Geometrie

Modul 4b

Susanne Digel & Jürgen Roth

14.12.2023

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Geometrie 4b

1. Ideen der Geometrie
2. Kongruenzabbildungen der Ebene
3. Figuren in der Ebene
4. Flächeninhalte
5. Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren
6. Satzgruppe des Pythagoras

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

RPTU

3

Geometrie 4b

Figuren in der Ebene

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

3 Figuren in der Ebene

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

3 Figuren in der Ebene

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

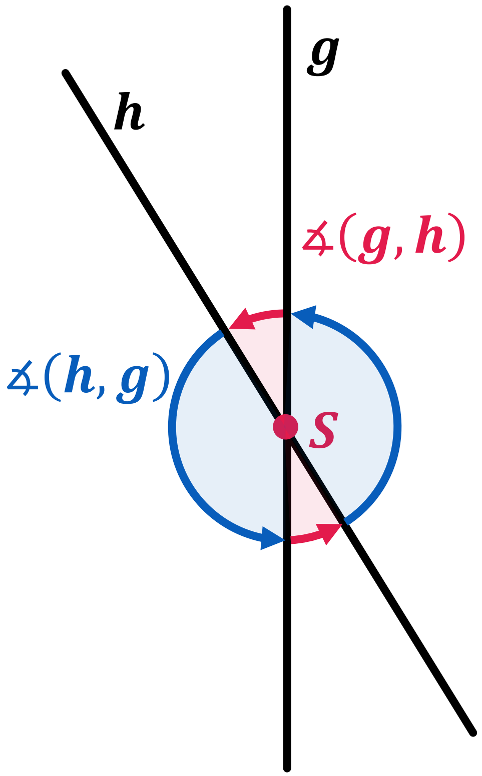
RPTU

Winkel an Geradenkreuzungen

Erinnerung: 1. Ideen der Geometrie

(3) Orientierte Winkel zwischen zwei Geraden

- Zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt $\boldsymbol{S}$ schneiden, legen zwei orientierte Winkel fest, die einen mathematisch positiven Umlaufsinn (gegen den Uhrzeigersinn) besitzen, nämlich die Winkel $\measuredangle(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})$ und $\measuredangle(\boldsymbol{h},\boldsymbol{g})$.
- Die Winkelgrößen dieser beiden Winkel ergänzen sich zu 180°, es gilt also: $|\measuredangle(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})| + |\measuredangle(\boldsymbol{h},\boldsymbol{g})| = 180°$

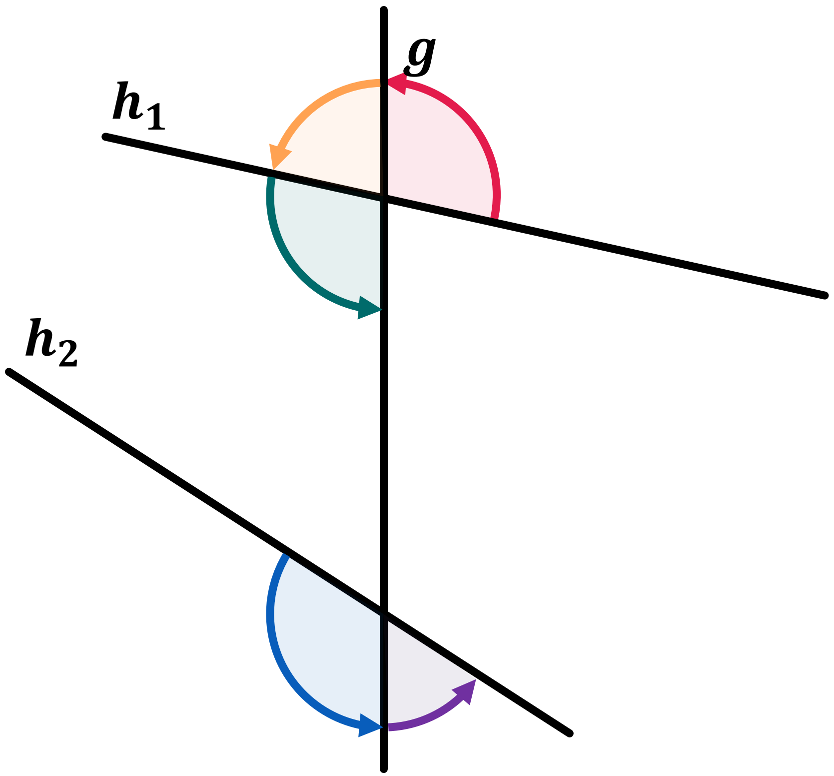


Definition 3.1

An einer Geradenkreuzung bezeichnet man die beiden Winkel, die mit demselben Scheitel einander gegenüber liegen als **Scheitelwinkel**
und die beiden Winkel, die mit einem gemeinsamen Schenkel nebeneinander liegen als **Nebenwinkel**.

Satz 3.1
Scheitelwinkel sind gleich groß,
Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.

Winkel an Doppelkreuzungen



Definition 3.2

Eine Gerade g wird von zwei Geraden h_1 und h_2 in zwei verschiedenen Punkten geschnitten. Zwei Winkel,

- bei denen je ein Schenkel beider Winkel *gleichorientiert* auf g liegt und die beiden anderen Schenkel in *derselben* Halbebene bzgl. g liegen, heißen **Stufenwinkel**.
- bei denen je ein Schenkel beider Winkel entgegengesetzt *orientiert* auf g liegt und die beiden anderen Schenkel in *verschiedenen* Halbebenen bzgl. g liegen, heißen **Wechselwinkel**.

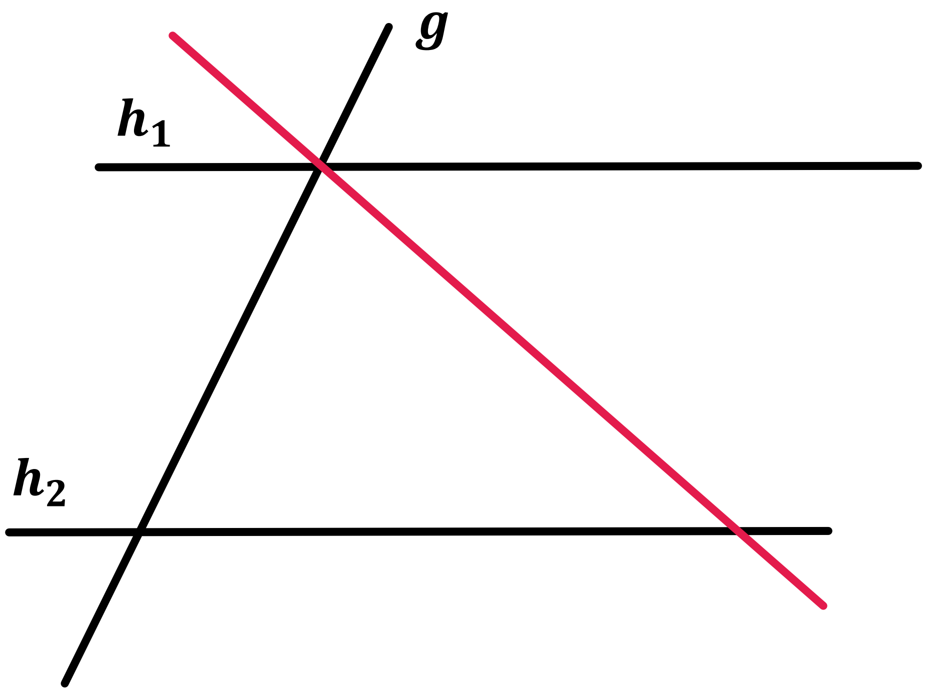
Satz 3.2

Paare von **Stufenwinkel** bzw. **Wechselwinkel** sind genau dann gleich groß, wenn sie an zwei parallelen Geraden liegen.

Winkelsumme

Freiwillige Übung: Winkelsummensätze

- Beweisen Sie Satz 3.3. Nutzen Sie dazu die Sätze 3.1 und 3.2.
- Berechnen Sie die Größe des Innenwinkels eines regelmäßigen n-Ecks und formulieren Sie den Satz über die Winkelsumme im n-Eck.



Satz 3.3
In jedem Dreieck beträgt die Winkelsumme der Innenwinkel stets 180°.

Besondere Dreiecke

Satz 3.4

Ein Dreieck ΔABC ist gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ genau dann, wenn $\alpha = \beta$ gilt.

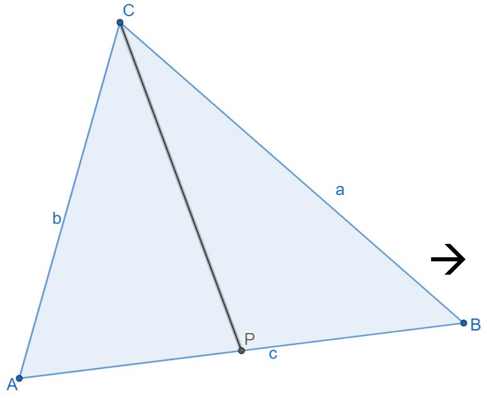
Wenn ein Dreieck ΔABC gleichschenklig ist ($\overline{AC} = \overline{BC}$)
dann gilt $\alpha = \beta$.

Beweis:

Voraussetzung: $\overline{AC} = \overline{BC}$

Zu zeigen: $\alpha = \beta$

Konstruiere P als Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$
→ $\overline{PA} = \overline{PB}$

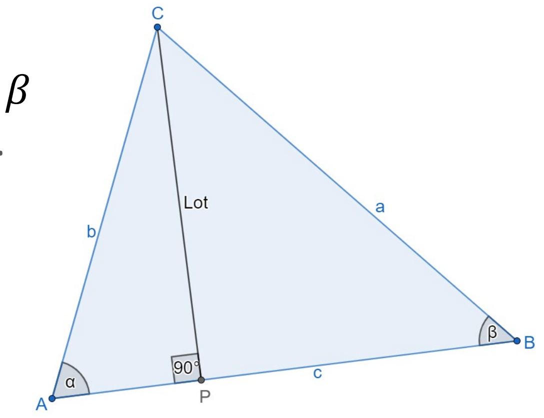


Mit (i) $\overline{AC} = \overline{BC}$ (Vor.)
(ii) $\overline{PA} = \overline{PB}$ (Konstr.)
(iii) $\overline{PC} = \overline{PC}$ (Id.)

→ $\Delta APC \cong \Delta BPC$ (SSS)

→ $\alpha = \beta$

Wenn in einem Dreieck ΔABC gilt $\alpha = \beta$
dann ist es gleichschenklig ($\overline{AC} = \overline{BC}$).



Beweis:

Voraussetzung: $\alpha = \beta$

Zu zeigen: $\overline{AC} = \overline{BC}$

Fälle Lot von C auf Strecke $\overline{AB}$ mit Fußpunkt P.

Mit (i) $\measuredangle CPA = \measuredangle BPC = 90°$ (Konstr.)
(ii) $\overline{PA} = \overline{PA}$ (Id.)
(iii) $90° - \alpha = 90° - \beta$ (Vor.)

→ $\Delta APC \cong \Delta BPC$ (WSW)

→ $\overline{AC} = \overline{BC}$

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

3 Figuren in der Ebene

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

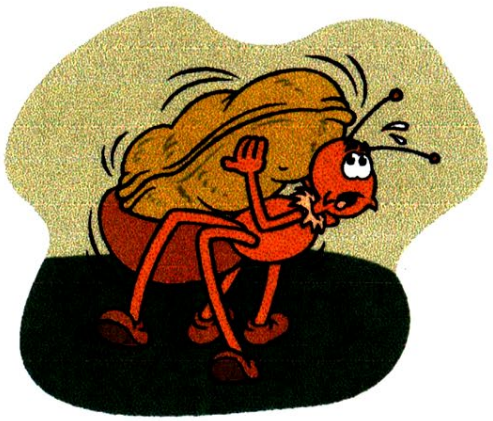
RPTU

Besondere Orte und Linien

Präsenzübung

Aufgabe 1 alle, Aufgabe 2-4 arbeitsteilig: Konstruieren Sie die Orte und Linien und ordnen Sie ihnen Fachbegriffe zu.

