung

Kreis als Grenzfall von regelmäßigen n-Ecken

- n-Eck in n gleichschenklige Dreiecke zerteilen
- nebeneinander aufreihen
- Hälfte der Dreiecke umsortieren
- ein Dreieck am Rand halbieren

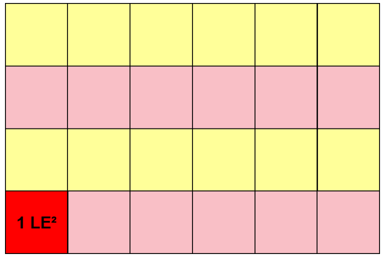
  (in zwei rechtwinklige Teildreiecke)
- am anderen Rand anlegen
- Rechteck mit den Seitenlängen …

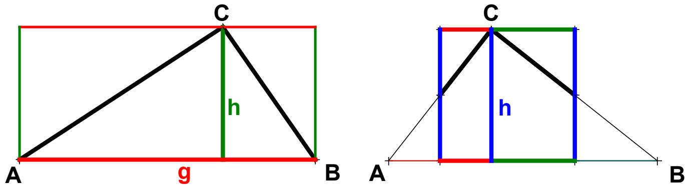


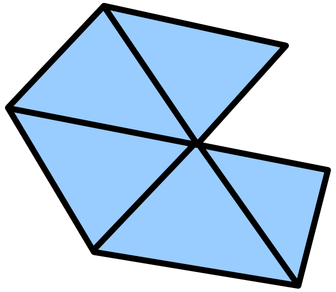


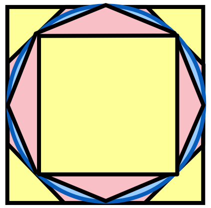
https://www.geogebra.org/m/cQHqmekc#chapter/1938

Flächeninhaltsbestimmung









- **Rechteck**
  - Flächenmessung, d. h. Auslegen mit Einheitsquadraten (bzw. Intervallschachtelung)
- **Dreieck**
  - Flächenvergleich mit dem Rechteck
- **Polygon**
  - Triangulierung (Einteilen in Dreiecke)
- **Kreis**
  - Intervallschachtelung

