Geometrie

Modul 4b

Jürgen Roth

23.11.2023 juergen-roth.de

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Geometrie 4b

1. Ideen der Geometrie
2. Kongruenzabbildungen der Ebene
3. Figuren in der Ebene
4. Flächeninhalte
5. Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren
6. Satzgruppe des Pythagoras

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

2

Geometrie 4b

Kongruenzabbildungen der Ebene

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

2 Kongruenzabbildungen der Ebene

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

2 Kongruenzabbildungen der Ebene

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

Abbildung?

Definition 2.1

Eine **Funktion** oder **Abbildung** $f: A \to B$ von einer Menge A auf die Menge B ist eine Zuordnung, die jedem Element von A genau ein Element von B zuordnet.

Bemerkung

In der Schulalgebra haben Sie unter anderem Funktionen kennengelernt, die von der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ abbilden, wie etwa die Quadrat-funktion:

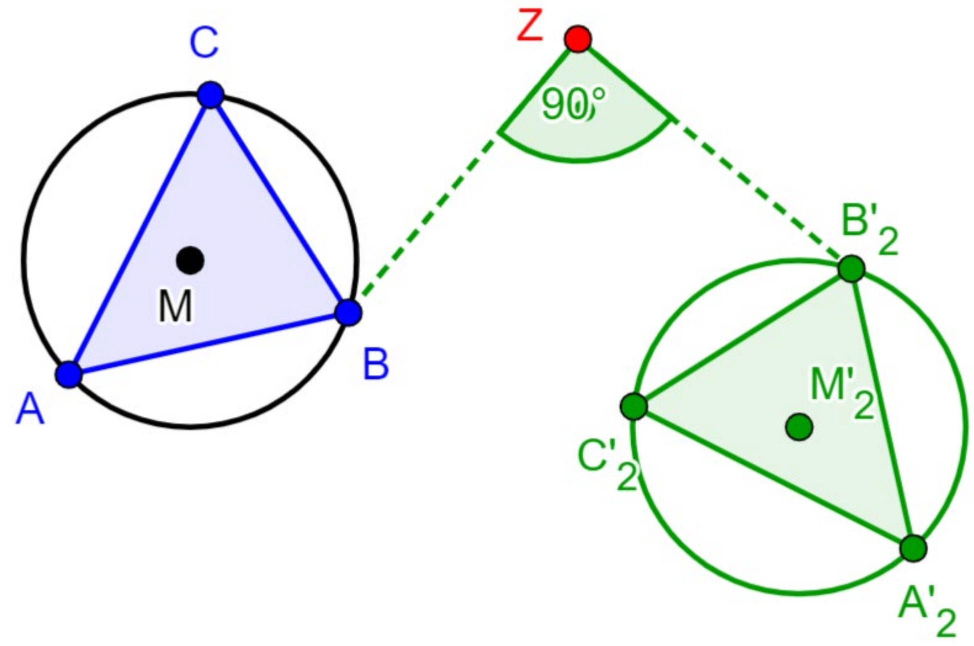
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$$

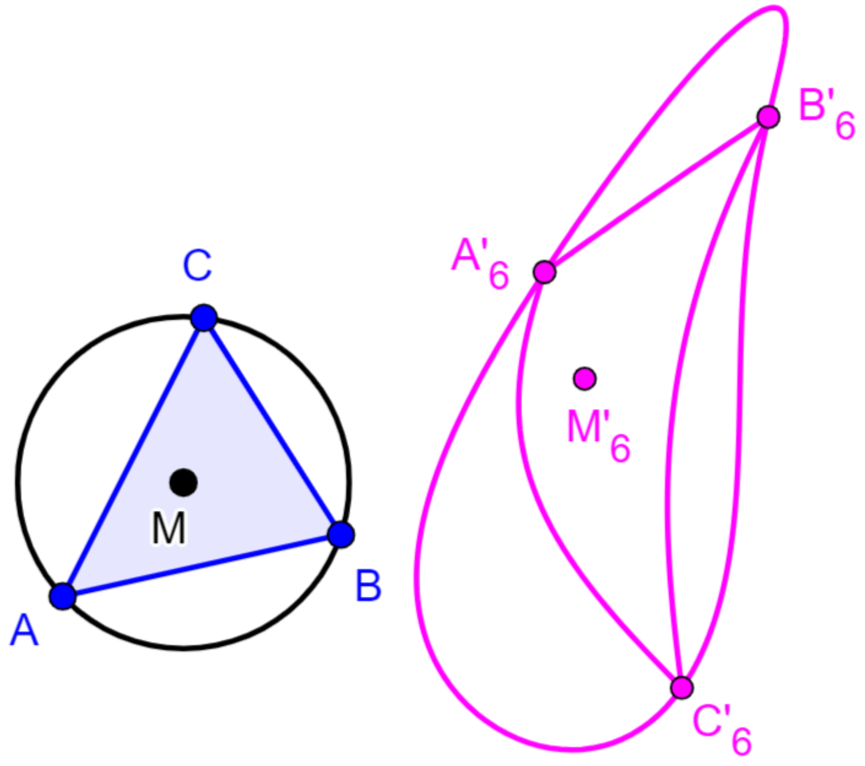
Abbildungen der Ebene ε auf sich

- In der ebenen Geometrie beschäftigen wir uns mit Abbildungen φ der (Zeichen-)Ebene ε auf sich selbst.
- Eine solche Abbildung φ ordnet jedem Punkt P der Ebene ε genau einen Bildpunkt $P' = \varphi(P)$ zu.
$$\varphi: \varepsilon \to \varepsilon, P \mapsto \varphi(P) = P'$$
- Machen Sie sich klar, dass eine solche Abbildung φ die gesamte Ebene ε auf sich selbst abbildet. Damit hat – bezüglich φ – jeder Punkt P der Ebene ε eine Doppelrolle: Er ist sowohl ein Originalpunkt als auch ein Bildpunkt.
- Wir werden uns auf Abbildungen beschränken, die **bijektiv** sind, für die also gilt, dass jeder Original-punkt einen eindeutig bestimmten Bildpunkt besitzt und umgekehrt jeder Bildpunkt auch einen eindeutig bestimmten Originalpunkt.

Beispiele für Abbildungen

Drehung $D_{Z,90°}$ der Ebene um das Drehzentrum Z gegen den Uhrzeigersinn um den Drehwinkel $\varphi = 90°$. 1





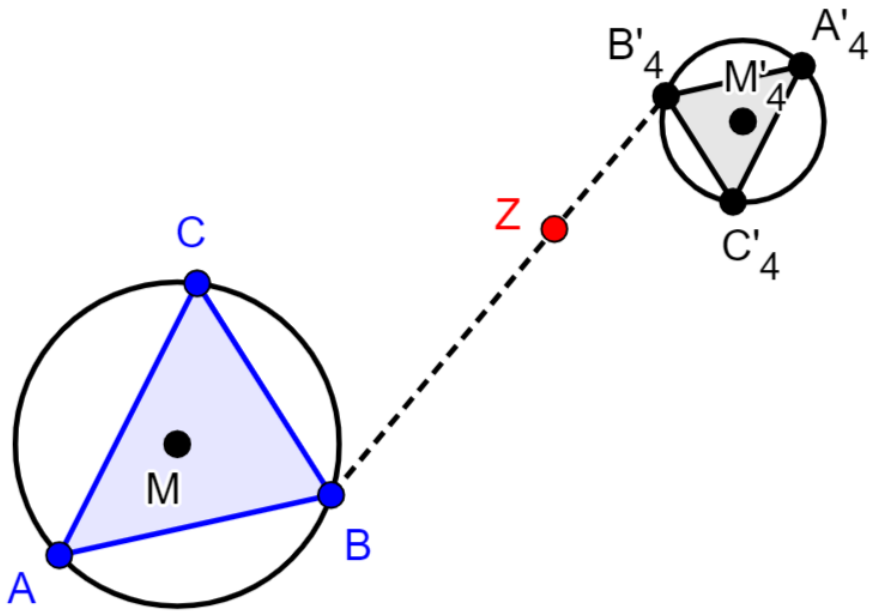
2 **Algebraisch definierte Abbildung** der Ebene: Jedem Punkt $P(x|y)$ wird der Punkt $P'(x'|y')$ mit $x' = x + \sin(y) + 5$ und $y' = x - 2y$ zugeordnet.

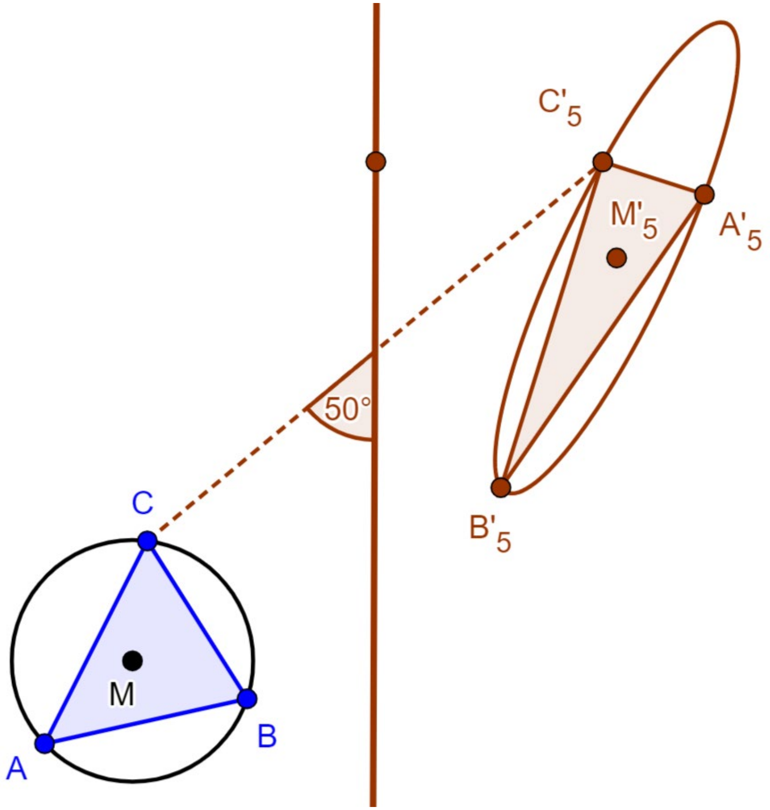
 https://www.geogebra.org/m/vh8bmfch

Beispiele für Abbildungen

Zentrische Streckung $Z_{Z,k}$ der Ebene um das Streckungszentrum Z und mit Streckungsfaktor $k = -0{,}5$.

3





4

Schrägspiegelung der Ebene: Jeder Punkt wird an der Achse a parallel zu PP' schräggespiegelt, d.h. für alle Punktepaare Q und Q' gilt: $QQ' \parallel PP'$ und die Achse halbiert die Strecke QQ'.

Präsenzaufgabe

Beantworten Sie die folgenden Fragen für jede der vier Abbildungen 1 2 3 4

(1) **W**elche geometrischen Eigenschaften der Figuren (Längen, Winkelgrößen, Flächeninhalte, Geradlinigkeit, ...) bleiben bei der Abbildung erhalten und welche ändern sich?

(2) **G**ibt es Punkte, sogenannte Fixpunkte, die bei der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden? Welche sind es?