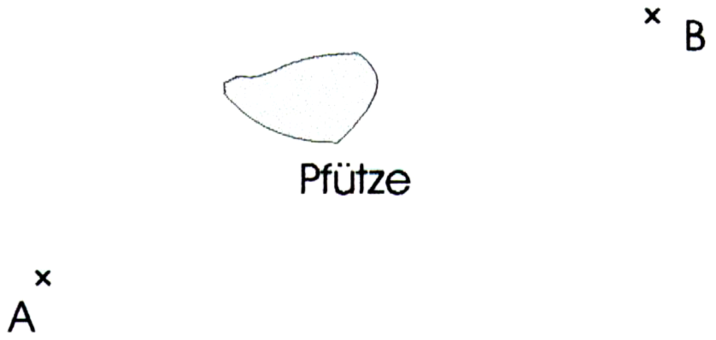
Die gehfaulen Ameisen



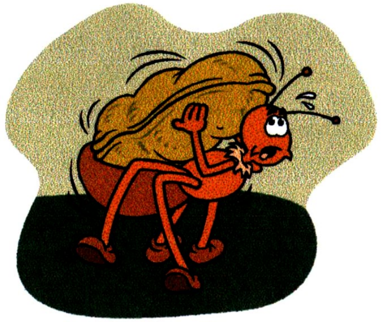
1. Die gemütliche Anatevka und die dicke Berta stehen 50 mm voneinander entfernt. Sie wollen sich zwar treffen, aber keine will weiter als 28 mm laufen.

a) Kennzeichne das Gebiet ihrer möglichen Treffpunkte!
b) Wie weit müssten sie voneinander entfernt sein, damit es nur einen einzigen Treffpunkt gibt?

2. Anatevka und Berta sind für Gehgerechtigkeit und achten deshalb genau darauf, dass keine weiter als die andere krabbeln muss, egal wie weit, Hauptsache beide gleich weit. Zeichne ihre möglichen Treffpunkte ein!



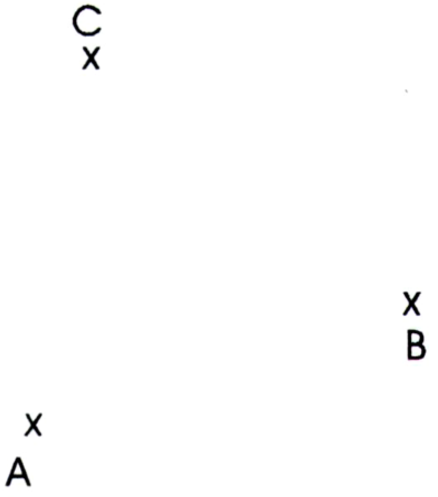
Besondere Orte und Linien



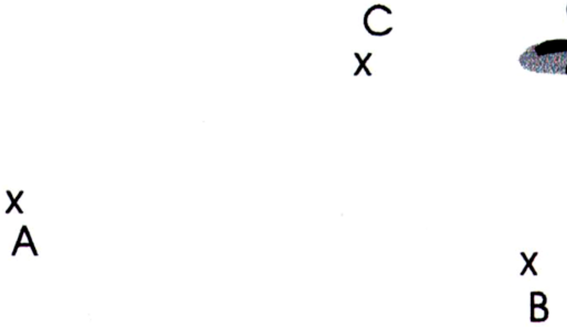
Neues von den gehfaulen Ameisen

3. Clothilde wird Mitglied im Gehgerechtigkeitsverein. Kannst du einen Treffpunkt konstruieren, zu dem alle drei gleich weit krabbeln müssen?

a)

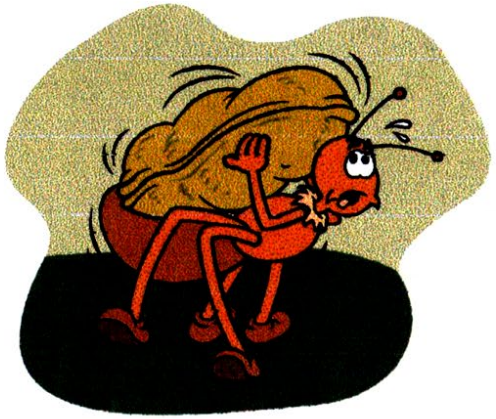


b)



Besondere Orte und Linien

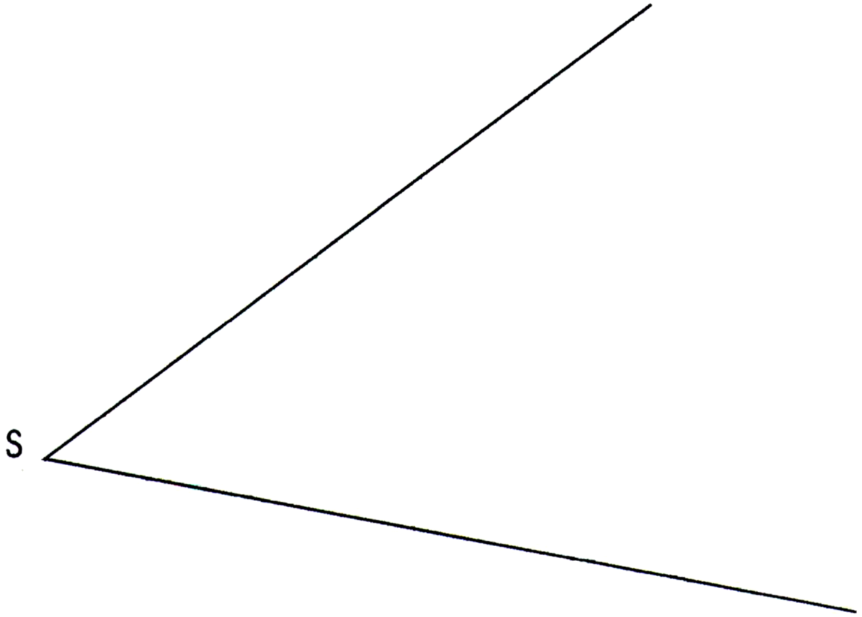
Das Neueste von den gehfaulen Ameisen



4. Anatevka und Berta stehen am Punkt S und machen ein Schwätzchen. Plötzlich setzt ein heftiger Platzregen ein, und zwei Rinnsale treiben die beiden Freundinnen auseinander.

a) Anatevka und Berta werden zur gleichen Zeit weggespült und treiben gleich schnell. Wo könnten sie jetzt sein?

b) Sie wollen sich nun treffen, aber beide wollen gleich weit laufen. Konstruiere die möglichen Treffpunkte!



Besondere Linien im Dreieck

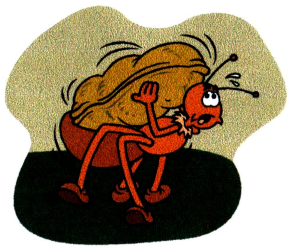
Definition 3.3

a) Die **Mittelsenkrechte** einer Strecke $\overline{AB}$ ist diejenige Gerade, die durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ verläuft und mit $\overline{AB}$ einen rechten Winkel bildet.

b) Die **Winkelhalbierende** eines Winkels ist diejenige Gerade durch den Scheitel des Winkels, die den Winkel in zwei kongruente Winkel zerlegt.

c) In einem Dreieck bezeichnet man eine Gerade, die durch den Mittelpunkt einer Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft, als **Seitenhalbierende**.

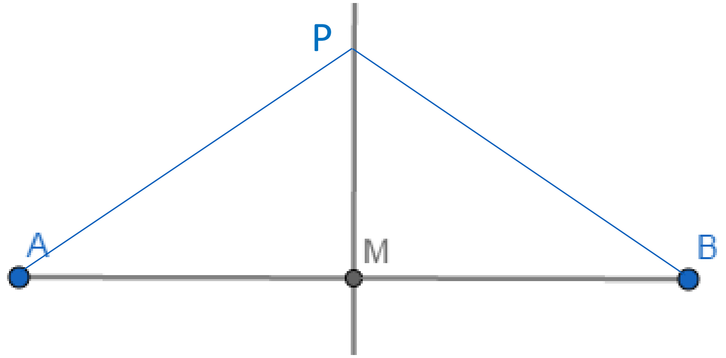
d) In einem Dreieck bezeichnet man eine Gerade, die senkrecht auf einer Seite (genauer der die Seite beinhaltenden Geraden) steht und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft, als **Höhengerade**.



?

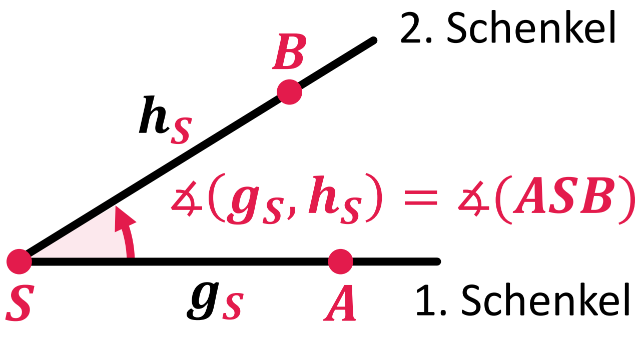
Satz 3.5
Jeder Punkt P auf der **Mittelsenkrechten** einer Strecke $\overline{AB}$ ist von A und B gleichweit entfernt.

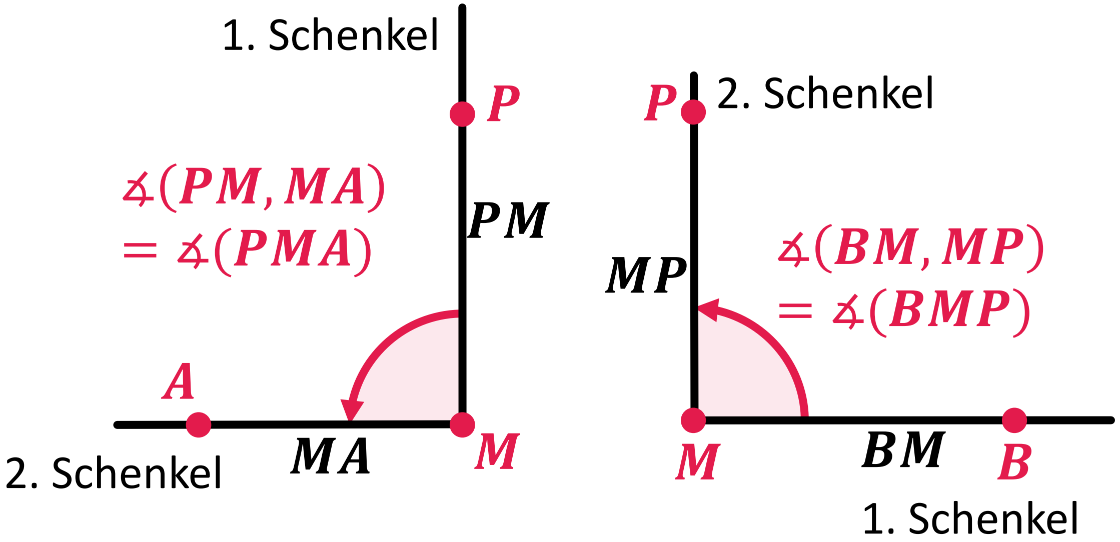
Beweis:
Separates Blatt

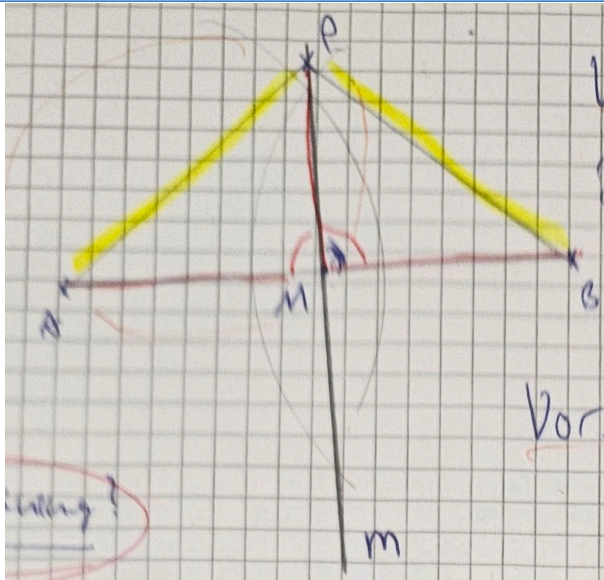


Beweis Satz 3.5

Erinnerung: 1. Ideen der Geometrie







WENN P auf m liegt

DANN $\overline{AP} = \overline{BP}$

Vor.: $\overline{AM} = \overline{BM}$

$\measuredangle PMA = \measuredangle BMP$

zu zeigen: $\overline{AP} = \overline{BP}$

Idee: Kongruenz $\triangle AMP$ und $\triangle PBM$

(i) $\overline{AM} = \overline{BM}$ (Vor.)

(ii) $\measuredangle PMA = \measuredangle BMP$ (Vor.)

(iii) $\overline{MP} = \overline{MP}$ (Id.)