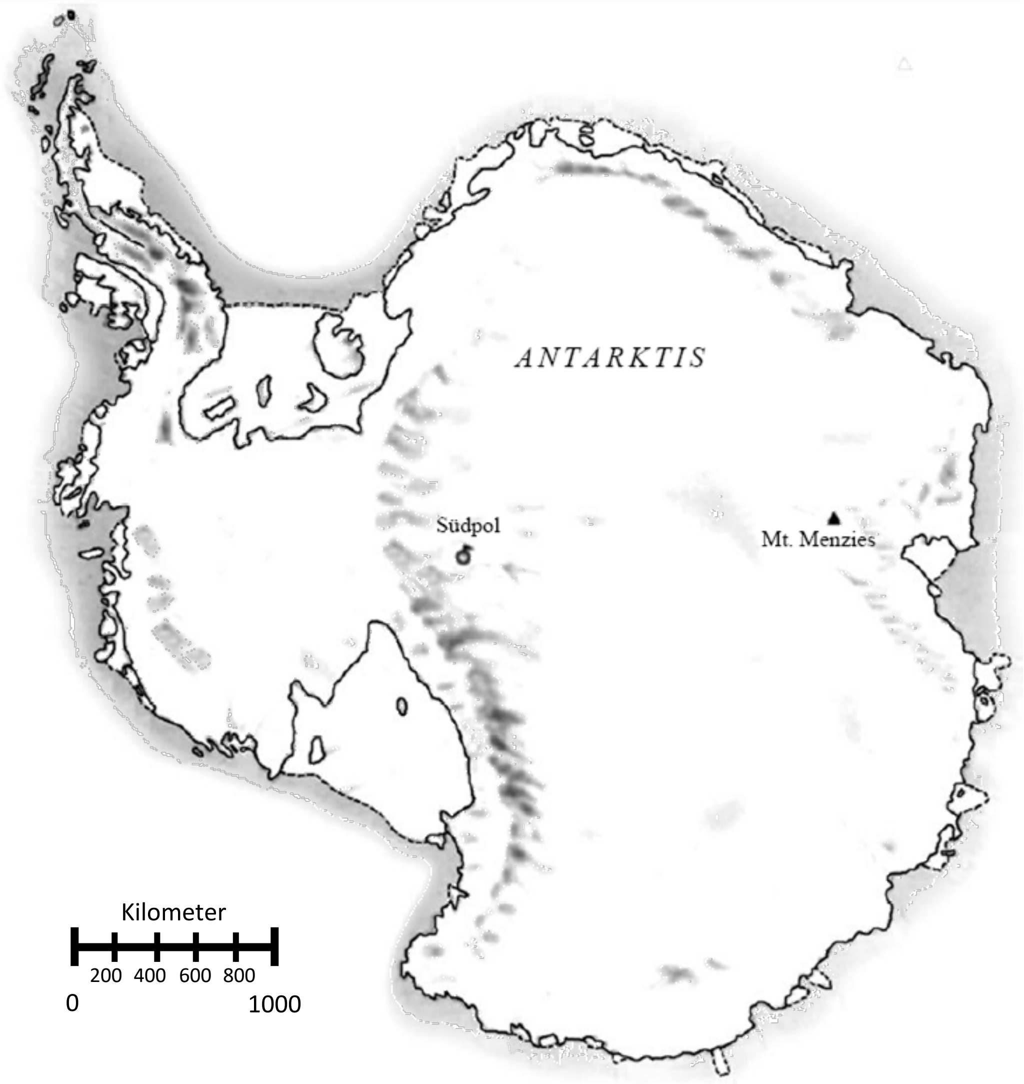
Flächeninhalt der Antarktis

PISA-Aufgabe

Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)