(3) **I**st die Bildfigur zur Originalfigur deckungsgleich (kongruent)?

Bemerkungen

(1) **W**ir betrachte zunächst Abbildungen der Ebene auf sich, die jede Figur auf eine dazu deckungsgleiche (kongruente) Figur abbilden. Solche Abbildungen nennt man **Kongruenzabbildungen**.

(2) **I**m Folgenden identifizieren wir alle Typen von Kongruenzabbildungen, indem wir die Kongru-enzabbildungen aus einem grundlegenden Typ, nämlich der **Achsenspiegelung** aufbauen.

Satz 2.1

Eine **Kongruenzabbildung** $\varphi: \varepsilon \to \varepsilon$ der Ebene ε auf sich ist durch drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und deren Bilder $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$ eindeutig bestimmt.

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

2 Kongruenzabbildungen der Ebene

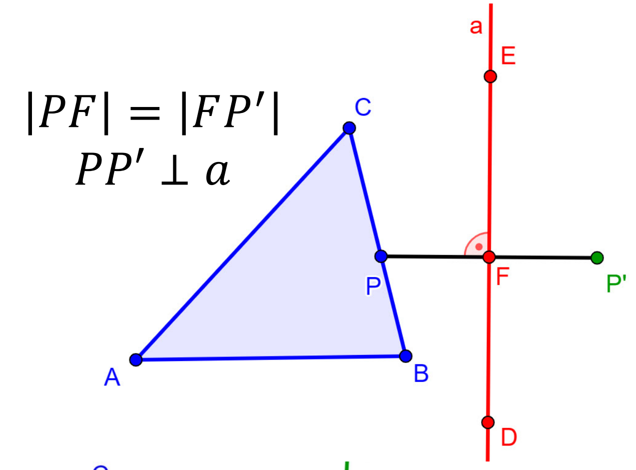
juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

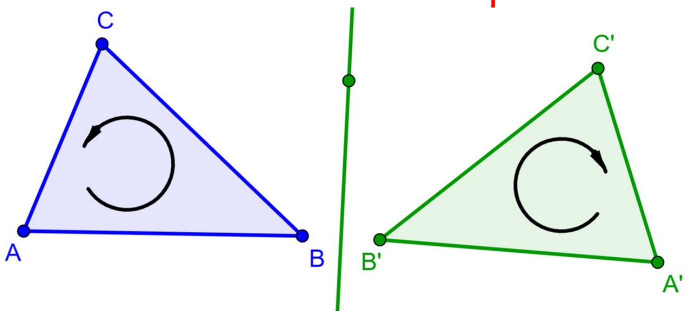
RPTU

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

Achsenspiegelung

Aufgabe
Entdecken Sie möglichst viele Eigenschaften der Achsenspiegelung, indem Sie Figuren mit Hilfe von GeoGebra an einer Achse spiegeln.





Definition 2.2
Abbildung s_a der Ebene ε auf sich heißt genau dann **Achsenspiegelung** (Geradenspiegelung) an der **Achse** (Gerade) $\boldsymbol{a}$, wenn gilt:

- Für jeden Punkt P auf der Geraden a gilt:
  $$P' \coloneqq s_a(P) = P$$
  D. h. die Gerade a besteht nur aus Fixpunkten. Damit ist a eine Fixpunktgerade.
- Für jeden Punkt P außerhalb von a und seinen Bildpunkt $P' = s_a(P)$ bei Achsenspiegelung an der Achse a gilt:

  Die Achse a steht senkrecht zur Gerade PP' und halbiert die Strecke $[PP']$.
  Kurz: $a \perp PP'$ und a halbiert $[PP']$.

Satz 2.2: Kerneigenschaft der Symmetrieachse
Ist a ein Gerade, $P \notin a$ ein Punkt der Ebene ε und $P' = s_a(P)$. Dann gilt für einen beliebigen Punkt A der Ebene ε: $[AP] \cong [AP'] \Leftrightarrow A \in a$

https://www.geogebra.org/m/bjh9rsum

https://www.geogebra.org/m/wxebpujs

Eigenschaften der Achsenspiegelung s_a

Eigenschaften der Achsenspiegelung s_a

- **Bijektivität:** Verschiedene Urbilder haben verschiedene Bilder und jeder Punkt der Ebene besitzt ein Urbild.
- **Geradentreue:** Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
- **Fixpunkte:** Genau die Punkte der Achse a sind Fixpunkte.
- **Fixgeraden:**
  - Die Achse a ist Fixgerade.
  - Sogar jeder einzelne Punkt der Achse ist fix, die Achse ist also sogar eine Fixpunktgerade.
  - Alle zur Achse senkrechten Geraden sind Fixgeraden, aber keine Fixpunktgeraden.
  - Andere Fixgeraden gibt es nicht.
- **Fixrichtungen:** Die Achsenrichtung und die dazu senkrechte Richtung sind die einzigen Fixrichtungen.
- **Parallelentreue:** Die Bilder g' und h' von zueinander parallelen Geraden g und h sind wieder zueinander parallel. Kurz: $g \parallel h \Rightarrow g' \parallel h'$
- **Winkeltreue:** Alle sich entsprechenden Winkel in Urbild und Bild sind gleich groß.
- **Längentreue:** Jede Strecke ist genauso lang, wie ihre Bildstrecke. Deshalb ist die Achsenspiegelung auch streckenverhältnistreu, teilverhältnistreu und flächenmaßtreu.
- **Keine Orientierungstreue:** Der Umlaufsinn einer Figur wird umgekehrt.

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

2 Kongruenzabbildungen der Ebene

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

Hintereinanderausführung von Abbildungen: Verkettung

Definition 2.3

Seien P, Q und R nichtleere Mengen sowie $f\colon \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ und $g\colon \mathrm{Q} \to \mathrm{R}$ Funktionen, dann nennt man die Funktion

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Q} \arrow[dr, "g"] & \\
\mathrm{P} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & \mathrm{R}
\end{tikzcd}
$$

$$g \circ f\colon \mathrm{P} \to \mathrm{R}, x \mapsto (g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

die **Verkettung $g \circ f$ von f und g**.

Für $g \circ f$ spricht man „**g nach f**“.

Beispiel

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x + 1$

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = x^2$

$$
\begin{aligned}
g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) \\
&= g(x+1) = (x+1)^2
\end{aligned}
$$

Definition 2.4

Eine Funktion $id_{\mathrm{A}}\colon \mathrm{A} \to \mathrm{A}, x \mapsto x$, die jedes Element der Menge A auf sich selbst abbildet, heißt **identische Abbildung** (oder **Identität**) id_{A} auf A.

Definition 2.5

Die **Umkehrfunktion f^{-1}** einer Funktion $f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ist die Funktion $f^{-1}\colon \mathrm{B} \to \mathrm{A}$, für die gilt:

$$\forall_{x \in \mathrm{A}}\, f^{-1}\big(f(x)\big) = x \ \wedge\ \forall_{y \in \mathrm{B}}\, f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

$$f^{-1} \circ f = id_{\mathrm{A}} \ \wedge\ f \circ f^{-1} = id_{\mathrm{B}}$$

Verkettung von zwei Achsenspiegelungen

Verkettung von zwei Achsenspiegelung

- Da eine Achsenspiegelung durch die Gerade, die ihre Achse bildet festgelegt wird, wird eine Verkettung $s_b \circ s_a$ von zwei Achsenspiegelungen s_a und s_b also durch zwei Achsen (Geraden) a und b sowie deren gegenseitige Lage bestimmt.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "s_a"] \arrow[rr, bend right, "s_b \circ s_a"'] & P' \arrow[r, "s_b"] & P'' \end{tikzcd}$$

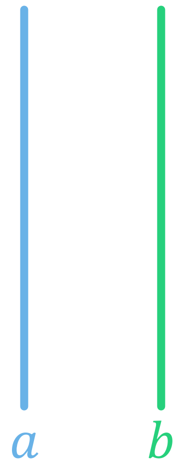
- Es gilt:
  $$(s_b \circ s_a)(P) \coloneqq s_b\big(s_a(P)\big) = s_b(P') = P''$$

- Welche Lagen können zwei Geraden a und b zueinander haben?

Die Geraden sind echt parallel zueinander.

$a \parallel b$

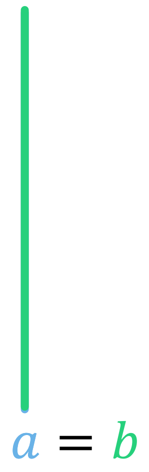
$a \cap b = \{\}$



Die Geraden sind identisch.