$\Rightarrow$ $\triangle AMP \cong \triangle PBM$ (SWS)

$\Rightarrow$ $\overline{AP} = \overline{BP}$ $\square$

Entdeckungen am Dreieck

Erforschen und Entdecken

(siehe Helmerich & Lengnink 2016, S. 77f.)

Schneiden Sie aus nicht zu dünnem Papier vier Dreiecke aus. Die Form der Dreiecke ist im Prinzip beliebig, für die Erkundung empfiehlt es sich jedoch, ein „allgemeines“ Dreieck zu nehmen, z.B. ein Dreieck mit den **Seitenlängen 8 cm, 7 cm und 6 cm**.

Führen Sie nun die folgenden vier Faltaufträge aus und notieren Sie Ihre Beobachtungen.

Nehmen Sie für jeden Faltauftrag ein neues Dreieck, um die Übersicht zu behalten.

(Beschriften Sie Ihre Dreiecke, um sie auch später noch den Faltaufträgen zuordnen zu können.)

Auftrag 1

Falten Sie die zwei Ecken des Dreiecks so aufeinander, dass die jeweilige Verbindungskante zur Deckung kommt. Falzen Sie die Faltkante sorgfältig glatt und falten Sie dann das Dreieck wieder auf. Führen Sie diesen Vorgang für alle Eckenpaare nacheinander durch.

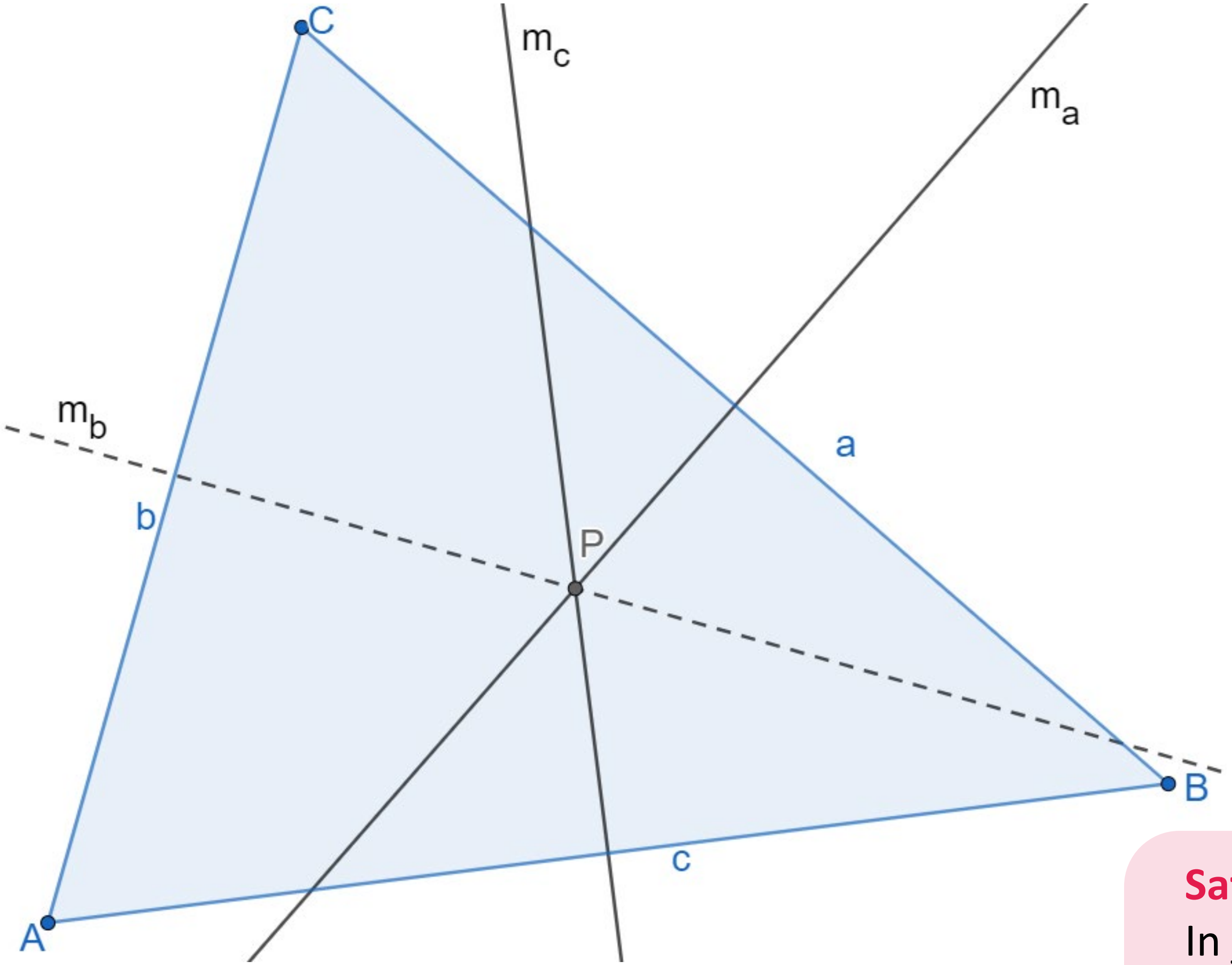
a) In welcher Beziehung stehen die Faltlinien zu den Seiten des Dreiecks?

b) Betrachten Sie nun die Lage der drei Faltlinien zueinander. Was fällt Ihnen auf?

Satz 3.6 - Entwurf

In jedem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten in einem einzigen Punkt. …

Mittelsenkrechten



Beweis:

Voraussetzung: m_c und m_a schneiden sich in Punkt P

Zu zeigen: P liegt auf m_b

P liegt auf $m_c \rightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$ (Satz 3.5)

P liegt auf $m_a \rightarrow \overline{PB} = \overline{PC}$ (Satz 3.5)

$\rightarrow \overline{PA} = \overline{PC}$ (Transitivität)

$\rightarrow P$ liegt auf m_b (Umkehrung von Satz 3.5, noch NICHT bewiesen)

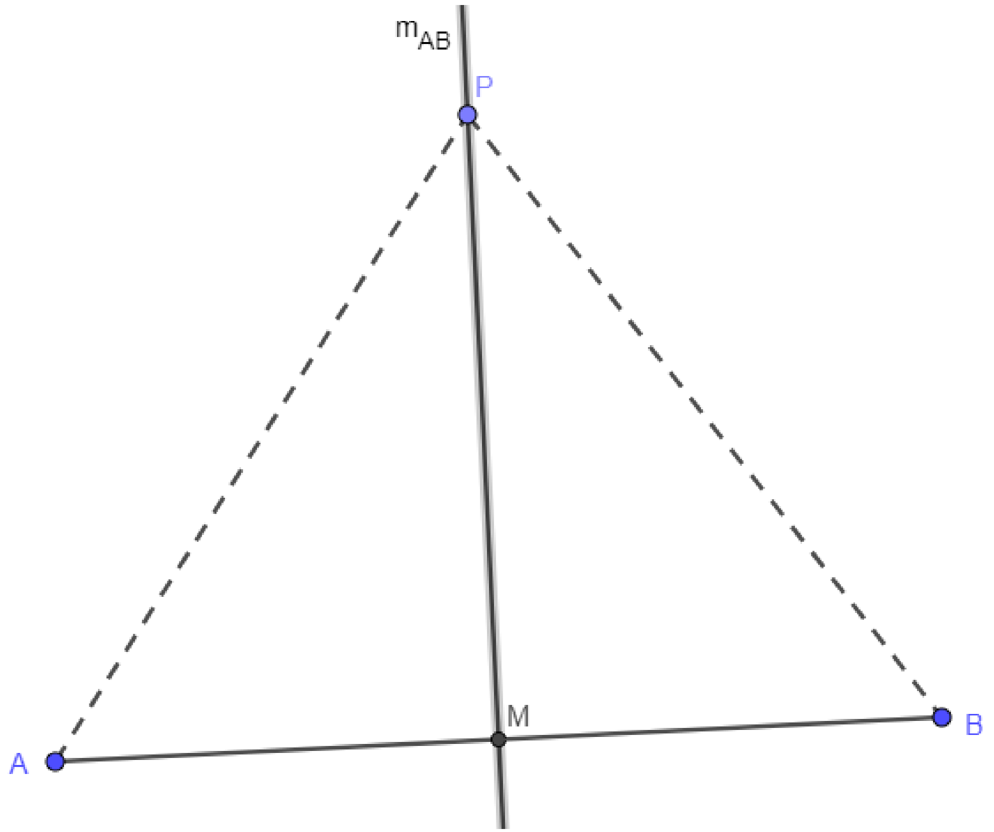
Besondere Bedeutung von P für das Dreieck ABC?

Satz 3.6

In jedem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten in einem einzigen Punkt. Er ist der Mittelpunkt des Umkreises.

Beweis der Umkehrung von Satz 3.5

Umkehrung Satz 3.5
Jeder Punkt P, der von den Endpunkten A und B einer Strecke $\overline{AB}$ gleichweit entfernt ist, liegt auf der **Mittelsenkrechten** m_{AB} der Strecke $\overline{AB}$.



Wenn für einen Punkt P gilt $\overline{PA} = \overline{PB}$
dann liegt P auf der Mittelsenkrechte m_{AB}.

Beweis:
Voraussetzung: $\overline{PA} = \overline{PB}$
Zu zeigen: P liegt auf m_{AB}

Konstruiere M als Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
→ $\overline{AM} = \overline{MB}$

Mit (i) $\overline{PA} = \overline{PB}$ (Vor.)
(ii) $\overline{AM} = \overline{MP}$ (Konstr.)
(iii) $\overline{MP} = \overline{MP}$ (Id.)

→ $\Delta APM \cong \Delta BPM$ (SSS)

→ $\measuredangle PMA = \measuredangle BMP$

→ $\measuredangle PMA = \measuredangle BMP = 90°$ (NW 3.1)

→ P liegt auf m_{AB} (Eindeutigkeit der Mittelsenkrechten)

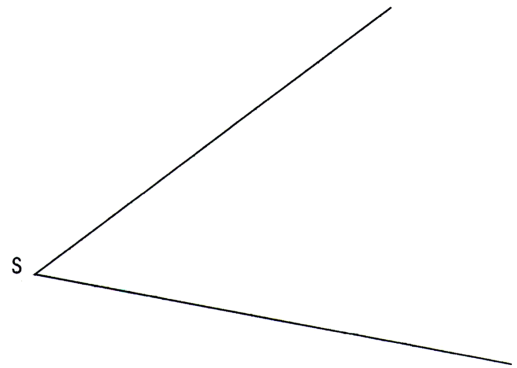
Entdeckungen am Dreieck II

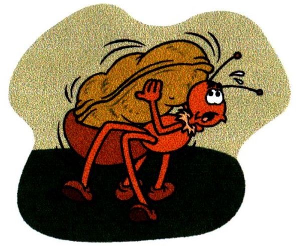
Auftrag 2

Falten Sie nun in einem neuen Dreieck zwei benachbarte Seiten so aufeinander, dass die Seiten exakt aufeinander zum Liegen kommen. Ziehen Sie den Falz dann sorgfältig glatt. Falten Sie das Dreieck wieder auf. Wiederholen Sie diesen Faltvorgang auch für die beiden anderen Seitenpaare.

a) Wie stehen die Faltlinien mit den Innenwinkeln des Dreiecks in Beziehung?

b) Betrachten Sie nun die Lage der drei Faltlinien zueinander. Was fällt Ihnen auf?





Satz 3.7

Jeder Punkt P auf der **Winkelhalbierenden** eines Winkels ist von beiden Schenkeln des Winkels gleichweit entfernt.