Idee: „Auslegen“ mit Einheitsquadraten

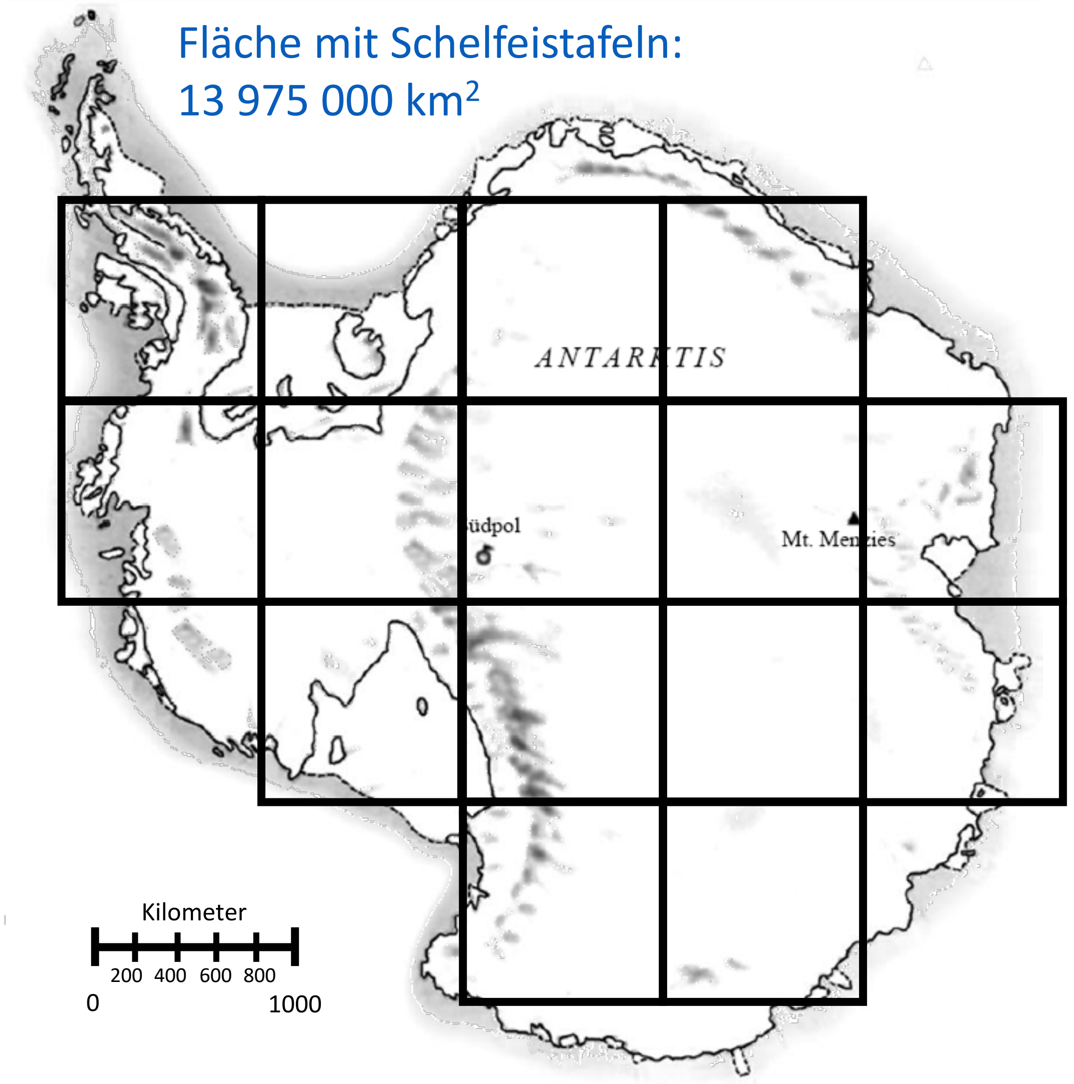
PISA-Aufgabe

Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

Fläche mit Schelfeistafeln:
13 975 000 km²



Idee: Vergleichen mit einer einfachen Fläche

PISA-Aufgabe

Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

Fläche mit Schelfeistafeln:
13 975 000 km²

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

4 Flächeninhalte

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

Rauminhalt als reelle Maßfunktion

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Definition 4.5

Man definiert analog zur Flächenfunktion im $\mathbb{R}^3$ für Polyeder (bestimmte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$):

Die Funktion V, die jedem Polyeder einen reellen Zahlenwert als Rauminhaltsmaßzahl zuordnet, heißt **Rauminhaltsfunktion**.

Sie muss folgende Forderungen erfüllen:

(M1) Nichtnegativität: Für jedes Polyeder A gilt $V(A) \geq 0$.

(M2) Additivität: Für alle Polyeder A, B gilt:
Wenn A und B keine inneren Punkte gemeinsam haben (also höchstens Randpunkte), dann gilt: $V(A \cup B) = V(A) + V(B)$

(M3) Normierung: Für den fest definierten Einheitswürfel W mit der Kantenlänge 1 gilt: $F(W) = 1$.

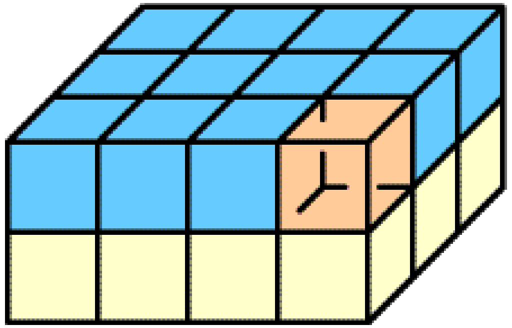
(M4) Verträglichkeit mit der Kongruenz: Für alle Polyeder A, B gilt:
Wenn A kongruent zu B ist, dann ist $V(A) = V(B)$.

Figuren, die durch eine Kongruenzabbildung zur Deckung gebracht werden können, heißen kongruent.