$a \equiv b$

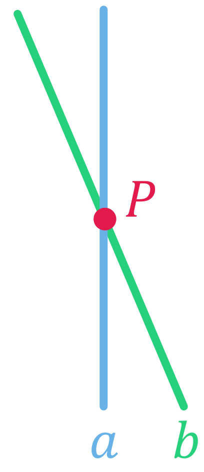
$a \cap b = a$



Die Geraden schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

$a \nparallel b$

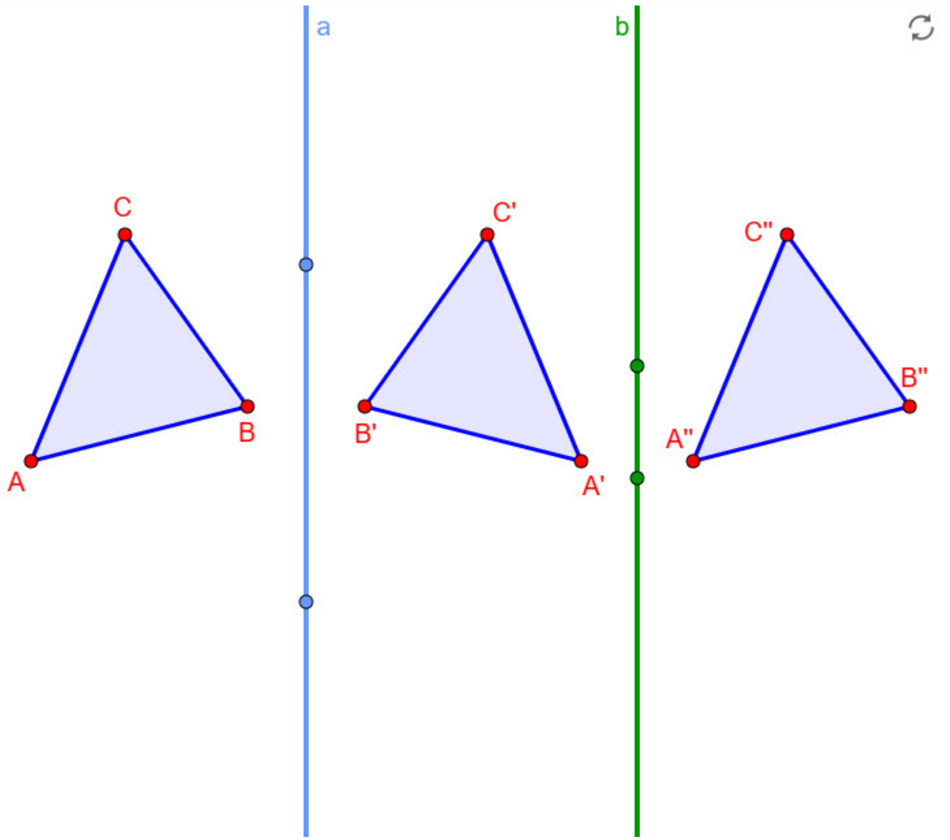
$a \cap b = \{P\}$



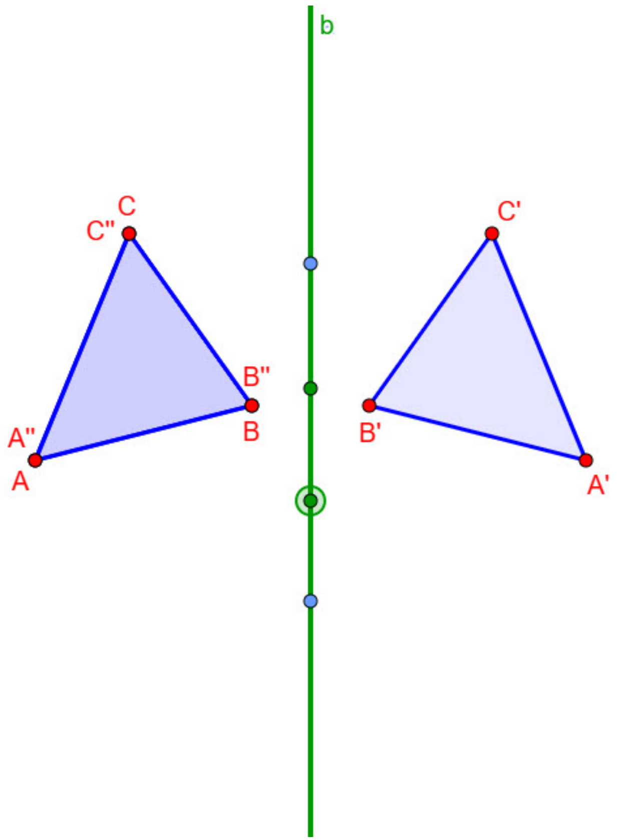
Entdeckungen bei Verkettung $s_b \circ s_a$ von zwei Achsenspiegelungen s_a und s_b

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

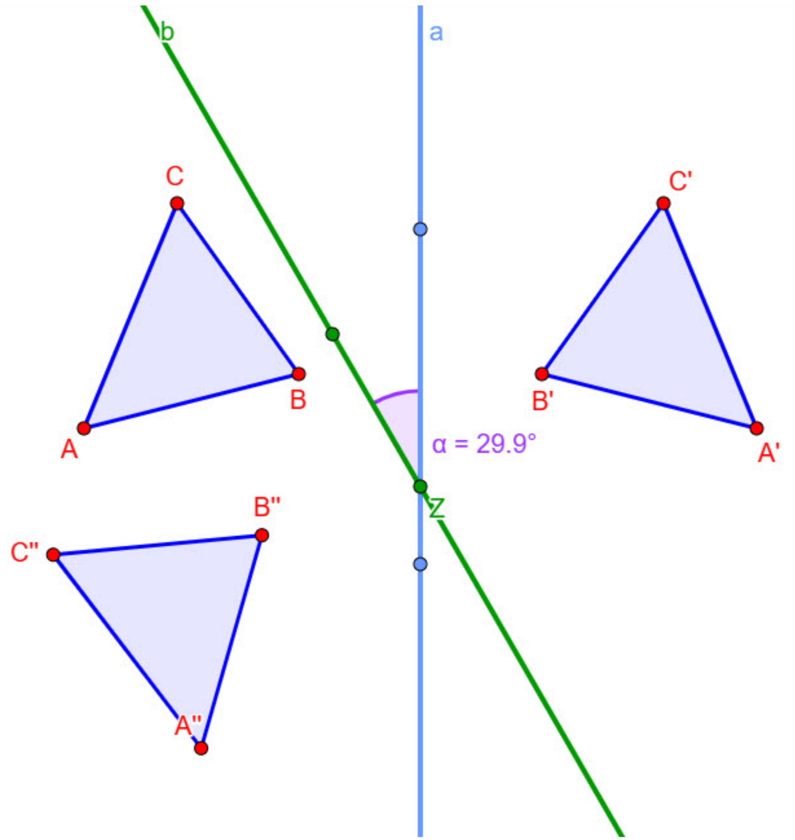
$a \parallel b$



$a \equiv b$



$a \nparallel b$



Verschiebung als Verkettung von Achsenspiegelungen an zwei echt parallelen Geraden

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

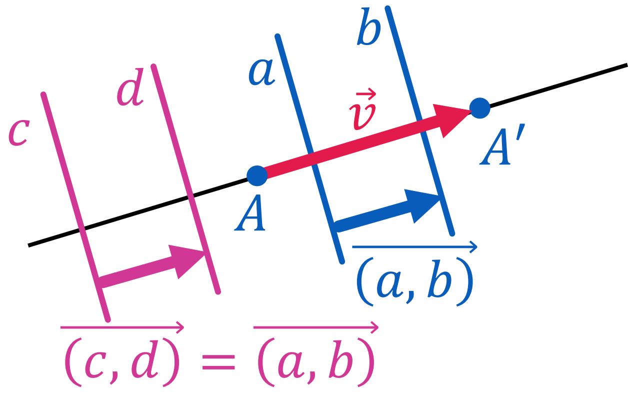
Definition 2.6

Die Verkettung zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b an zwei echt parallelen Geraden a und b $(a \parallel b)$ nennen wir **Verschiebung** (Translation) $\boldsymbol{t}_{\vec{v}}$.

Der **Verschiebungsvektor** $\vec{v}$ ist der doppelte Abstandsvektor $\overrightarrow{(a,b)}$ der beiden Geraden a und b.

Man schreibt:

$$\boldsymbol{t}_{\vec{v}} \coloneqq \boldsymbol{s}_b \circ \boldsymbol{s}_a \text{ mit } \vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{(a,b)}$$



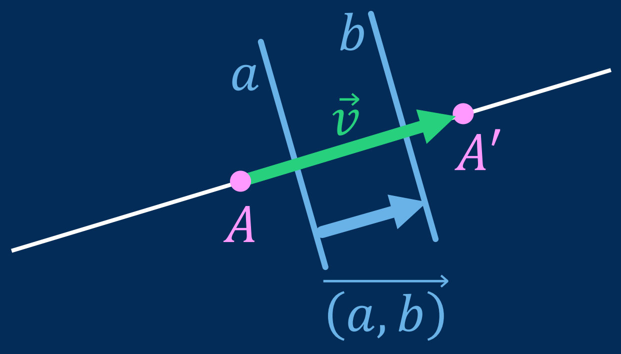
$$\boldsymbol{t}_{\vec{v}} = \boldsymbol{s}_b \circ \boldsymbol{s}_a$$
$$= \boldsymbol{s}_d \circ \boldsymbol{s}_c$$

Bemerkungen

- Umgekehrt kann auch jede Verschiebung $\boldsymbol{t}_{\vec{v}}$ durch die Verkettung zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b an zueinander parallelen Geraden a und b ersetzt werden, für deren Abstandsvektor $\overrightarrow{(a,b)}$ gilt: $\overrightarrow{(a,b)} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$.
- a und b stehen damit senkrecht zur Verschiebungsrichtung.
- Da die erste Achse aus den unendlich vielen Geraden, die senkrecht zur Verschiebungsrichtung stehen, frei gewählt werden kann, gibt es unendliche viele Paare von Achsenspiegelungen, die eine konkrete Verschiebung $\boldsymbol{t}_{\vec{v}}$ ersetzen.

Eigenschaften der Translation (Verschiebung) $t_{\vec{v}}$

Eigenschaften der Translation (Verschiebung) $t_{\vec{v}}$



- **Bijektivität:** Ja.
- **Geradentreue:** Ja.
- **Fixpunkte:**
  - Eine echte (d.h. von der Identität verschiedene) Translation hat keine Fixpunkte.
  - Besitzt eine Translation einen Fixpunkt, so ist sie die Identität.
- **Fixgeraden:** Alle Geraden parallel zur Verschiebungsrichtung $\vec{v}$ sind Fixgeraden.
- **Fixrichtungen:**
  - Jede Gerade wird auf eine dazu parallele Gerade abgebildet. ⇒ Alle Richtungen sind Fixrichtungen.
  - Eine Abbildung, bei der jede Bildgerade g' zu ihrer Urbildgerade g parallel ist heißt **Dilatation**. Damit ist die Verschiebung eine Dilatation.
- **Parallelentreue:** Ja.
- **Winkeltreue:** Ja.
- **Längentreue:** Ja.
- **Orientierungstreue:** Ja. Bei jeder Achsenspiegelung ändert sich der Umlaufsinn. Da es nur zwei Umlaufrichtungen gibt (im und gegen den Uhrzeigersinn), ist der Umlaufsinn nach einer geraden Anzahl von Achsenspiegelungen wieder wie beim Urbild der ersten Achsenspiegelung.

Drehung als Verkettung von Achsenspiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Definition 2.7

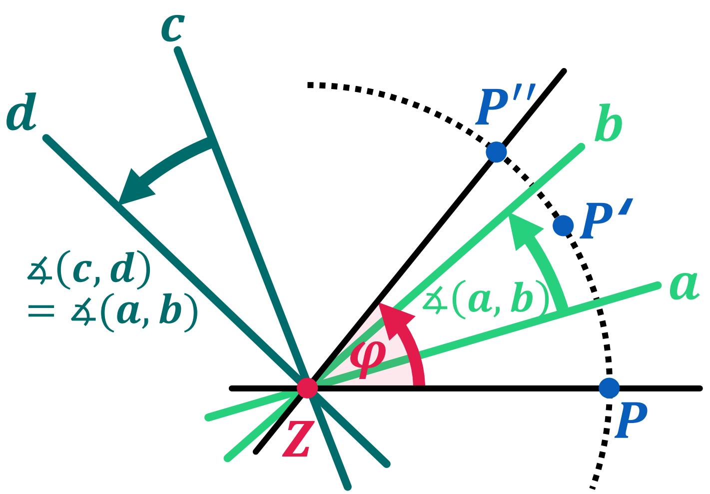
Die Verkettung zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b an zwei sich im Punkt Z schneidenden Geraden a und b nenne wir **Drehung** $\boldsymbol{d_{Z,\varphi}}$.

Der Schnittpunkt $\boldsymbol{Z}$ der beiden Geraden ist das **Drehzentrum**.

Der doppelte orientierte Zwischenwinkel $\measuredangle(a,b)$ zwischen den beiden Geraden a und b ist der **Drehwinkel** $\boldsymbol{\varphi}$ der Drehung.