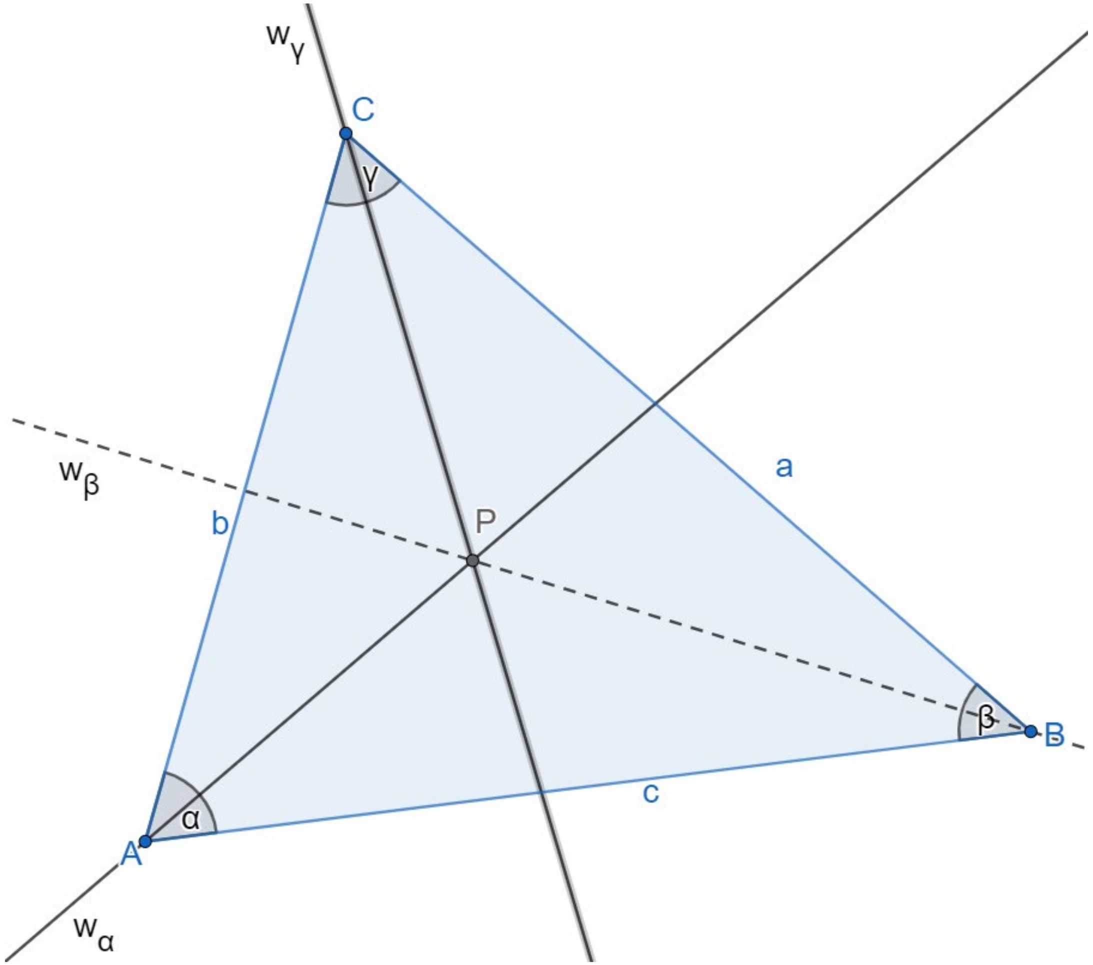
Beweis:

Digitaler Baustein in OLAT

Satz 3.8 - Entwurf

In jedem Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierenden in einem einzigen Punkt. …

Winkelhalbierenden



Beweis:

Voraussetzung: w_γ und w_α schneiden sich in Punkt P

Zu zeigen: P liegt auf w_β

… Übungen

… (Umkehrung von Satz 3.7)

Besondere Bedeutung von P für das Dreieck ABC?

Satz 3.8

In jedem Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierenden in einem einzigen Punkt. Er ist der Mittelpunkt des Inkreises.

Entdeckungen am Dreieck III

Auftrag 3

Halbieren Sie die Seitenlinien eines neuen Dreiecks, indem Sie benachbarte Ecken aufeinanderfalten. Bestimmen so nacheinander die Seitenmitten von allen drei Dreiecksseiten. Machen Sie hierbei nur einen kleinen Knick auf der Dreiecksseite. Falten

Sie nun entlang der Verbindungslinie von einer Seitenmitte zur gegenüberliegenden Ecke. Ziehen Sie den Falz dann sorgfältig glatt. Falten Sie zwischendurch Ihr Dreieck immer wieder auf und führen Sie diesen Faltvorgang für alle drei Seitenmitten durch.

a) Beschreiben Sie die Faltlinien. Was zeichnet alle Punkte auf jeweils einer der Faltlinien aus?

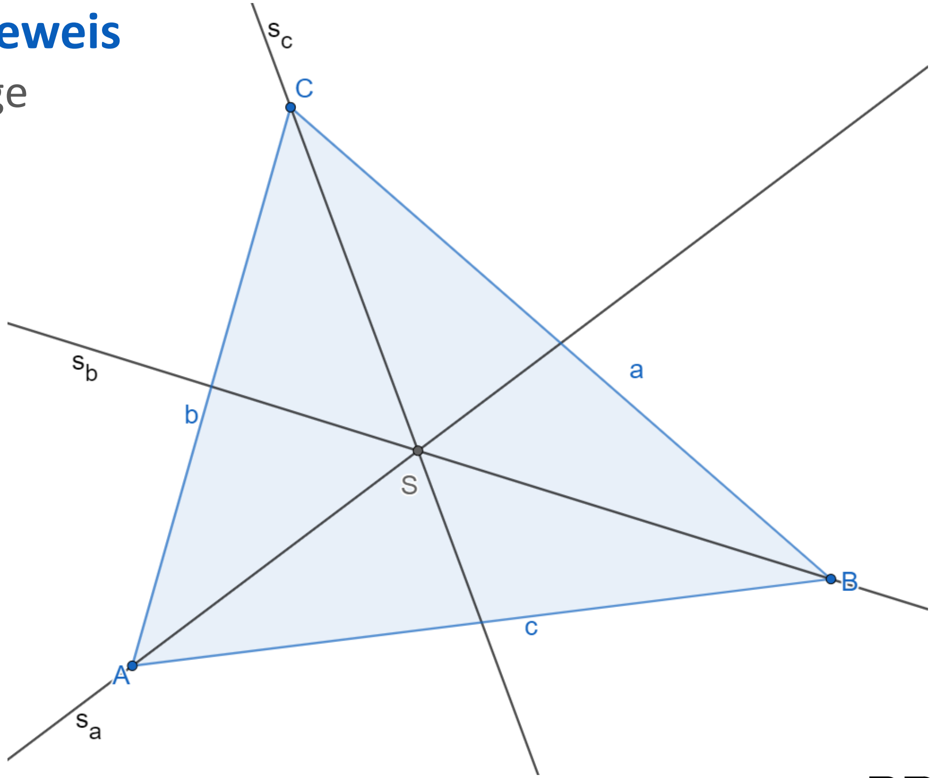
b) Jede Faltlinie teilt das Dreieck in zwei Teildreiecke. Können Sie sehen, dass sie gleich schwer sind?

Satz 3.9

In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt S.
Er ist der Schwerpunkt des Dreiecks.
S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

Ohne Beweis

Freiwillige Übung in OLAT



Entdeckungen am Dreieck IV

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Auftrag 4

Falten Sie nun Ihr letztes vorbereitetes Dreieck so, dass durch die Faltlinie von einer Ecke ausgehend ein Lot auf die gegenüberliegende Seite gefällt wird.

(Falten Sie also eine Seite so aufeinander, dass die beiden Seitenstücke aufeinander zu liegen kommen und der Falz genau durch die der Seite gegenüberliegende Ecke verläuft.).

a) Welche besondere Linie wird durch diesen Faltauftrag erzeugt?

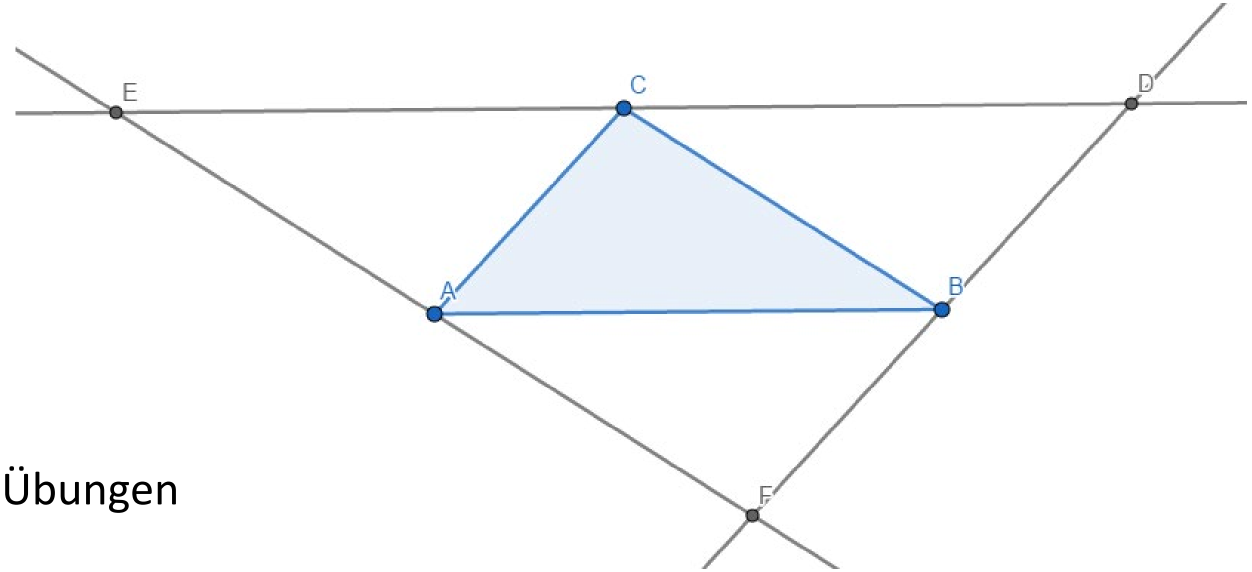
b) Treffen sich auch diese Faltlinien wieder in einem Punkt?

Satz 3.10

In jedem Dreieck schneiden sich die Höhengeraden in einem einzigen Punkt.

Beweis:

Idee: Dreieck einbetten in größeres Dreieck und zurückführen auf bekannten Satz!
Zeichnen Sie dazu zu jeder Seite eine parallele Gerade durch die gegenüberliegende Ecke.



… Übungen

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

3 Figuren in der Ebene

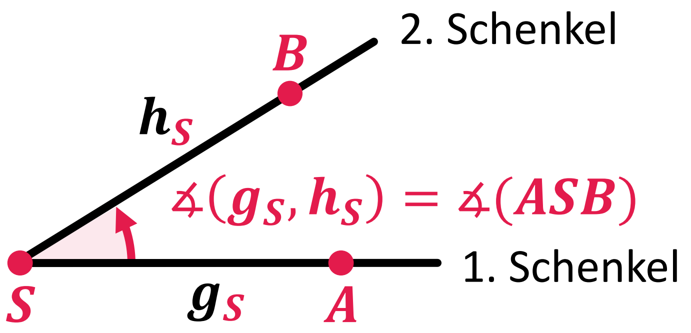
GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

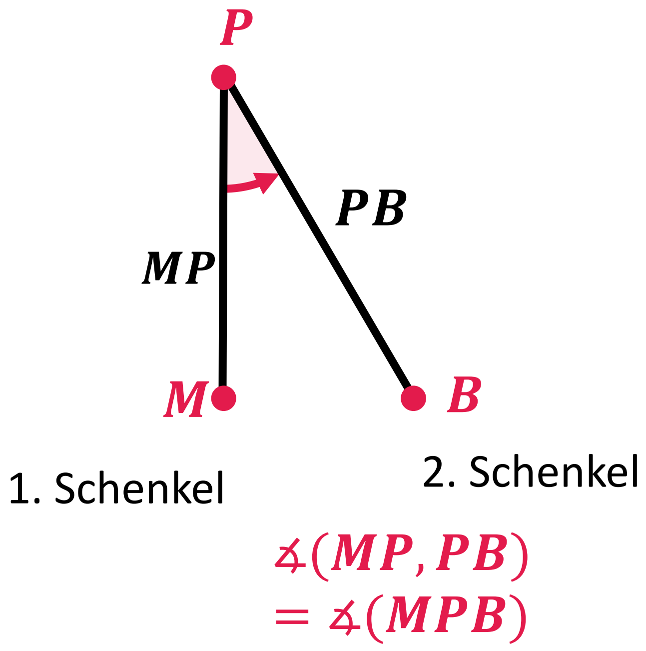
Winkelbezeichnung

Erinnerung: 1 Ideen der Geometrie

(1) Orientierter Winkel zwischen zwei Halbgeraden

- Zwei Halbgeraden g_S und h_S, die einen gemeinsamen Anfangspunkt $\boldsymbol{S}$ besitzen, legen zwei orientierte Winkel fest, die jeweils einen mathematisch positiven Umlaufsinn (gegen den Uhrzeigersinn) besitzen, nämlich die Winkel $\measuredangle(g_S, h_S)$ und $\measuredangle(h_S, g_S)$.