Rauminhaltsbegriff

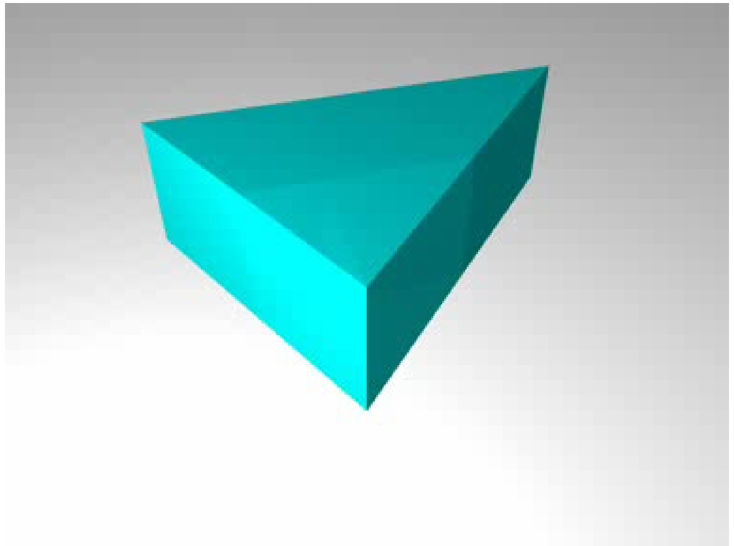
Videos aus: www.madin.net → Grundbegriffe der Geometrie

- **Herleitung**
  - Weitgehend analog zum Flächeninhaltsbegriff
  - Aber: Satz von Dehn beachten!
- **Satz von Dehn (vgl. Text!)**
  - Zwei rauminhaltsgleiche Polyeder sind im Allgemeinen weder zerlegungs- noch ergänzungsgleich.
- **Quadervolumen**

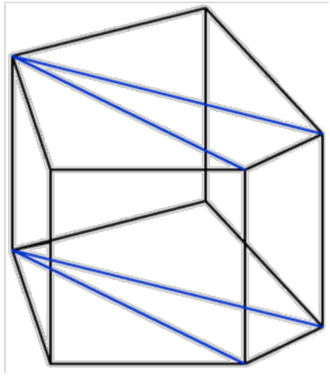


https://www.juergen-roth.de/skripte/did_geometrie/cavalieri_dehn_pyramidenvolumen.pdf