Man schreibt: $\boldsymbol{d_{Z,\varphi} \coloneqq s_b \circ s_a}$ mit

- $\varphi = 2 \cdot \measuredangle(a,b)$
- $\{Z\} = a \cap b$



$$\boldsymbol{d_{Z,\varphi}} = \boldsymbol{s_b \circ s_a} = \boldsymbol{s_d \circ s_c}$$

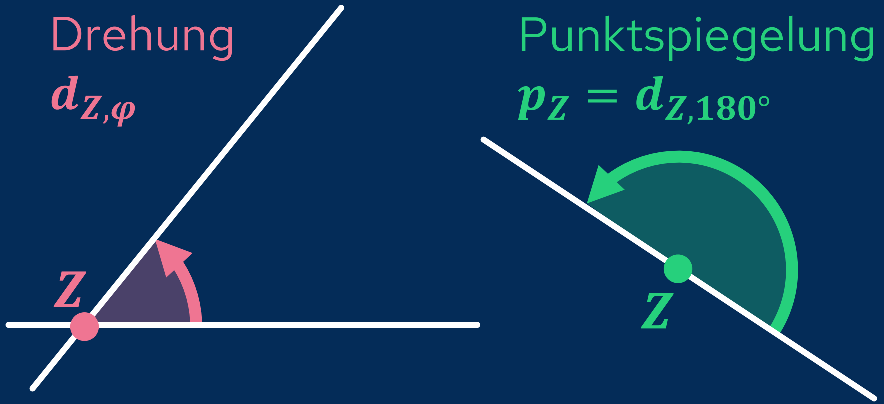
$$\varphi = 2 \cdot \measuredangle(a,b)$$

Bemerkungen

- Umgekehrt kann jede Drehung $\boldsymbol{d_{Z,\varphi}}$ durch die Verkettung zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b ersetzt werden, die sich im Drehzentrum schneiden, deren Zwischenwinkel $\measuredangle(a,b)$ halb so groß ist wie der Drehwinkel φ der Drehung und denselben Drehsinn wie φ hat.
- Da die erste Achse aus den unendlich vielen Geraden, die durch Z verlaufen frei gewählt werden kann, gibt es unendliche viele Paare von Achsenspiegelungen, die eine konkrete Drehung $\boldsymbol{d_{Z,\varphi}}$ ersetzen.

Eigenschaften der Drehung $d_{Z,\varphi}$

Eigenschaften der Drehung $d_{Z,\varphi}$



- **Bijektivität:** Ja.
- **Geradentreue:** Ja.
- **Fixpunkte:** Nur das Drehzentrum Z ist Fixpunkt.
- **Fixgeraden:**
  - Im Allgemeinen hat eine Drehung keine Fixgeraden.
  - Bei einer Drehung $d_{Z,180°}$ um Z um $180°$, die auch als **Punktspiegelung** p_Z an Z bezeichnet wird, sind genau die Geraden, die durch das Drehzentrum verlaufen, **Fixgeraden**.
- **Fixrichtungen:**
  - Im Allgemeinen hat eine Drehung keine Fixrichtung.
  - Bei einer **Punktspiegelung** an Z $\left(p_Z = d_{Z,180°}\right)$ sind sämtliche Richtungen **Fixrichtungen**, denn für jede Gerade g und ihr Bild $g' = p_Z(g)$ bei Punktspiegelung an Z gilt: $g' \parallel g$.
- **Parallelentreue:** Ja.
- **Winkeltreue:** Ja.
- **Längentreue:** Ja.
- **Orientierungstreue:** Ja.

Identische Abbildung id: Verkettung $s_b \circ s_a$ von zwei Achsenspiegelungen s_a und s_b mit $a = b$

Bemerkungen

(1) **D**ie Verkettung $s_a \circ s_a$ von zwei Achsenspiegelungen an identischen Achsen kann aufgefasst werden

- einerseits als Drehung $d_{Z,0°}$ um einen Punkt Z auf der Achse a um den Drehwinkel $\varphi = 0°$ und
- andererseits als Verschiebung $t_{\vec{0}}$ mit dem Nullvektor $\vec{0}$ als Verschiebungsvektor.

(2) **D**ie Verkettung von zwei Achsenspiegelungen an identischen Achsen a ist die **identische Abbildung id_ε** der Ebene ε auf sich $s_a \circ s_a = id_\varepsilon$, **Achsenspiegelungen sind** also **selbstinvers**.

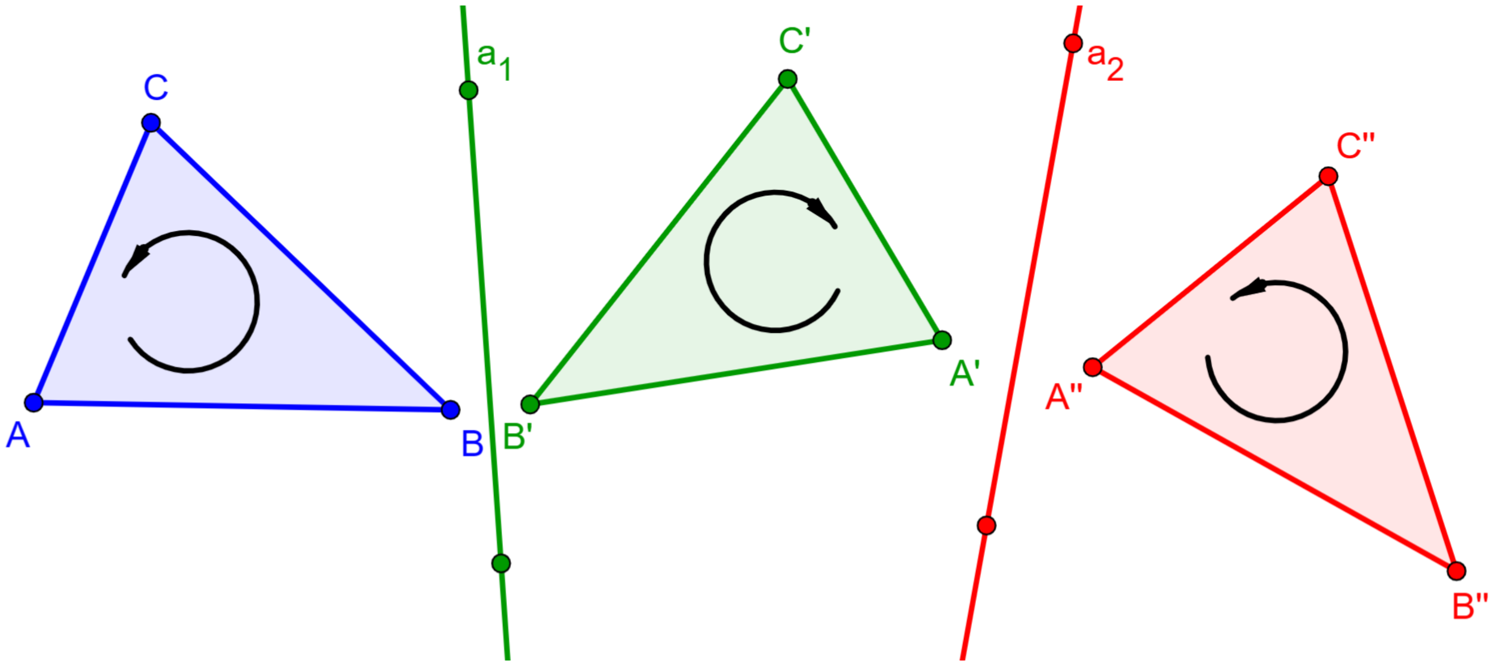
Eigenschaften der identischen Abbildung id_ε

- **Bijektivität:** Ja
- **Geradentreue:** Ja.
- **Fixpunkte:**
  Alle Punkte der Ebene ε sind Fixpunkte.
- **Fixgeraden:**
  Alle Geraden der Ebene ε sind Fixgeraden.
- **Fixrichtungen:**
  Da jede Gerade auf sich selbst abgebildet wird, sind alle Richtungen Fixrichtungen.
- **Parallelentreue:** Ja.
- **Winkeltreue:** Ja.
- **Längentreue:** Ja
- **Orientierungstreue:** Ja.

Orientierungstreue?!

Satz 2.3: Umlaufsinn

- Eine Abbildung, die aus einer Verkettung einer geraden Anzahl $(2, 4, 6, \dots)$ von Achsenspiegelungen entsteht, ist orientierungstreu, d. h. der Umlaufsinn von Original- und Bildfigur ist gleichsinnig.
- Eine Abbildung, die aus einer Verkettung einer ungeraden Anzahl $(3, 5, 7, \dots)$ von Achsenspiegelungen entsteht, ist nicht orientierungstreu, d. h. der Umlaufsinn von Original- und Bildfigur ist ungleichsinnig.



Spezialfall der Drehung: Punktspiegelung

Definition 2.8

Die Verkettung $s_b \circ s_a$ zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b an zueinander senkrechten Geraden a und b $(a \perp b)$, die sich im Punkt Z schneiden, also eine Drehung $d_{Z,180°}$ um Z um 180°, heißt **Punktspiegelung** p_Z.

Der Schnittpunkt Z der beiden Geraden a und b ist das **Punktspiegelzentrum**.

Satz 2.4

Punktspiegelungen p_Z sind **selbstinverse** Abbildungen der Ebene ε auf sich, d. h. $p_Z \circ p_Z = id_\varepsilon$.

Satz 2.5

a) **D**ie Verkettung $s_b \circ s_a$ zweier Achsenspiegelungen s_a und s_b ist immer eine gleichsinnige Kongruenzabbildung, also entweder eine Verschiebung oder eine Drehung.

b) **J**ede Drehung oder Verschiebung kann als Verkettung von zwei Achsenspiegelungen dargestellt werden.

c) **Z**wei Achsenspiegelungen s_a und s_b sind genau dann vertauschbar $(s_b \circ s_a = s_a \circ s_b)$, wenn die beiden Achsen a und b
- identisch sind $(a \equiv b)$, oder
- senkrecht aufeinander stehen $(a \perp b)$.

d) **P**unktspiegelungen sind neben der identischen Abbildung id_ε die einzigen gleichsinnigen Kongruenzabbildungen, die selbstinvers sind.

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

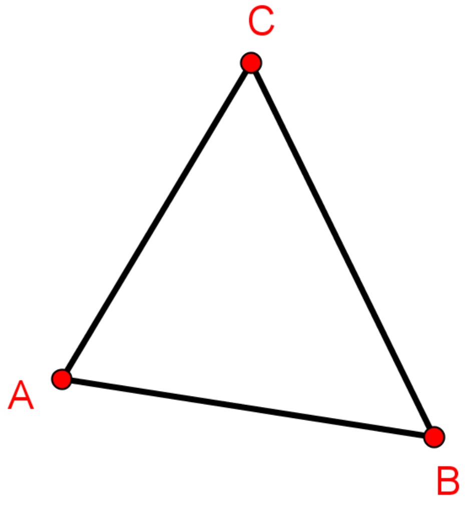
2 Kongruenzabbildungen der Ebene

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

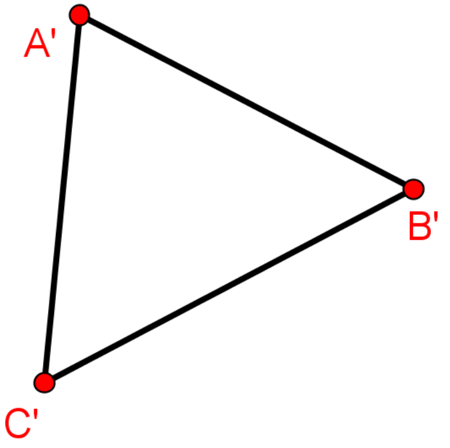
Dreispiegelungssatz

Beweis (konstruktiv)**:**

Schritt 1:
Nach Satz 2.1 reicht es für ein beliebiges Dreieck ΔABC und ein beliebiges weiteres dazu kongruentes Dreieck $\Delta A'B'C'$ zu zeigen, dass die Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen ausreicht, um ΔABC auf $\Delta A'B'C'$ abzubilden.