Winkel am Kreis

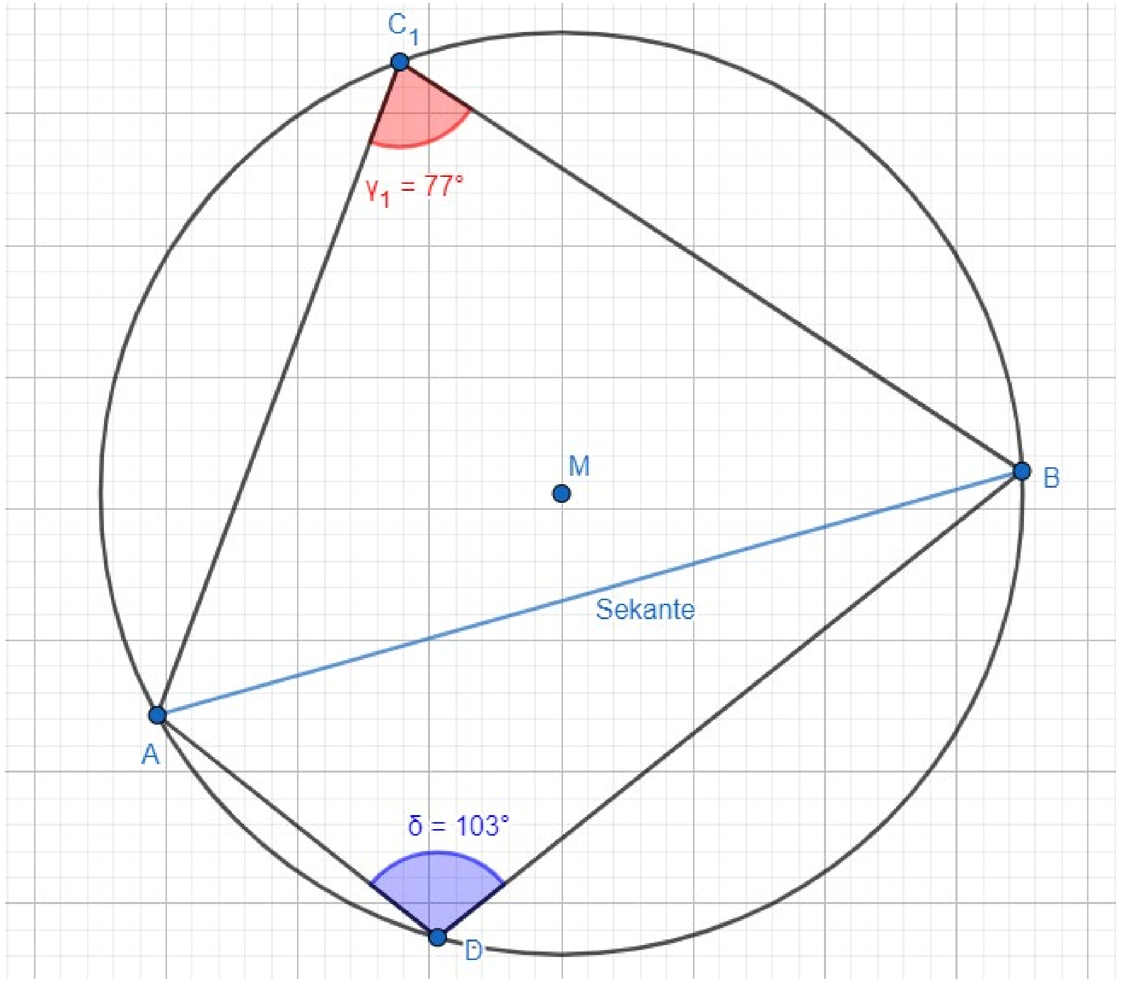
Auftrag

Konstruieren Sie in GeoGebra einen Kreis mit einer Sekante $\overline{AB}$. Legen Sie zwei weitere Punkte auf dem Kreisbogen fest: einen Punkt C_1 auf dem Bogen, der in der Halbebene der Gerade durch A und B liegt, in der auch M liegt, der andere Punkt D auf dem Bogen in der anderen Halbebene. Zeichnen Sie die Winkel $\measuredangle AC_1B$ und $\measuredangle BDA$ ein.

a) Variieren Sie die Position von C_1 und D und beobachten Sie die Winkel. Formulieren Sie erste Entdeckungen.

b) Variieren Sie nun die Position von A und B und anschließend C_1 und D und beobachten Sie die Winkel. Formulieren Sie Ihre Entdeckungen.

c) Verbinden Sie nun A und B mit dem Kreismittelpunkt M und zeichnen Sie den Winkel $\measuredangle AMB$ ein.



https://www.geogebra.org/m/zyt3hrx4

Winkel am Kreis

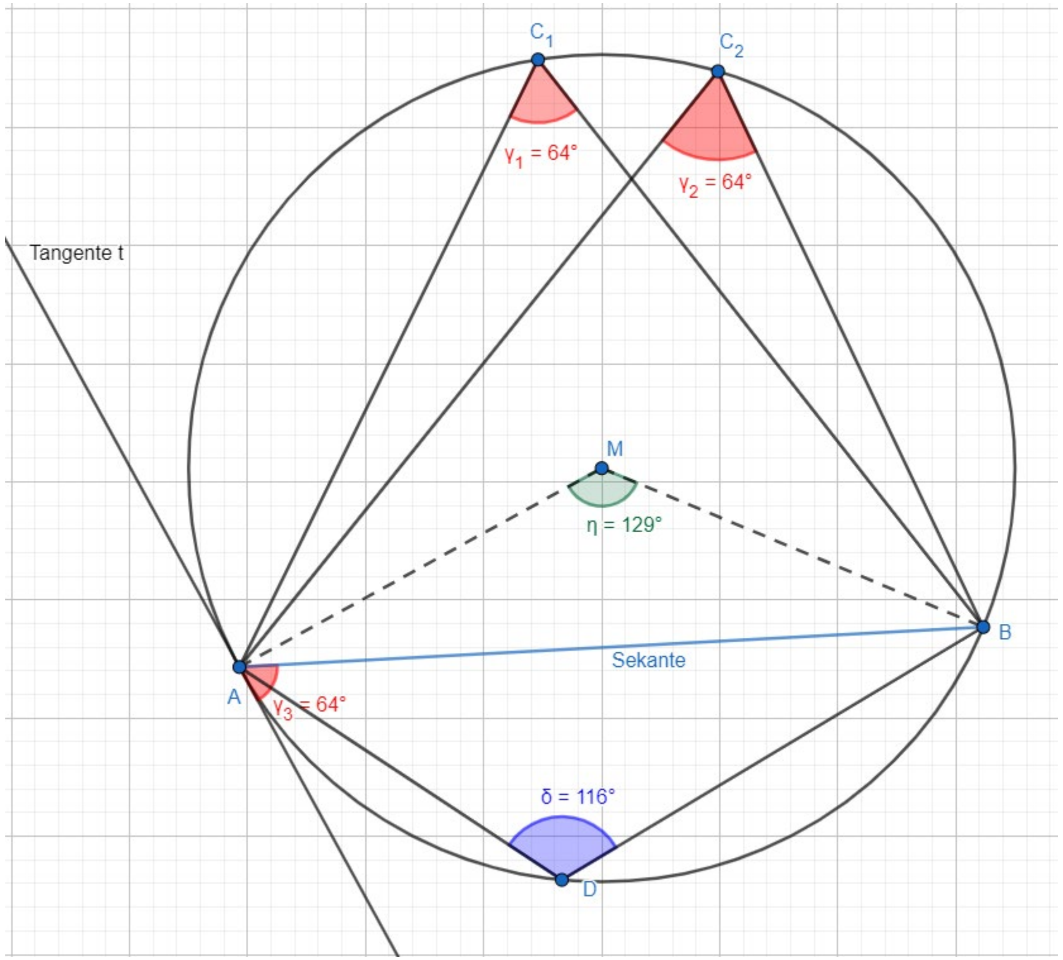
Definition 3.4

a) Liegen die Endpunkte einer Strecke auf einem Kreis, so wird die Strecke auch **Sehne** des Kreises genannt. Sehnen durch den Mittelpunkt des Kreises heißen **Durchmesser**.

b) $\overline{AB}$ sei Sehne eines Kreises. Liegen die Punkte C_i $(i = 1,2, \ldots)$ auf dem Kreis, so heißen die Winkel $\sphericalangle AC_iB$ **Umfangswinkel** oder auch **Peripheriewinkel** über der Sehne $\overline{AB}$.

c) $\overline{AB}$ sei Sehne eines Kreises mit Mittelpunkt M. Der Winkel $\sphericalangle AMB$ heißt dann **Mittelpunktswinkel** über der Sehne $\overline{AB}$.

d) Eine Gerade, die mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat, heißt **Tangente**.



Winkel am Kreis

Satz 3.13

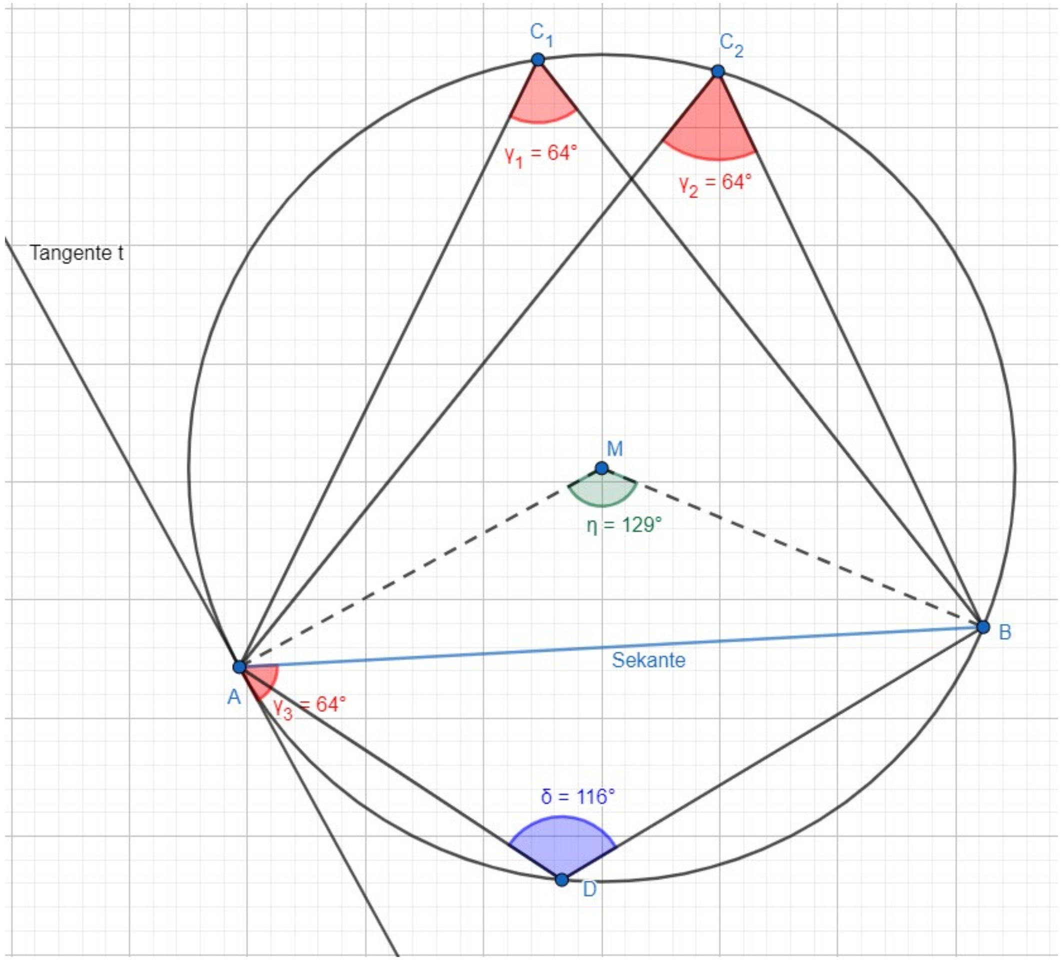
a) Umfangswinkel über einer Sehne deren Scheitelpunkte auf demselben Kreisbogen (der beiden von der Sehne erzeugten) liegen, sind gleich groß.

b) Umfangswinkel über einer Sehne, deren Scheitelpunkte auf unterschiedlichen Kreisbögen liegen, ergänzen sich zu $180°$.

c) Der Mittelpunktswinkel $\measuredangle AMB$ über der Sehne $\overline{AB}$ ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel $\measuredangle ACB$.