- **Volumen Dreiecksprisma**



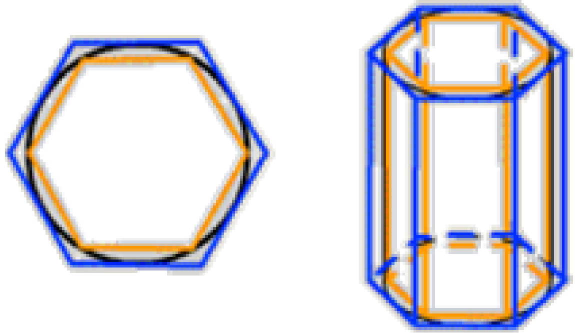
- **Volumen gerades Prisma**

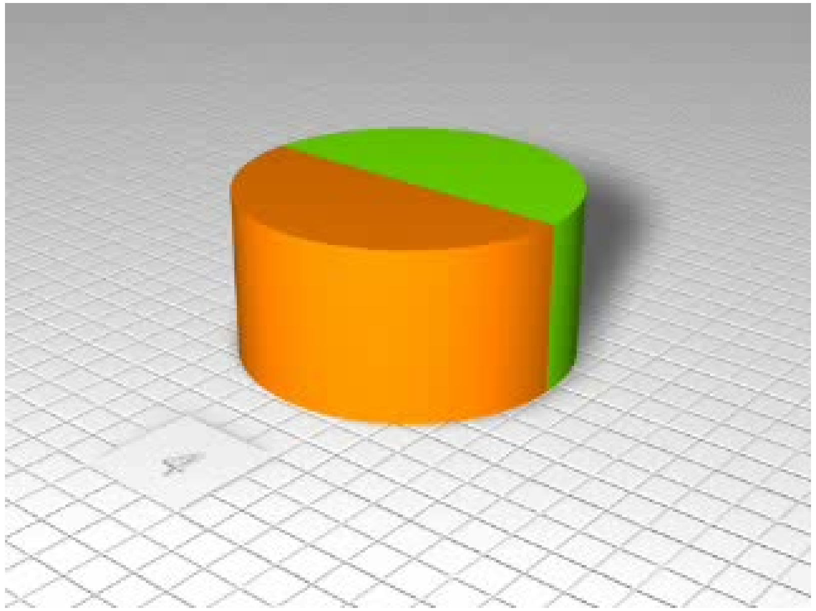


Rauminhaltsbegriff

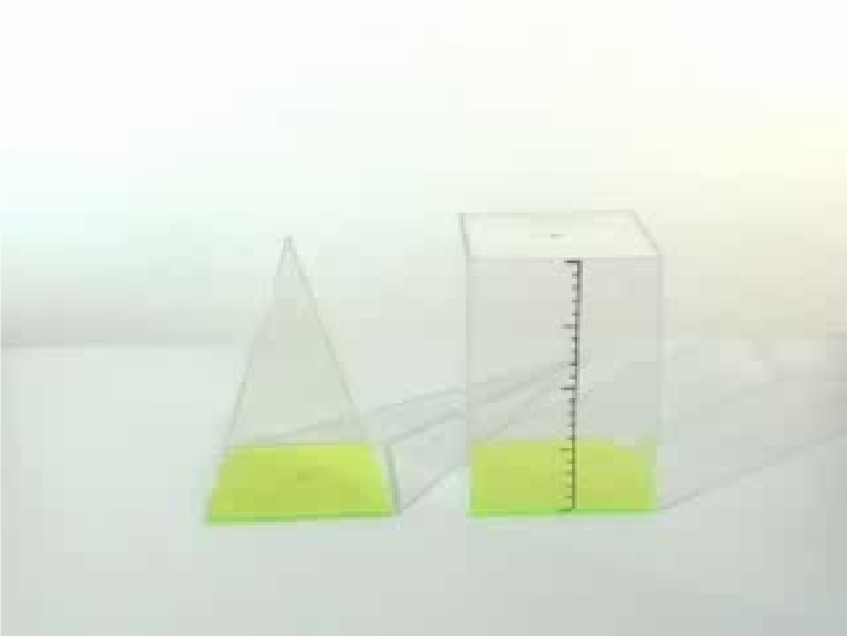
Videos aus: www.madin.net → Grundbegriffe der Geometrie

- **Zylindervolumen**





- **Pyramidenvolumen**
  - Vgl. Text!