[AB] ≅ [A'B']
[BC] ≅ [B'C']
[CA] ≅ [C'A']

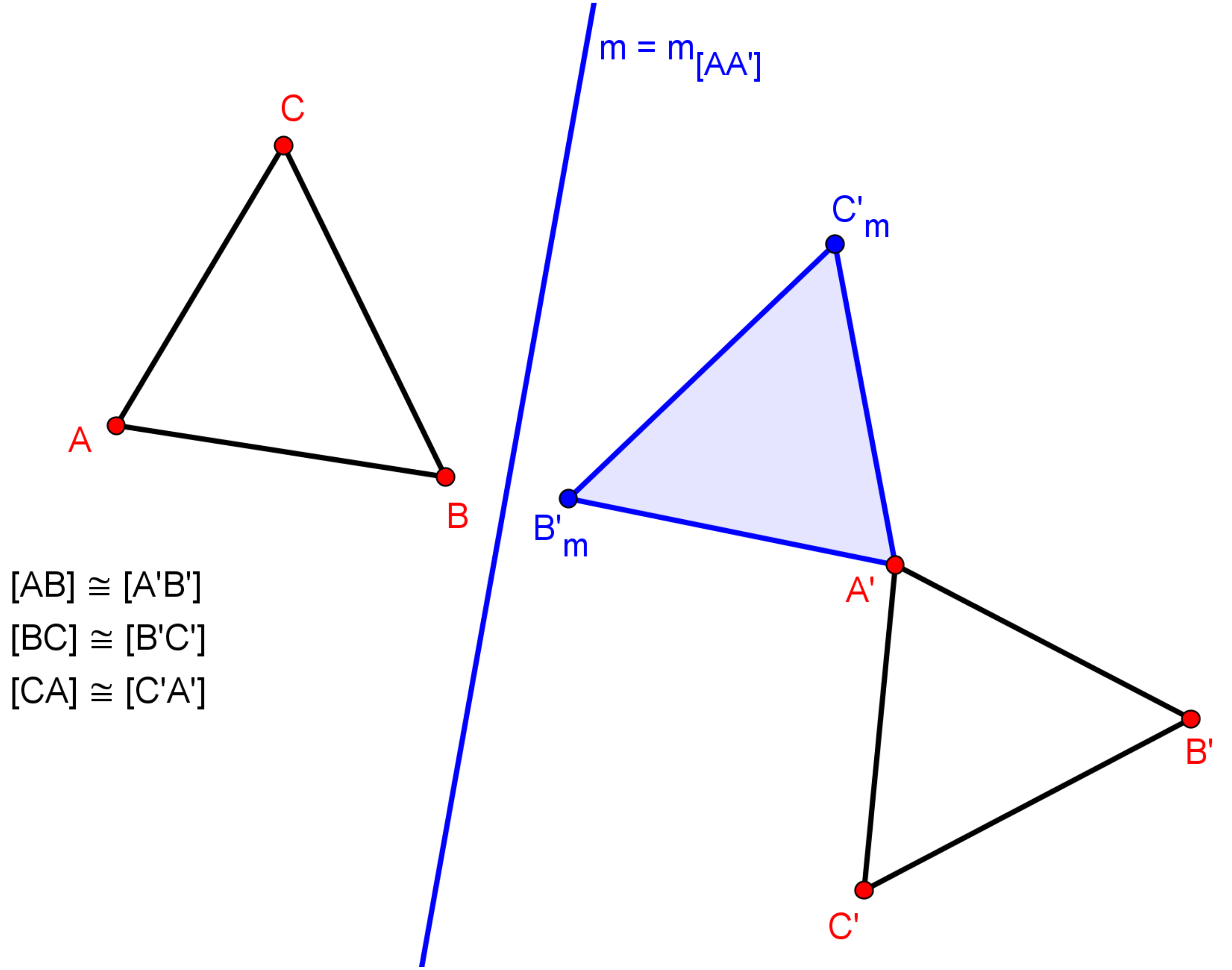


Satz 2.6:
Dreispiegelungssatz
Jede Kongruenzabbildung der Ebene ε auf sich ist darstellbar als Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen.

Dreispiegelungssatz

Beweis (konstruktiv):

Schritt 2:
Spiegelung von ΔABC an der Mittelsenkrechten $m = m_{[AA']}$ der Strecke $[AA']$.

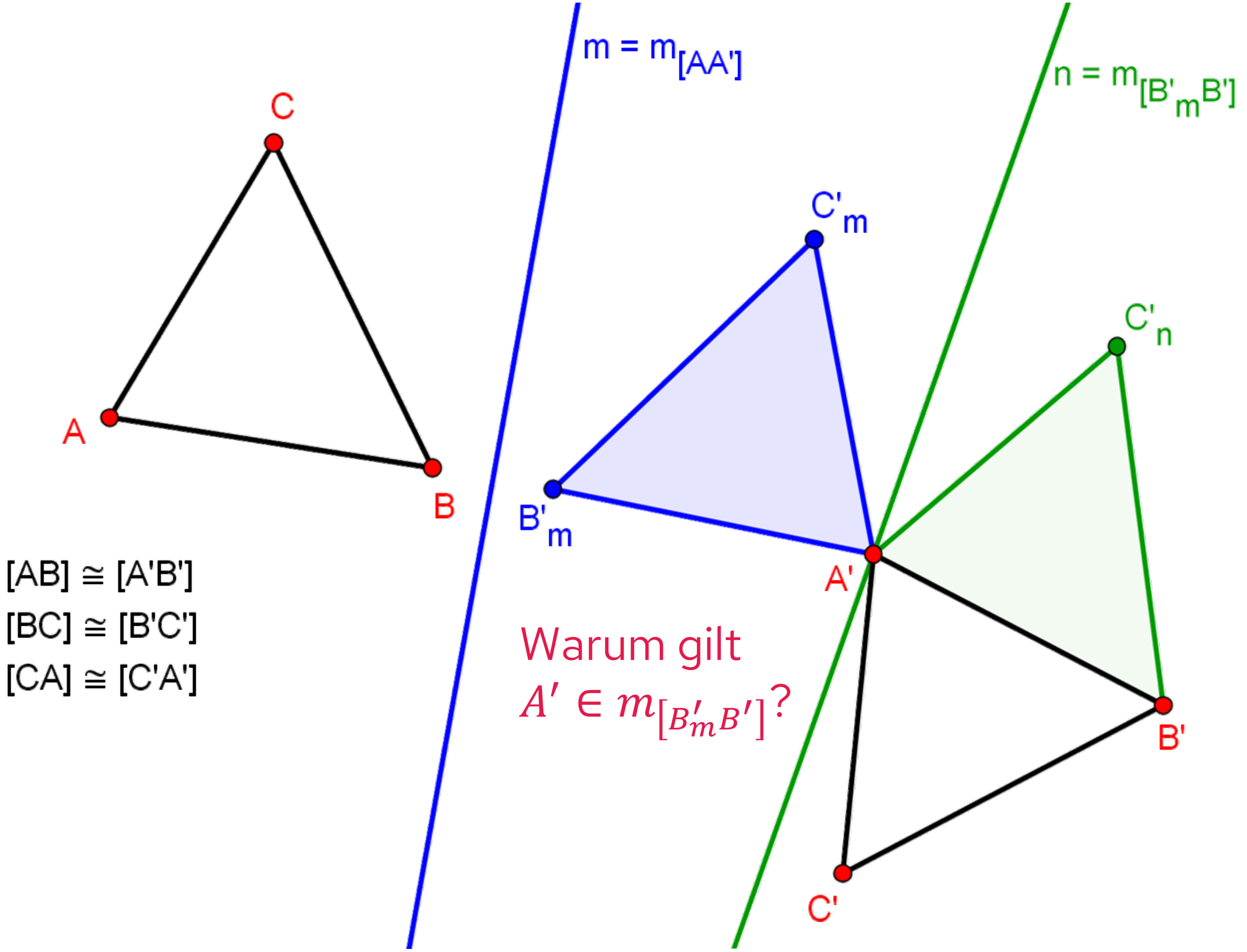


Satz 2.6: Dreispiegelungssatz
Jede Kongruenzabbildung der Ebene ε auf sich ist darstellbar als Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen.

Dreispiegelungssatz

Beweis (konstruktiv):

Schritt 3:
Spiegelung von $\Delta A'B'_mC'_m$ an der Mittelsenkrechten $n = m_{[B'_mB']}$ der Strecke $[B_mB']$.



Satz 2.6: Dreispiegelungssatz
Jede Kongruenzabbildung der Ebene ε auf sich ist darstellbar als Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen.

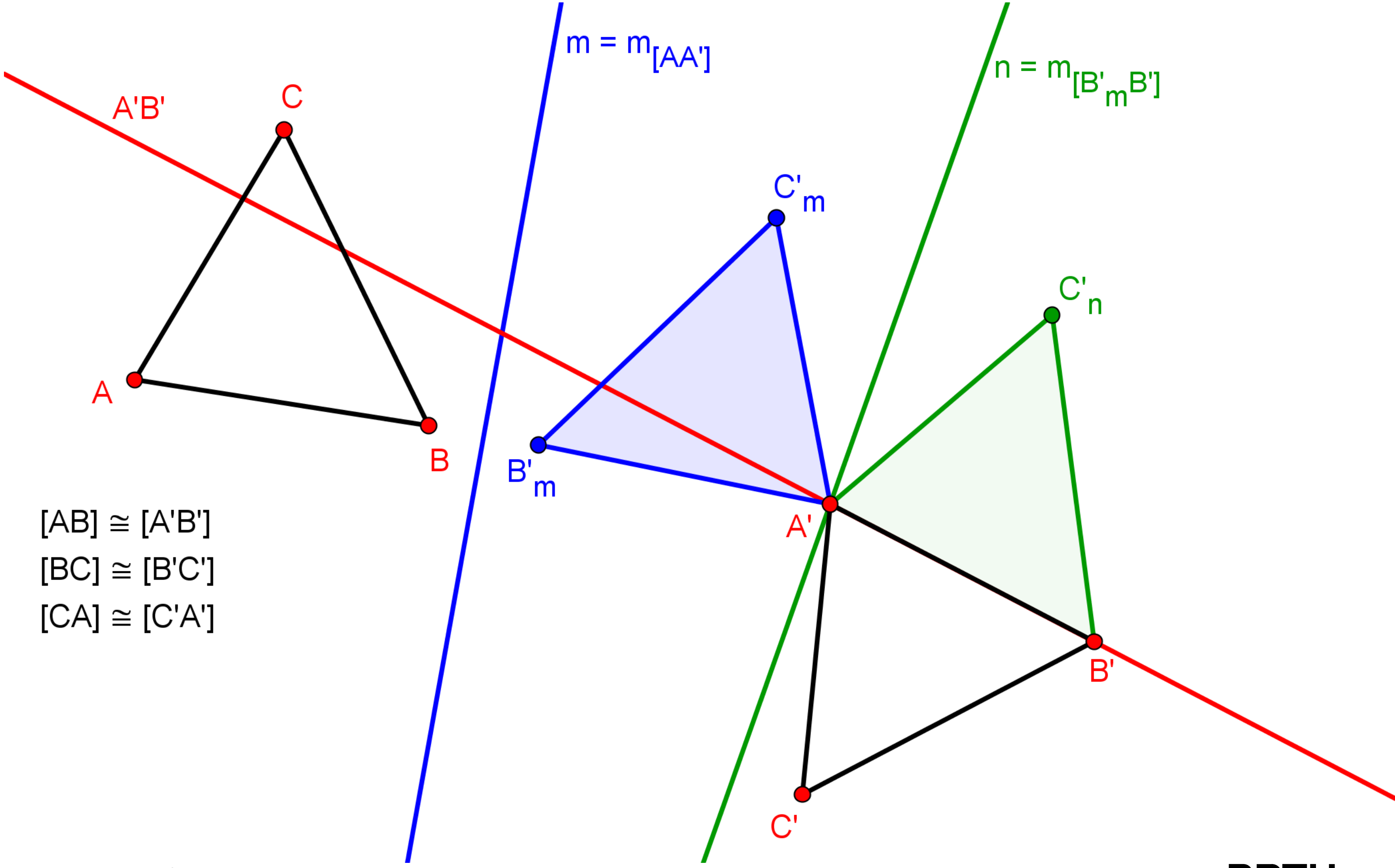
Dreispiegelungssatz

Beweis (konstruktiv):