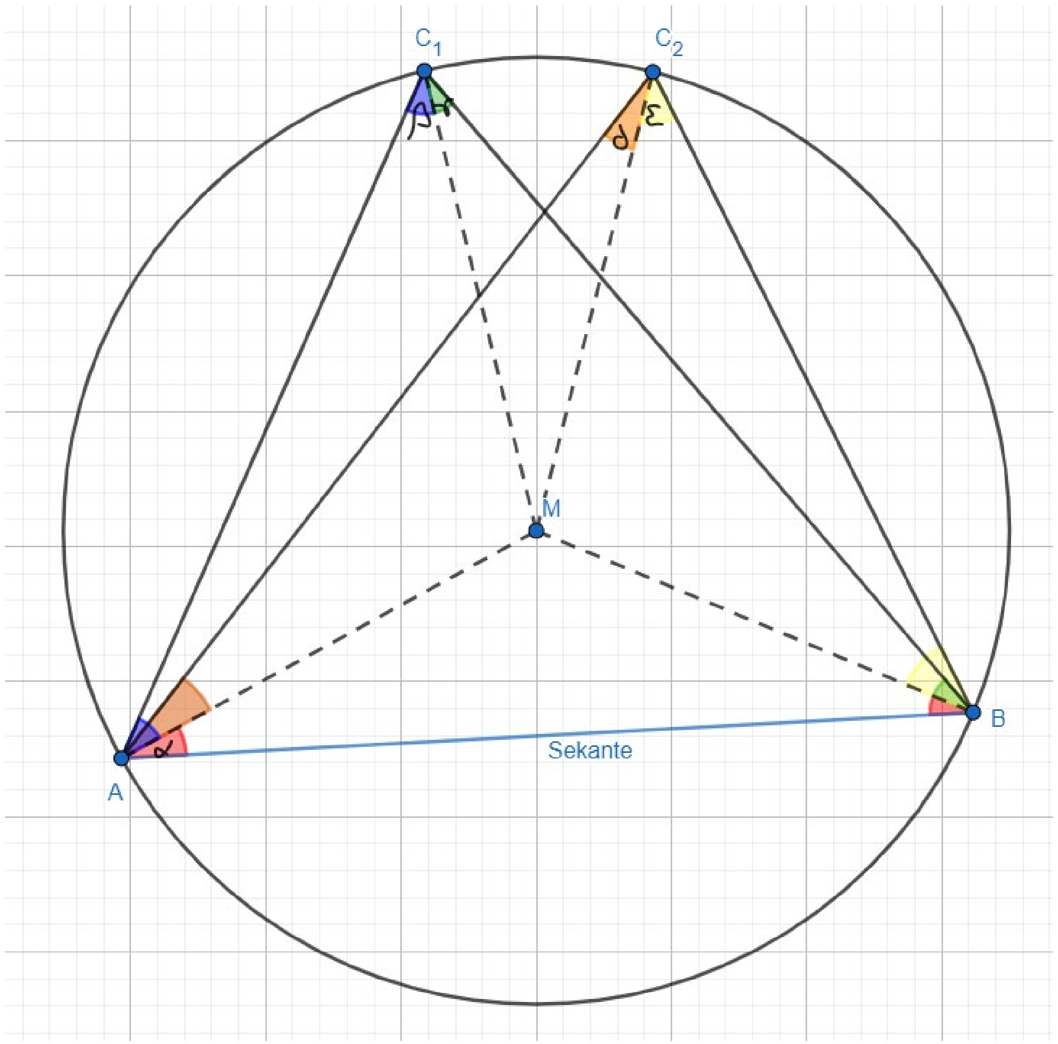
d) Spezialfall von c) (Satz des Thales):
Liegt der Punkt C eines Dreiecks ΔABC auf dem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

e) Ist $\overline{AB}$ eine Sehne und t eine Tangente an den Kreis im Punkt A, so sind der Winkel, den die Sehne und die Tangente miteinander bilden und der Umfangswinkel über $\overline{AB}$ gleich groß.



Winkel am Kreis – Satz 3.13a)

Wenn für einen Kreis um M mit den Punkten $\mathrm{A}, \mathrm{B}, C_1$ und C_2 auf der Kreislinie gilt, dass C_1 und C_2 in derselben Halbebene wie M bzgl. der Geraden durch A und B liegen
dann sind die Umfangswinkel $\measuredangle AC_1B$ und $\measuredangle AC_2B$ gleich groß.



Beweis:
Voraussetzung: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{C_1M} = \overline{C_2M}$
Zu zeigen: $\measuredangle AC_1B = \measuredangle AC_2B$
oder $\beta + \gamma = \delta + \varepsilon$

1. Weisen Sie die Kongruenz der Winkel (Farbliche Kennzeichnung) nach.
2. Betrachen Sie die Winkelsummen in den Dreiecken ΔABC_1 und ΔABC_2.

Satz 3.13a) vollständig bewiesen?

https://www.geogebra.org/m/adjsqny2

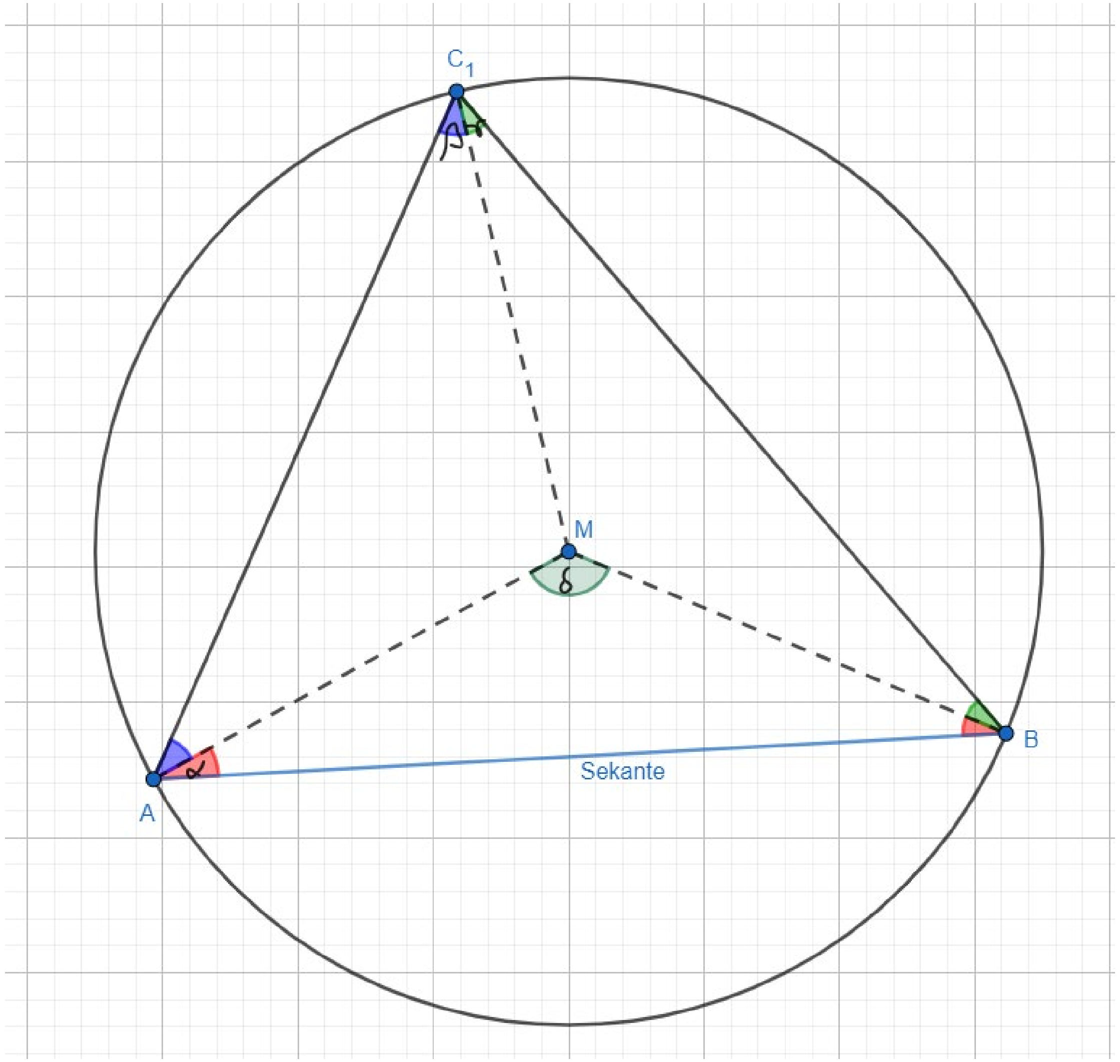
Winkel am Kreis – Satz 3.13c)

Wenn für einen Kreis um M mit den Punkten A, B *und* C_1 auf der Kreislinie gilt, dass C_1 in derselben Halbebene wie M bzgl. der Geraden durch A und B liegt
dann ist der Mittelpunktswinkel $\measuredangle AMB$ doppelt so groß wie der Umfangswinkel $\measuredangle AC_1B$.

Beweis:

Voraussetzung: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{C_1M}$

Zu zeigen: $\measuredangle AMB = 2\measuredangle AC_1B$ oder $\delta = 2\beta + 2\gamma$



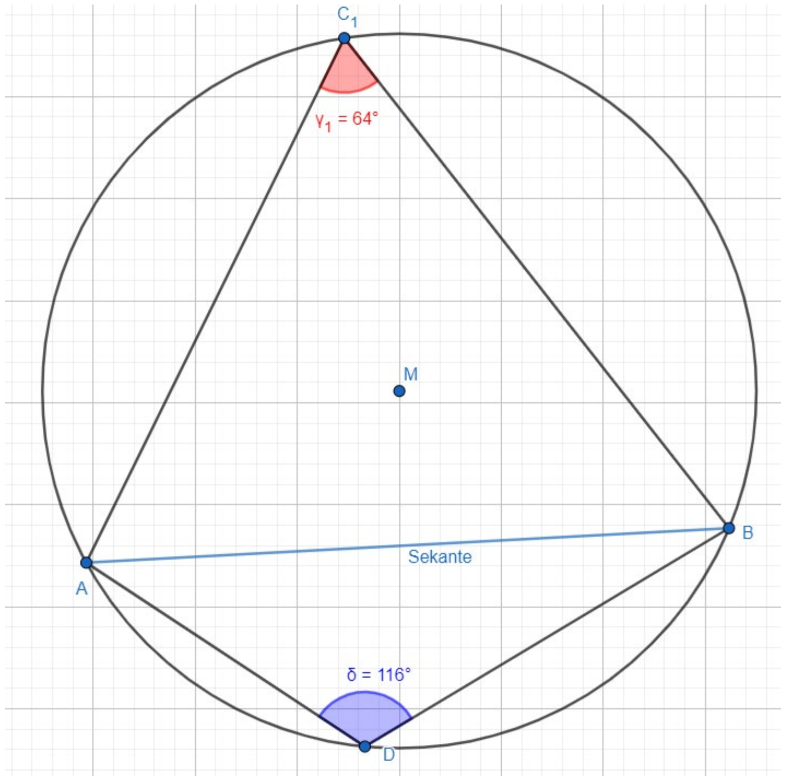
https://www.geogebra.org/m/tynpqvbc

Vierecke mit Umkreis

Welche Dreiecke haben einen Umkreis? – Begründung? Und wie sieht es bei den Vierecken aus?

Idee Vierecke mit Umkreis zu konstruieren:

Dreieck zeichnen, Umkreis über Mittelsenkrechten konstruieren, weiteren Punkt auf Umkreis festlegen und mit den Eckpunkten des Dreiecks verbinden
→ Viereckseiten sind Sehnen des Kreises: Sehnenviereck.



Satz 3.14

Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Summe der gegenüberliegenden Winkel $180°$ beträgt.