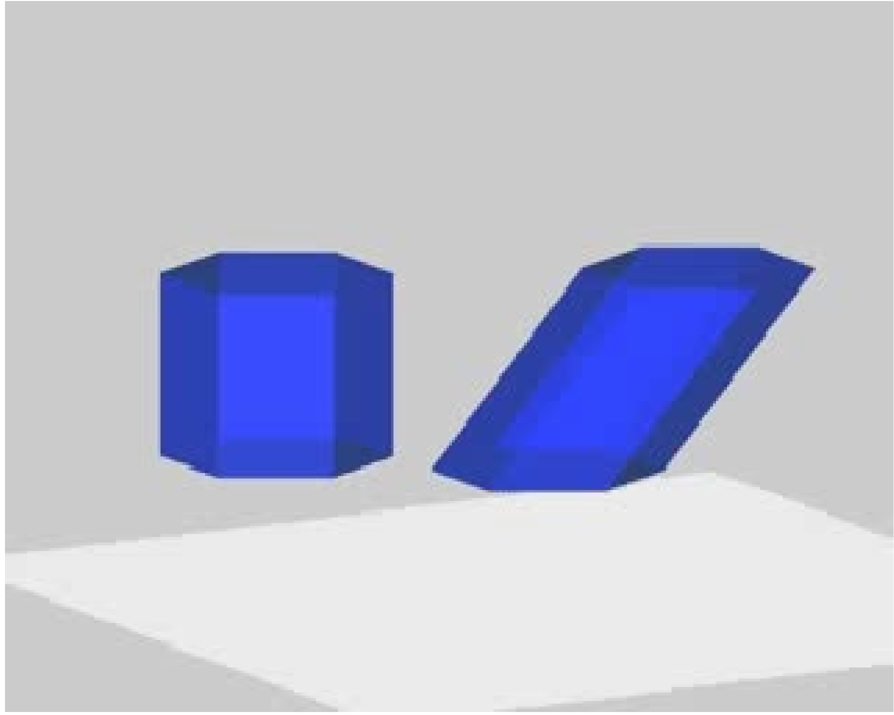


https://www.juergen-roth.de/skripte/did_geometrie/cavalieri_dehn_pyramidenvolumen.pdf

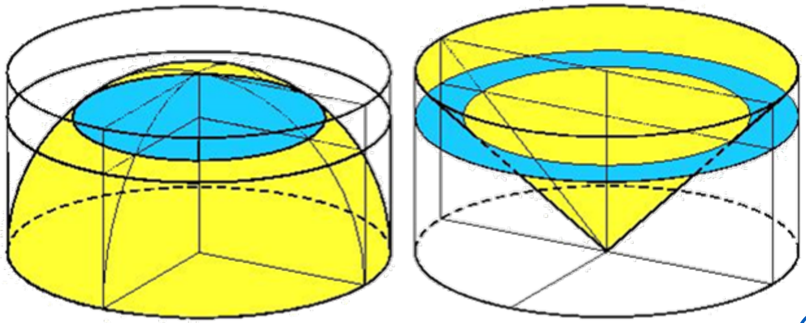
Rauminhaltsbegriff

Videos aus: www.madin.net → Grundbegriffe der Geometrie

- **Satz von Cavalieri** (vgl. Text!)
  - Zwei Körper gleicher Höhe sind volumengleich, wenn sie in jeweils gleicher Höhe flächen-gleiche Querschnitte haben.