Schritt 4:
Spiegelung von $\Delta A'B'C_n'$
an der Gerade $A'B'$.

$$\Rightarrow \left(s_{A'B'} \circ s_n \circ s_m\right)(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$$

■



Satz 2.6: Dreispiegelungssatz
Jede Kongruenzabbildung der Ebene ε auf sich ist darstellbar als Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen.

Dreispiegelungssatz

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Bemerkungen

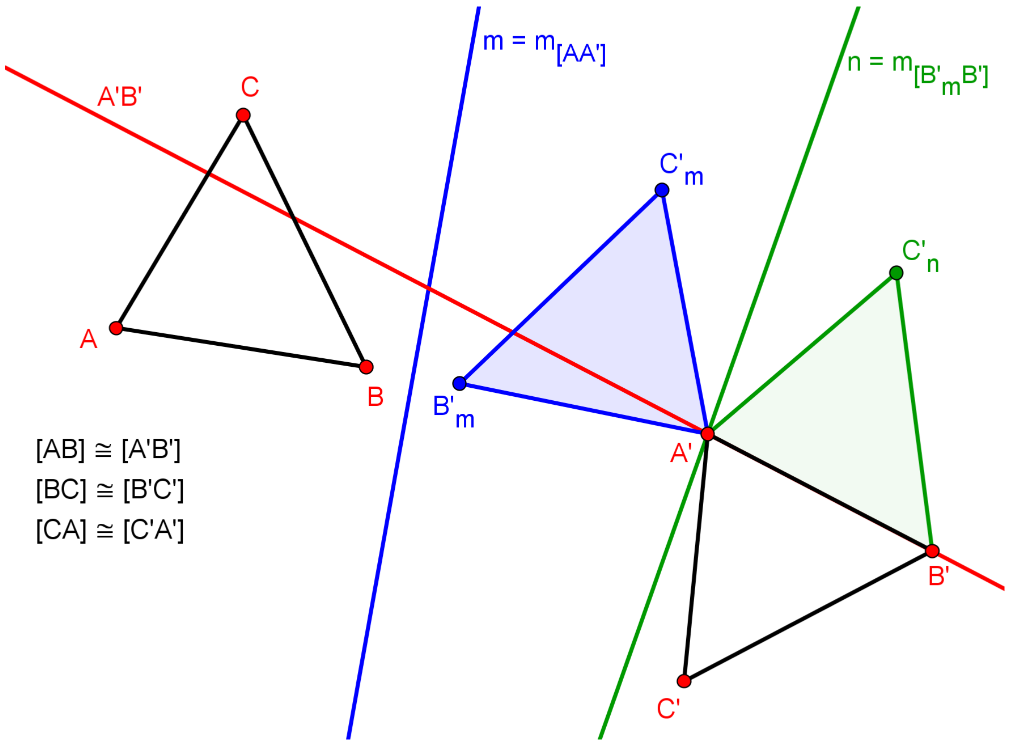
Der Beweis zum Dreispiegelungssatz zeigt, dass eine Kongruenzabbildung φ mit $\varphi(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ immer existiert, wenn die Voraussetzungen $[A'B'] \cong [AB]$, $[B'C'] \cong [BC]$ und $[C'A'] \cong [CA]$ für die vorgegebenen Punkte A, B, C, A', B' und C' erfüllt sind.

(1) **Z**unächst wird der Punkt A durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten $m = m_{[AA']}$ der Strecke $[AA']$ auf den Punkt A' abgebildet. Dabei wird B auf den Punkt B'_m und C auf C'_m abgebildet.

(2) **A**nschließend wird B'_m durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten $n = m_{[B'_mB']}$ der Strecke $[B'_mB']$ auf den Punkt B' abgebildet.

(3) **W**egen der Transitivität der Streckenkongruenz (Axiom K2) und Satz 2.2 liegt A' auf $n = m_{[B'_mB']}$.

(4) **E**s gilt $s_n(C'_m) = C'_n$. Falls $C'_n \neq C'$ wird abschließend durch Spiegelung an $A'B'$ der Punkt C'_n auf C' abgebildet.



Verkettung von drei Achsenspiegelungen

Satz 2.7: Assoziativgesetz für $\circ$

Verkettungen von Abbildungen φ_1, φ_2, φ_3 sind assoziativ, es gilt also:

$$(\varphi_3 \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 = \varphi_3 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1)$$

Bemerkung

Man macht sich leicht klar, dass Satz 2.7 gilt. Aus $\varphi_1(P) = P'$, $\varphi_2(P') = P''$ und $\varphi_3(P'') = P'''$ folgt:

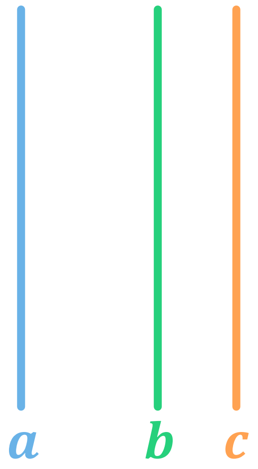
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_2 \circ \varphi_1"'] & P' \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_3 \circ \varphi_2"] & P'' \arrow[r, "\varphi_3"] & P''' \end{tikzcd}$$

Wie können **drei Geraden** einer Ebenen zueinander liegen?

Die Geraden sind parallel zueinander.

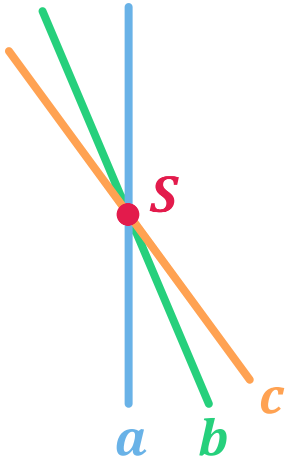
$a \parallel b \parallel c$

$a \cap b = \{\}$
$a \cap c = \{\}$
$b \cap c = \{\}$



Die Geraden schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

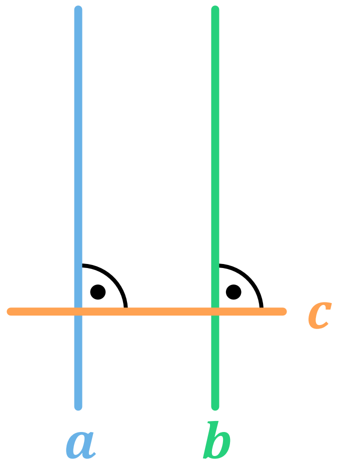
$a \cap b \cap c = \{S\}$



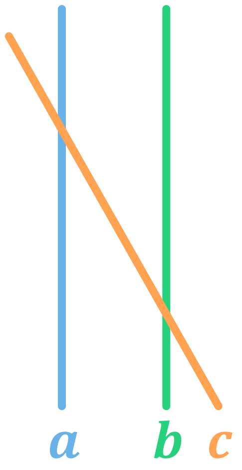
Zwei Geraden sind parallel zueinander, die dritte steht senkrecht auf beiden anderen.