Beweisidee:

→ Satz 3.13 b)
← Umkreis um Dreieck ABD, Annahme C_1 nicht auf Kreisbogen …
(s. Krauter & Bescherer 2013, S. 75)

https://www.geogebra.org/m/zyt3hrx4

Vierecke mit Umkreis

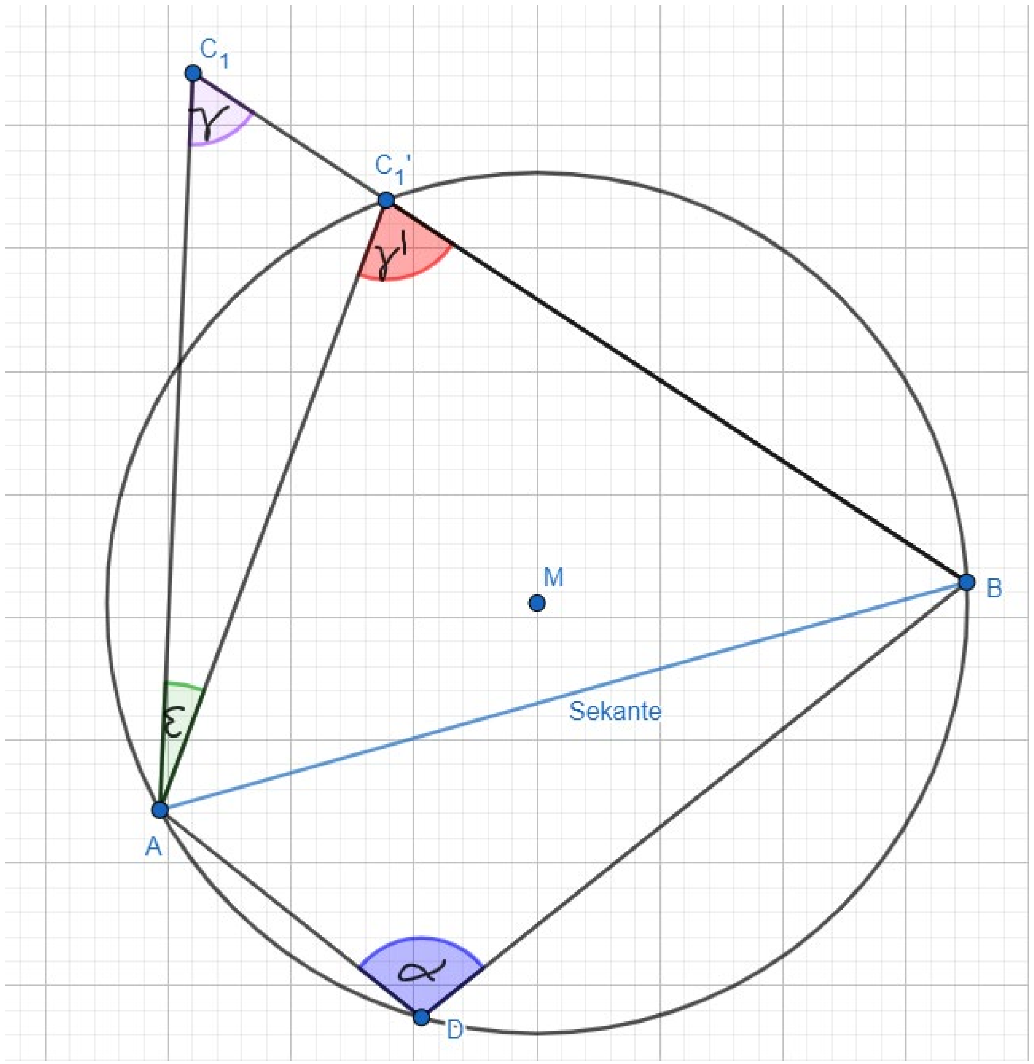
Satz 3.14
Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Summe der gegenüberliegenden Winkel 180° beträgt.

Wenn die Summe der gegenüberliegenden Winkel im Viereck 180° ergibt dann ist das Viereck ein Sehnenviereck.

Beweis:

Voraussetzung: $\measuredangle BDA + \measuredangle AC_1B = 180°$ $(\alpha + \gamma = 180°)$
Zu zeigen: C_1 liegt auf Kreis um M mit Radius $\overline{AM}$

Annahme: C_1 liegt NICHT auf Kreis (Widerspruchsbeweis)
→ $\overline{BC_1}$ schneidet Kreis in $C_1{}'$
→ Es ex. Dreieck $\Delta AC_1C_1{}'$ mit $\varepsilon > 0°$
→ $ADBC_1'$ ist ein Sehnenviereck (Def.)
→ $\alpha + \gamma' = 180°$ (andere Richtung von 3.14)
andererseits gilt: $\gamma' = \gamma + \varepsilon$ (NW 3.1 und WSD 3.3)
→ $\alpha + \gamma + \varepsilon = 180° = \alpha + \gamma$ (Vor.)
→ $\varepsilon = 0°$ Widerspruch



https://www.geogebra.org/m/ttgmm62c

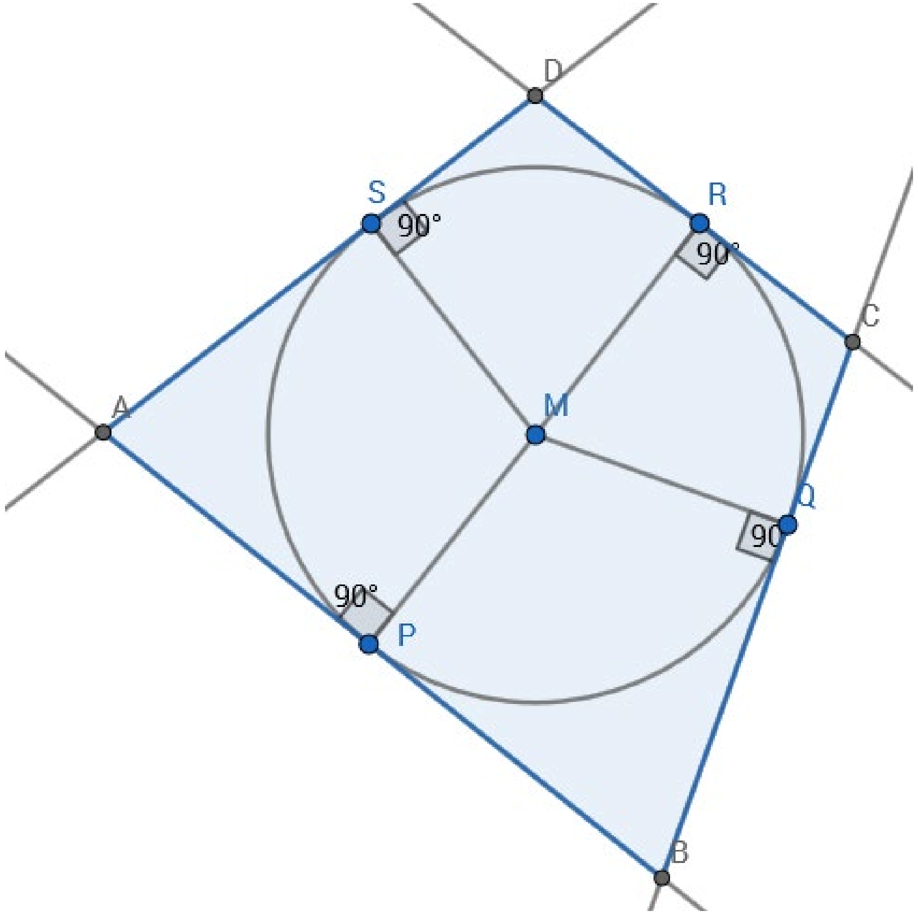
Vierecke mit Inkreis

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Welche Dreiecke haben einen Inkreis? – Begründung? Und wie sieht es bei den Vierecken aus?

Idee Vierecke mit Inkreis zu konstruieren:

Kreis zeichnen, an vier Punkten auf Kreislinie Tangenten konstruieren, Schnittpunkte der Tangenten sind die Eckpunkte des Vierecks
→ Tangentenviereck.



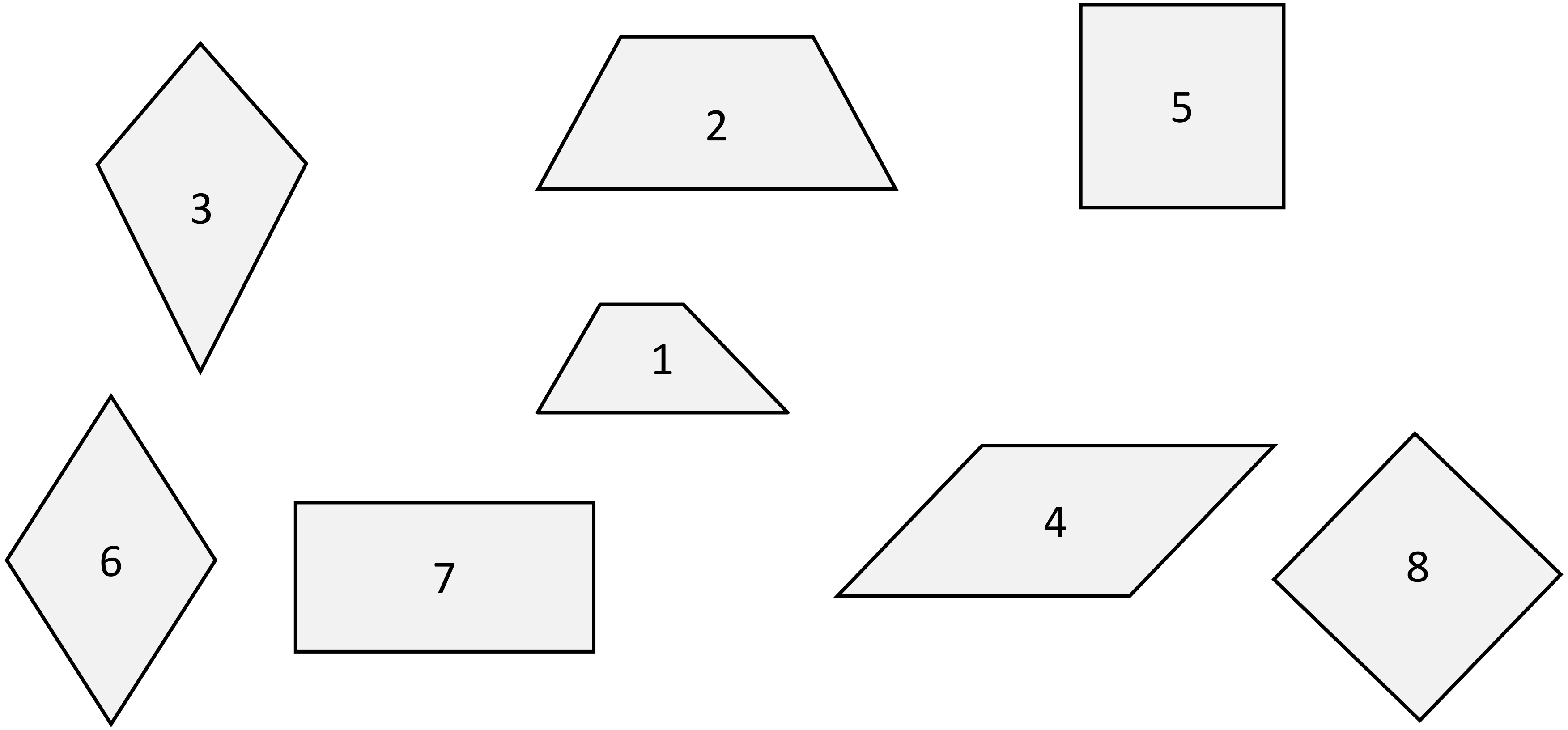
Satz 3.15
Ein Viereck ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn die Summe der Paare gegenüberliegender Seiten gleich ist.

Beweisidee:

→ $\Delta AMP \cong \Delta AMS$ (SsW)
← (s. Krauter & Bescherer 2013, S. 77/78)

Vierecke definieren

Definieren Sie die gezeigten Vierecke.



Trapez

Parallelogramm

Quadrat

Raute

Rechteck

Besondere Vierecke

Definition 3.5 Entwürfe

Ein **Quadrat** ist ein Viereck ...

a) …mit vier rechten Winkeln und vier gleich langen Seiten.

b) …

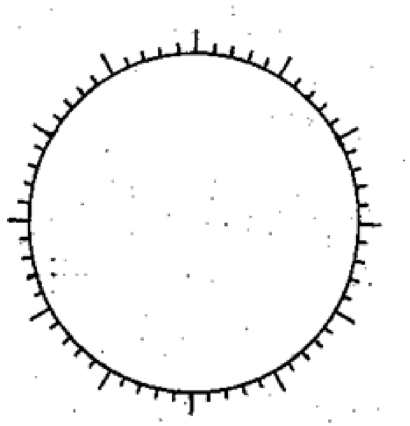
Finden Sie mindestens vier weitere, möglichst unterschiedliche Definitionen für das Quadrat.

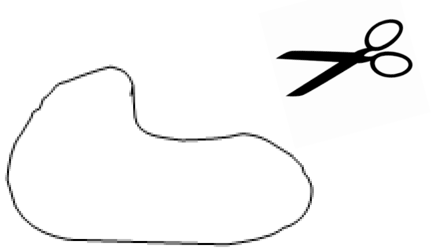
Warum?

Anknüpfen an Alltagsvorstellungen

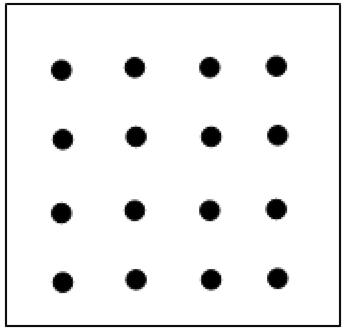
Material führt auf unterschiedliche Eigenschaften

Welche Eigenschaften des Quadrats werden bei Zuhilfenahme der unten dargestellten Objekte jeweils zur Konstruktion genutzt? Notieren Sie!