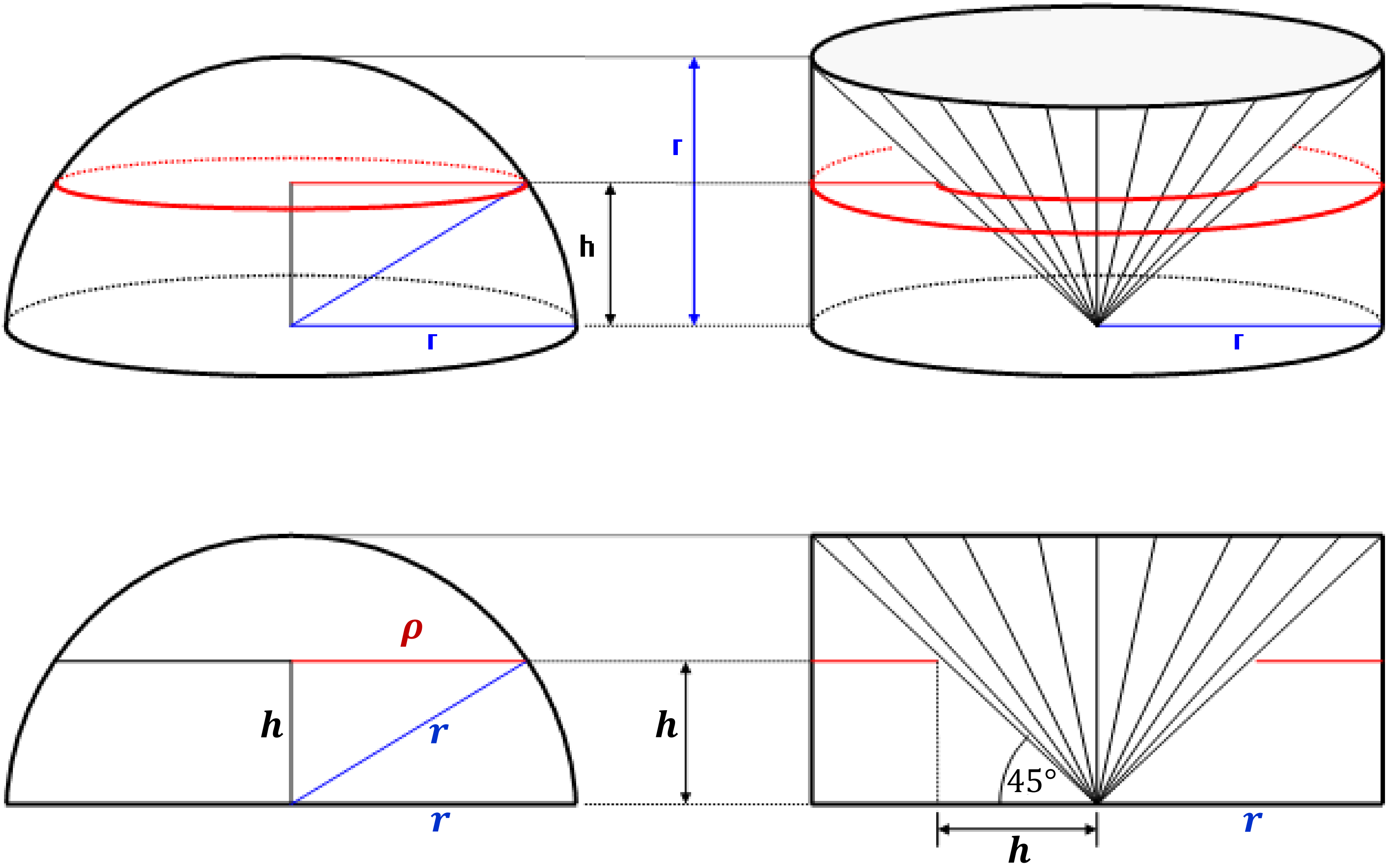


- **Text lesen!**
  - Prinzip von Cavalieri
  - Satz von Dehn
  - Volumen der Pyramide
  - Kugelvolumen/Kugeloberfläche
- **Kugelvolumen**
  - Herleitung über den Satz von Cavalieri (vgl. Text)



https://www.juergen-roth.de/skripte/did_geometrie/cavalieri_dehn_pyramidenvolumen.pdf

Kugelvolumen



https://www.geogebra.org/m/a7SkNSWh

Kugelvolumen

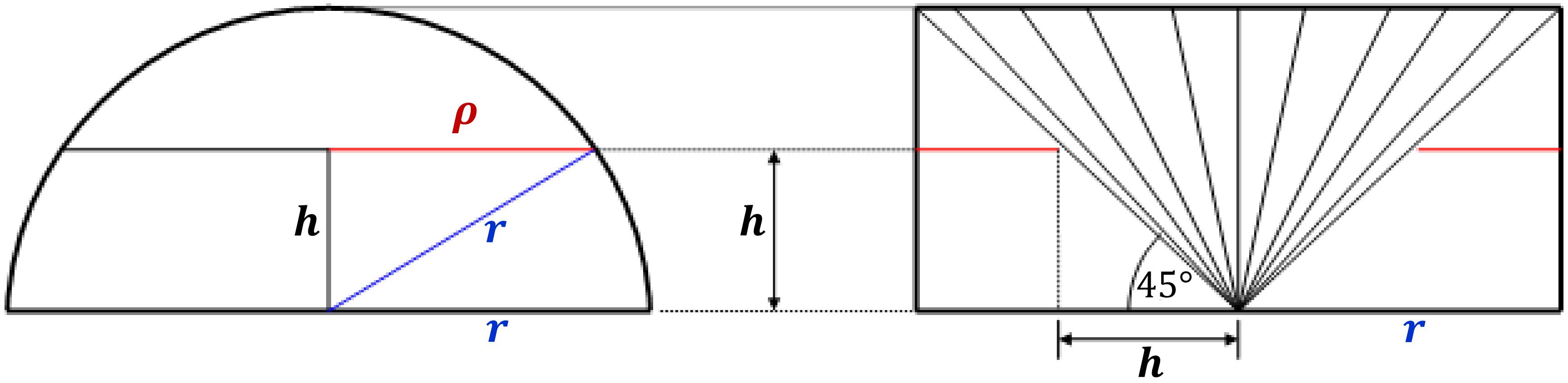
Es muss noch gezeigt werden, dass die Flächeninhalte der Schnittflächen in der Höhe h in beiden Körpern gleich groß sind.