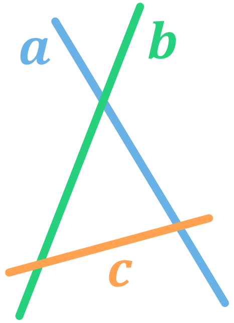
$a \parallel b$

$c \perp a \wedge c \perp b$



Sonstige



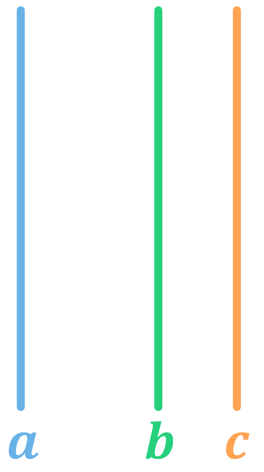


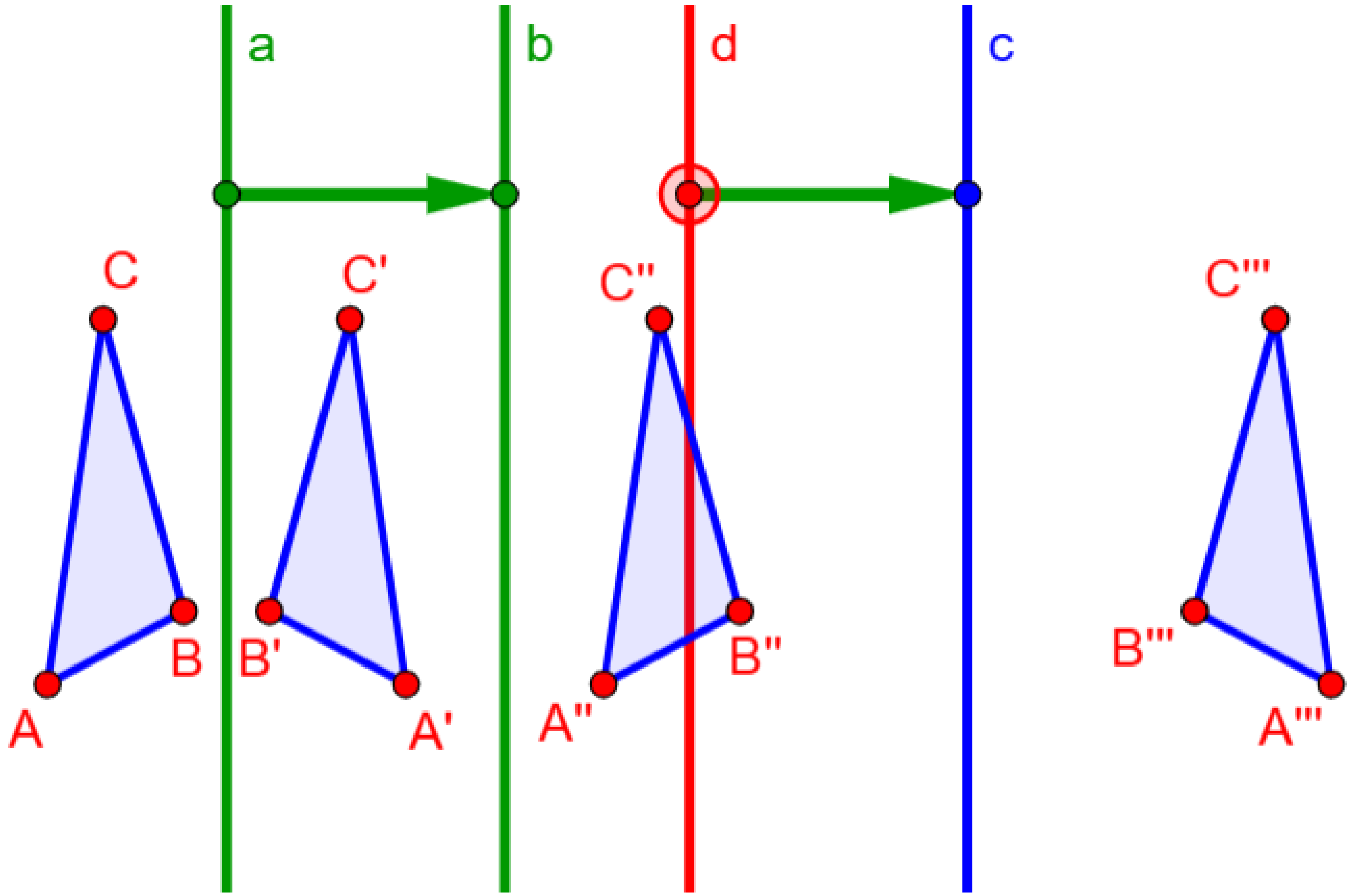
Verkettung von drei Achsenspiegelungen

Die
Geraden
sind parallel
zueinander.

$a \parallel b \parallel c$

$a \cap b = \{\}$
$a \cap c = \{\}$
$b \cap c = \{\}$



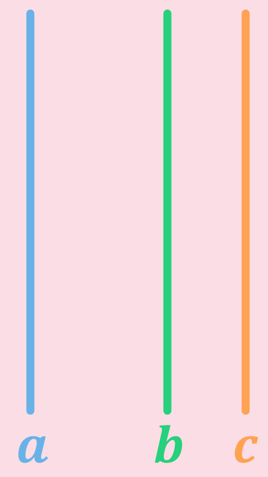


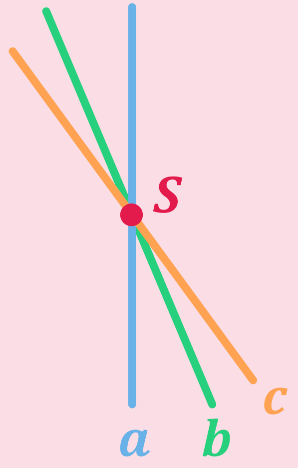
Reduktionssatz für 3 Achsenspiegelungen

Satz 2.8:
Reduktionssatz für drei Achsenspiegelungen

Die Verkettungen von drei Achsenspiegelungen s_a, s_b und s_c ist genau dann wieder eine Achsenspiegelung, wenn die drei Achsen a, b und c entweder

- parallel zueinander sind ($a \parallel b \parallel c$), oder
- sich in einem Punkt S schneiden ($a \cap b \cap c = \{S\}$).





Für die Symmetrieachse d der Achsenspiegelung s_d mit $s_d = s_c \circ s_b \circ s_a$ gilt entweder

- $a \parallel b \parallel c \parallel d$, oder
- $a \cap b \cap c \cap d = \{S\}$.

Beweis:

(1) Voraussetzung: $a \parallel b \parallel c$

$$s_c \circ s_b \circ s_a \overset{\text{Satz 2.7}}{\triangleq} s_c \circ (s_b \circ s_a) \overset{\text{Vor. + Def. 2.6}}{\triangleq} s_c \circ \left(t_{2\cdot\overrightarrow{(a,b)}}\right) \qquad (*)$$

Wähle eine Gerade d für die gilt, dass $a \parallel b \parallel c \parallel d$ ist und $\overrightarrow{(d,c)} = \overrightarrow{(a,b)}$. $(**)$

$$\begin{aligned} s_c \circ s_b \circ s_a &\overset{(*)}{\triangleq} s_c \circ \left(t_{2\cdot\overrightarrow{(a,b)}}\right) \\ &\overset{(**)}{\triangleq} s_c \circ \left(t_{2\cdot\overrightarrow{(d,c)}}\right) \\ &\overset{\text{Vor. + Def. 2.6}}{\triangleq} s_c \circ (s_c \circ s_d) \\ &\overset{\text{Satz 2.7}}{\triangleq} (s_c \circ s_c) \circ s_d \\ &\overset{s_c \text{ selbstinvers}}{\triangleq} id_\varepsilon \circ s_d = s_d \quad \blacksquare \end{aligned}$$

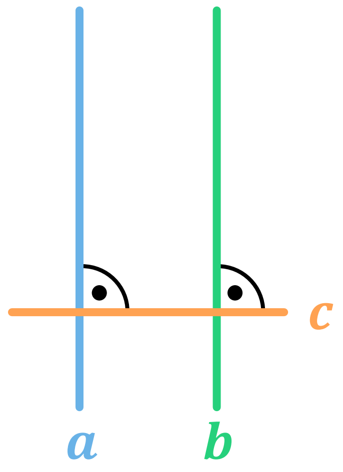
(2) Voraussetzung: $a \cap b \cap c = \{S\}$
Übungsaufgabe!

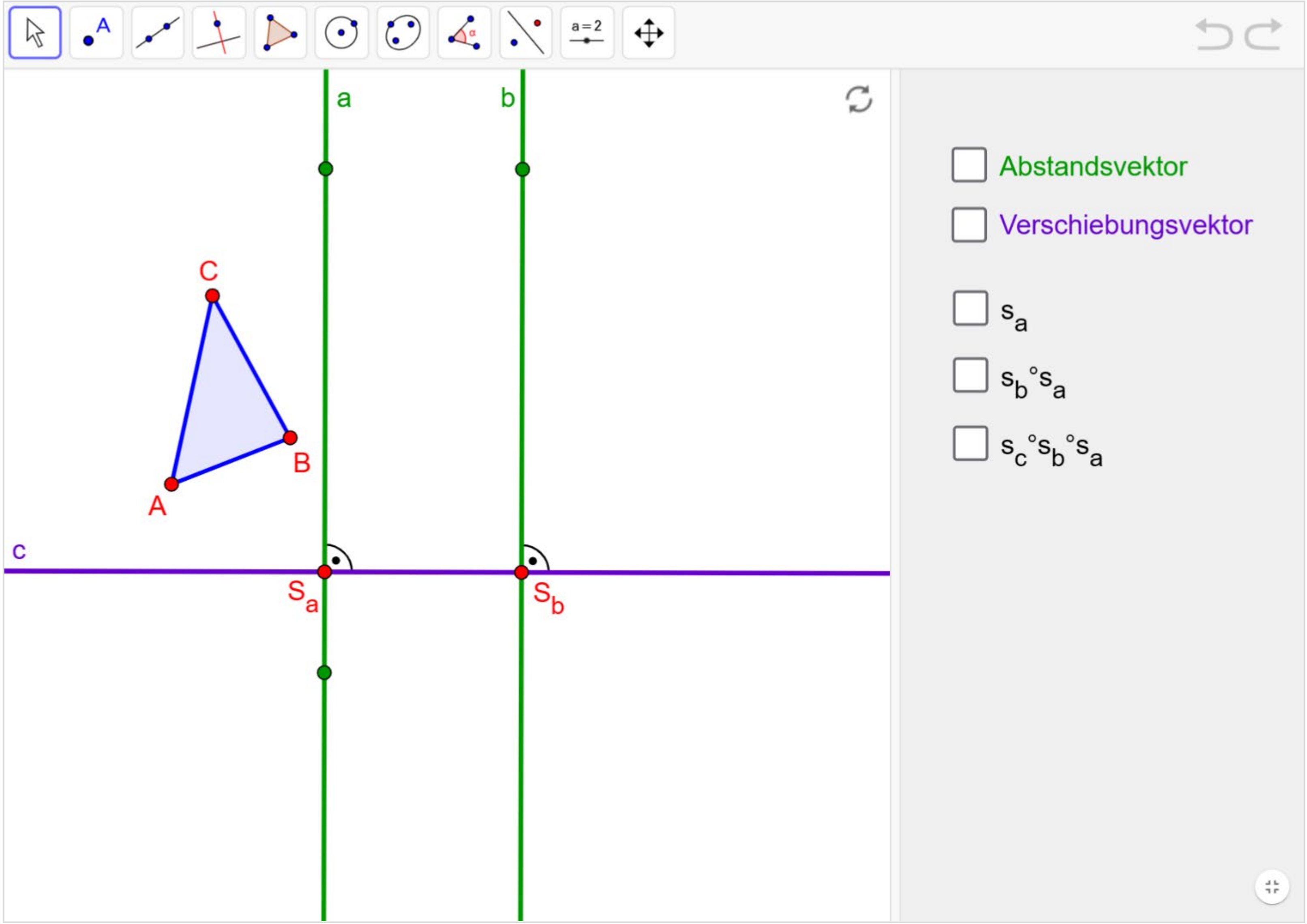
Verkettung von drei Achsenspiegelungen

Zwei Geraden sind parallel zueinander, die dritte steht senkrecht auf beiden anderen.