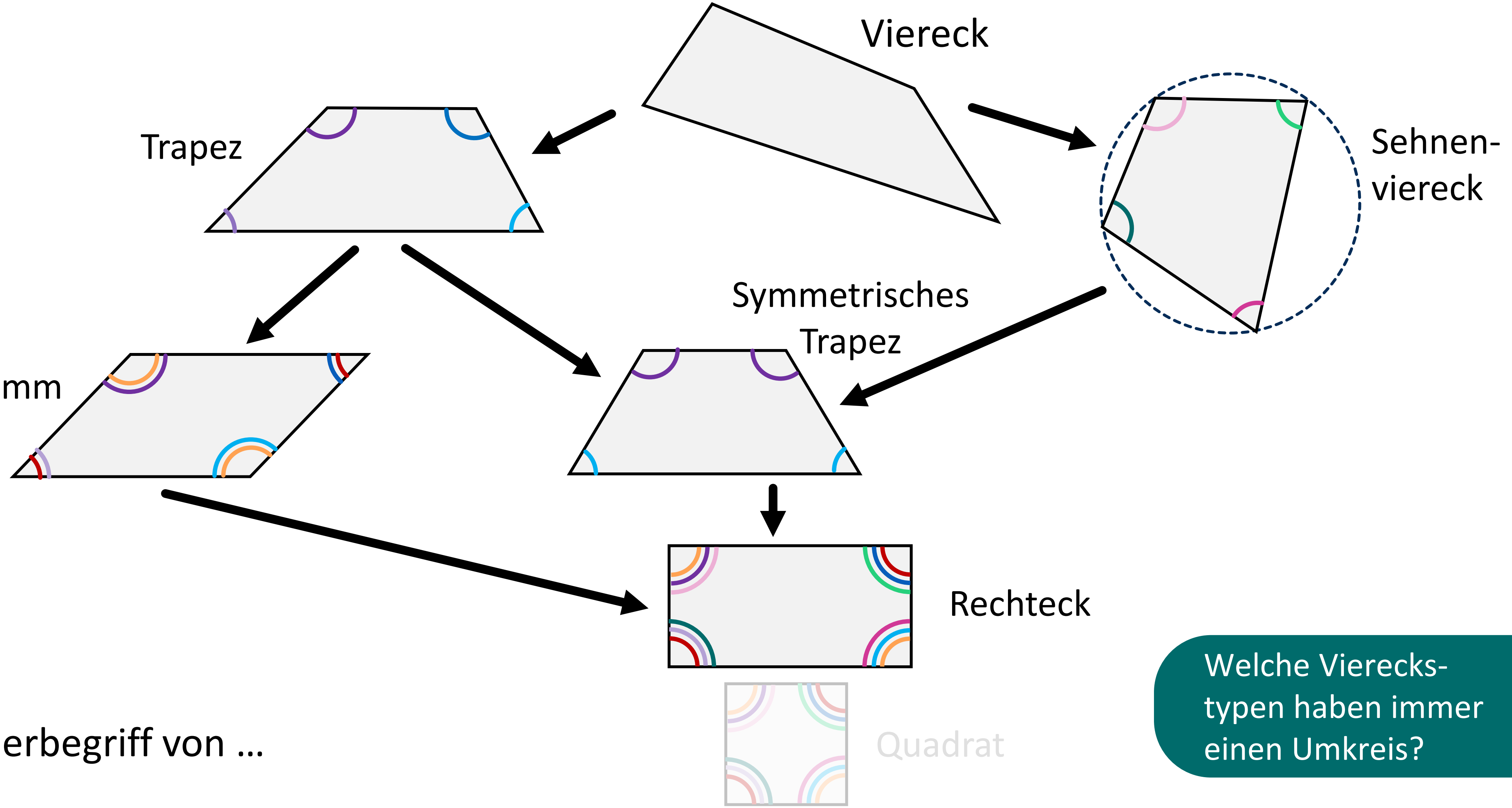
ungleichmäßiges Papier



Als Ergänzung Text von Gray and Tall (1994) lesen – s. OLAT

Haus der Vierecke

Strukturierung
über Innenwinkel



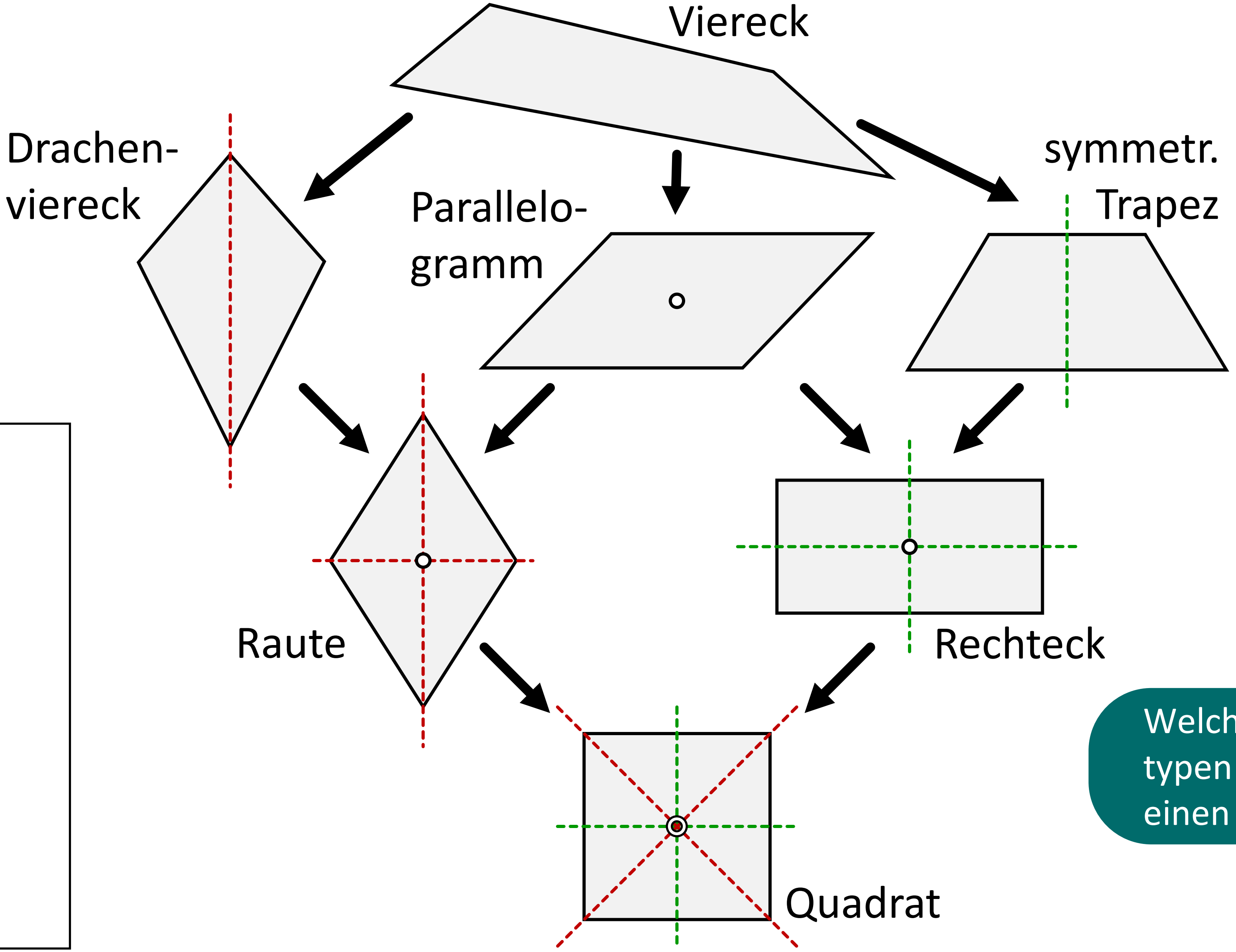
Oberbegriff
Unterbegriff
Nachbarbegriff

→ … ist Oberbegriff von …

Welche Vierecks-
typen haben immer
einen Umkreis?

Haus der Vierecke

Strukturierung über Symmetrien



... ist Oberbegriff des ...

Symmetrieachse (durch die Seitenmitten)

Symmetrieachse (durch die Eckpunkte)

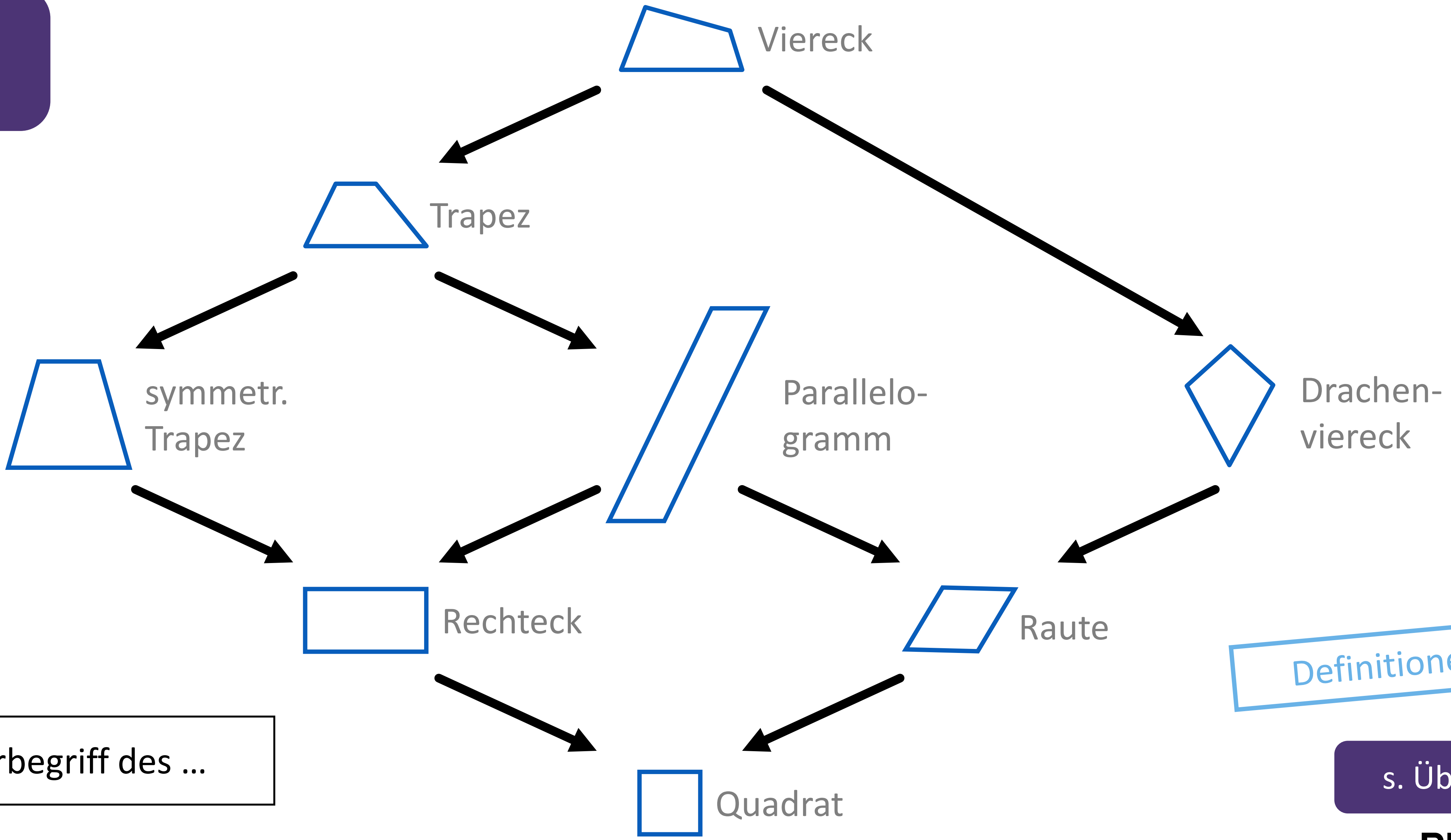
Symmetriezentrum (Punktsymmetrie)

Drehzentrum (Drehwinkel: Vielfache von 90°)

Welche Vierecks-typen haben immer einen Inkreis?

Haus der Vierecke

Strukturierung
über Seiten
und Winkel



Definitionen

→ … ist Oberbegriff des …

s. Übung!

Kontakt

Dr. Susanne Digel

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

s.digel@rptu.de

dms.nuw.rptu.de

RPTU