$$A_{\text{Schnittfläche}} = \rho^2 \cdot \pi = (r^2 - h^2) \cdot \pi$$

$$A_{\text{Schnittfläche}} = r^2 \cdot \pi - h^2 \cdot \pi = (r^2 - h^2) \cdot \pi$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri gilt also:

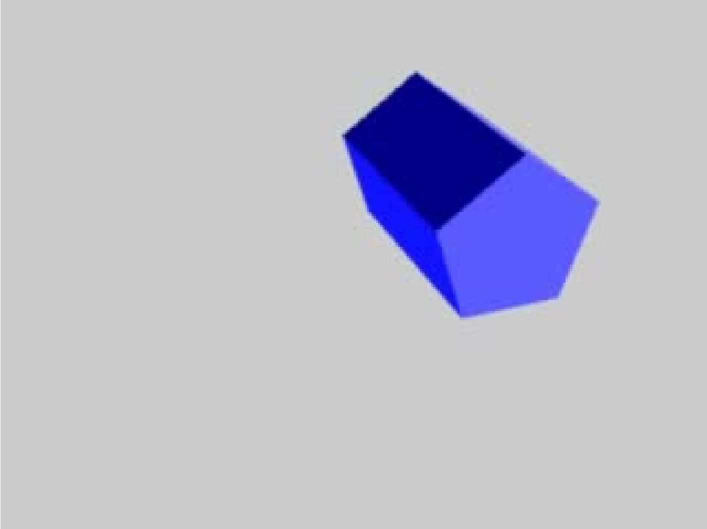
$$V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} = G \cdot r - \frac{1}{3} \cdot G \cdot r = \frac{2}{3} \cdot G \cdot r = \frac{2}{3} \cdot r^2\pi \cdot r = \frac{2}{3} \cdot r^3\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot r^3\pi}$$

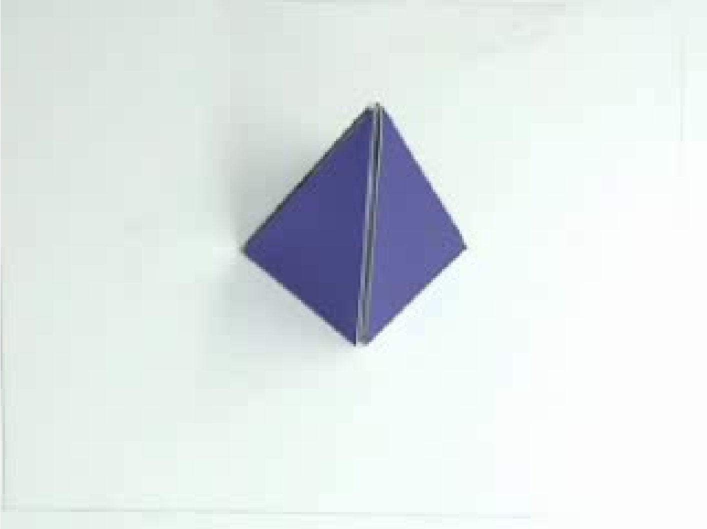


https://www.geogebra.org/m/a7SkNSWh

Exkurs: Netze von Körpern

Videos aus: www.madin.net → Grundbegriffe der Geometrie





Kontakt

Dr. Susanne Digel

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

s.digel@rptu.de

dms.nuw.rptu.de

RPTU