$a \parallel b$

$c \perp a \wedge c \perp b$

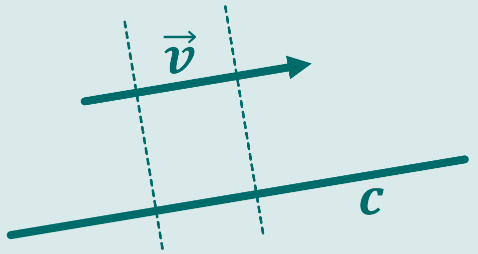




 https://www.geogebra.org/m/n2h2ms4a

Schubspiegelung (Gleitspiegelung)

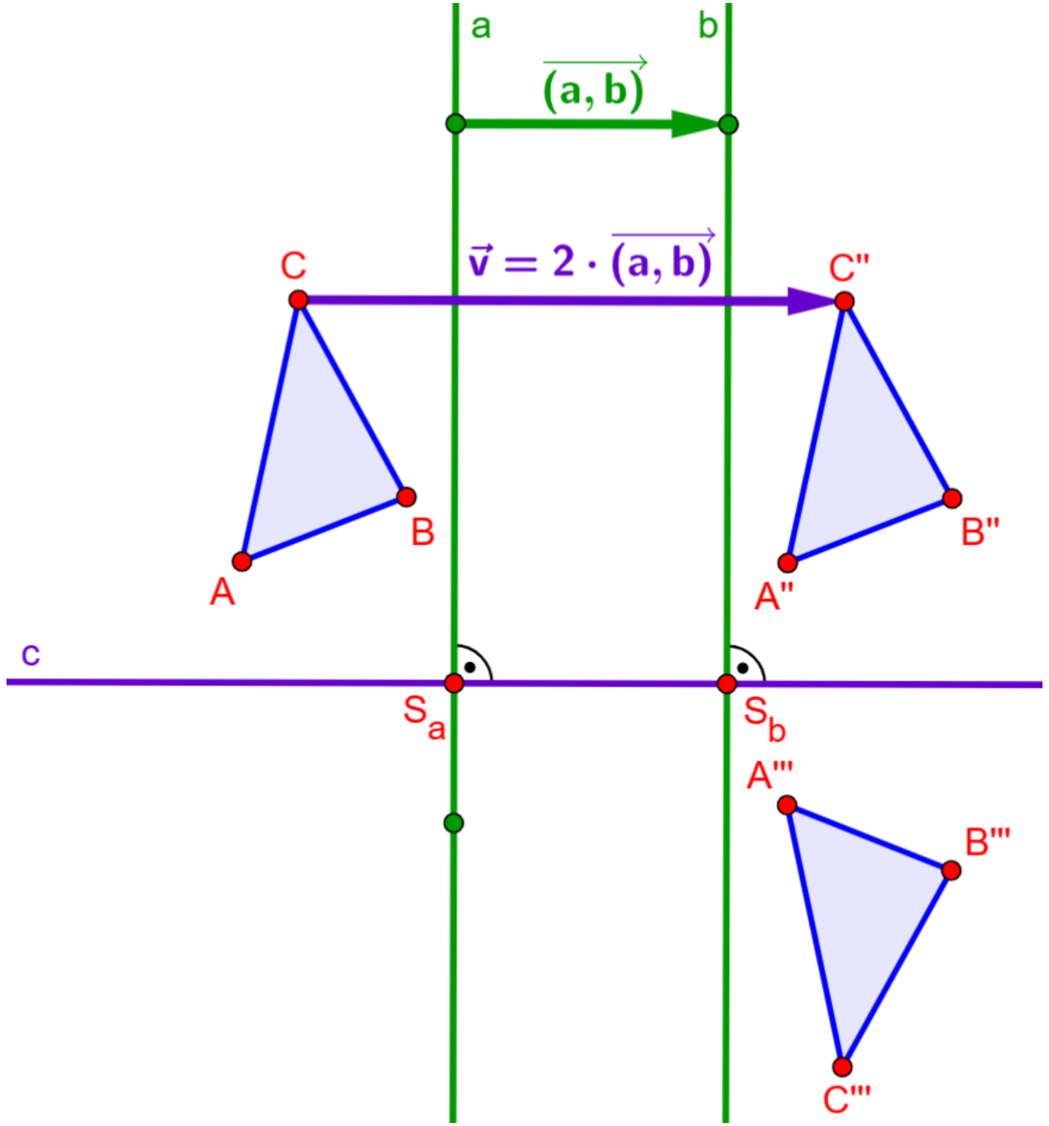
Definition 2.9
Eine Verkettung
$g_{c,\vec{v}} := s_c \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ s_c$
einer Verschiebung $t_{\vec{v}}$
mit einer Achsenspiegelung s_c, für die gilt, dass der Verschiebungsvektor $\vec{v}$ parallel zur Achse c der Achsenspiegelungen s_c ist ($\vec{v} \parallel c$), heißt **Schubspiegelung** (bzw. Gleitspiegelung) $g_{c,\vec{v}}$.



Übungsaufgabe: $\vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{(a,b)}$

Zeigen Sie, dass die Gleichungskette korrekt ist, dass die Verkettungen also jeweils die identische Gesamtabbildung liefern:

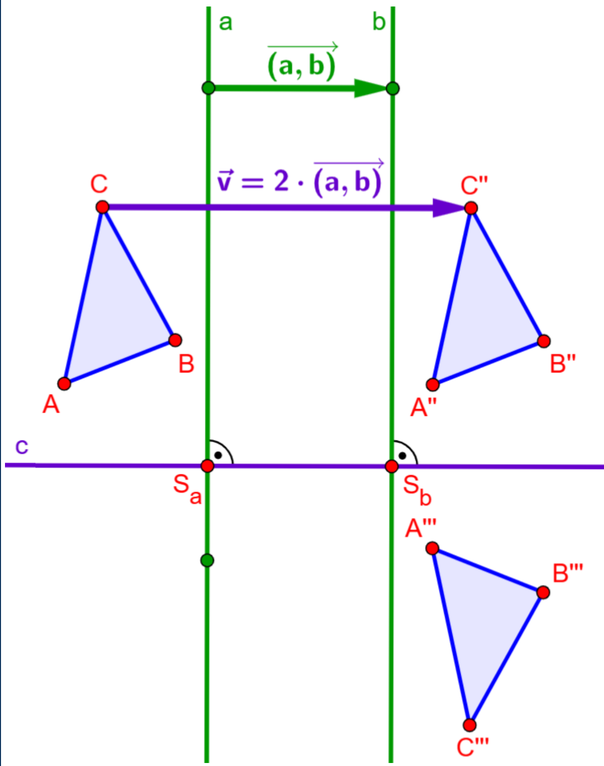
$$g_{c,\vec{v}} := s_c \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ s_c = s_c \circ s_b \circ s_a = p_{S_b} \circ s_a$$
$$= s_b \circ s_a \circ s_c = s_b \circ p_{S_a} = s_b \circ s_c \circ s_a$$



Eigenschaften der Schubspiegelung

Eigenschaften der Schubspiegelung $g_{c,\vec{v}}$

- **Bijektivität:** Ja
- **Geradentreue:** Ja.
- **Fixpunkte:** Eine echte Schubspiegelung (also keine reine Achsen-spiegelung $g_{c,\vec{0}} \equiv s_c$) besitzt keine Fixpunkte.
  Besitzt eine Schubspiegelung also einen Fixpunkt, dann handelt es sich um eine Achsenspiegelung ohne Schubanteil.
- **Fixgeraden:** Die Schubspiegelgerade c ist die einzige Fixgerade einer Schubspiegelung $g_{c,\vec{v}}$.
- **Fixrichtungen:** Nur die Richtung der Schubspiegelgeraden c und die zu ihr senkrechte Richtung sind Fixrichtungen.
- **Parallelentreue:** Ja.
- **Winkeltreue:** Ja.
- **Längentreue:** Ja
- **Orientierungstreue:** Da eine Gleitspiegelung eine Verkettung einer un-geraden Anzahl von Achsenspiegelung ist, ist sie nicht orientierungstreu.



Verkettung von drei Achsenspiegelungen

Satz 2.9:
Verkettung von drei Achsenspiegelungen

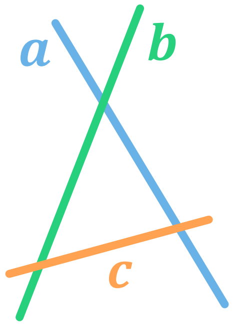
Die Verkettungen von drei Achsenspiegelungen s_a, s_b und s_c an Geraden die weder

- alle parallel zueinander sind ($a \parallel b \parallel c$) noch
- sich alle in einem Punkt S schneiden ($a \cap b \cap c = \{S\}$),

ist immer eine Schubspiegelung.

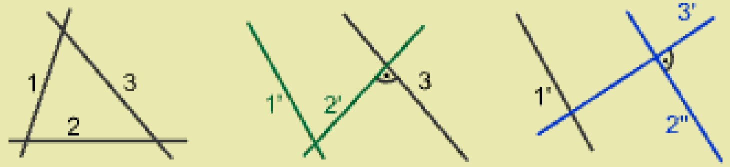
Beweisidee:

1. Fall

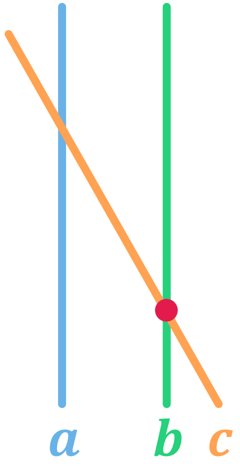


Mit dem Ersetzen von aufeinanderfolgenden Achsenpaaren als Werkzeug wird die Lage der 2. Achse verändert:

1. $\perp$ zur 3. Achse
2. $\parallel$ zur 1. Achse

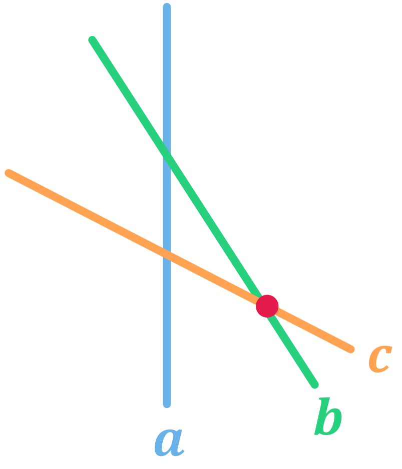


2. Fall



Zurückführen

auf 1. Fall



RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

2 Kongruenzabbildungen der Ebene

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

Verkettung von vier Achsenspiegelungen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Satz 2.10: Reduktionssatz

Eine Verkettung von vier Achsenspiegelungen lässt sich immer auf eine Verkettung von zwei Achsenspiegelungen reduzieren, sie ist also immer eine Verschiebung oder eine Drehung.

Folgerungen aus dem Reduktionssatz

(1) Jede endliche Verkettung von Achsenspiegelungen lässt sich durch eine Verkettung von maximal drei Achsenspiegelungen darstellen.

(2) Jede Verkettung aus einer

- geraden Anzahl von Achsenspiegelungen ist eine Drehung oder Verschiebung
- ungeraden Anzahl von Achsenspiegelungen ist eine Achsen- oder Schubspiegelung.

(3) Es gibt nur vier Typen von aus Achsenspiegelungen erzeugten Abbildungen: Achsenspiegelungen, Drehungen (mit der Punktspiegelung als Spezialfall), Verschiebungen und Schubspiegelungen.

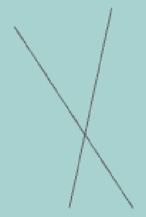
Jede endliche Verkettung aus solchen Abbildungen ist wieder von einem dieser Typen.

Achsenspiegelungen verketten

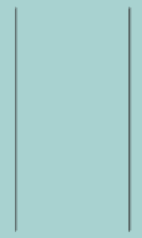
Gerade Achszahl

Ungerade Achszahl

2 Achsen

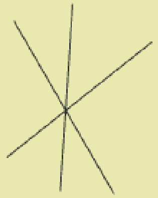


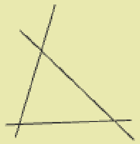
Drehung

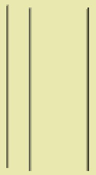


Verschiebung

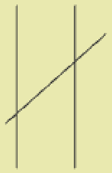
3 Achsen







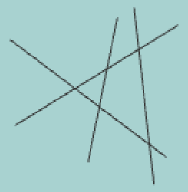
Achsenspiegelung



Schubspiegelung

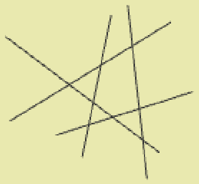
mehr als 3 Achsen

4, 6, 8, 10, ...



Drehung
oder
Verschiebung

5, 7, 9, 11, ...



Achsenspiegelung
oder
Schubspiegelung

 Ruffle-SWF-Player SWF-Datei

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU