Geometrie

Modul 4b

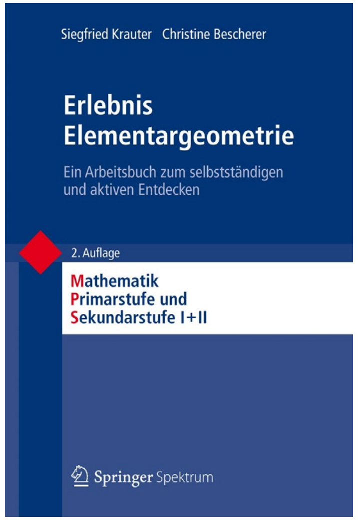
Jürgen Roth

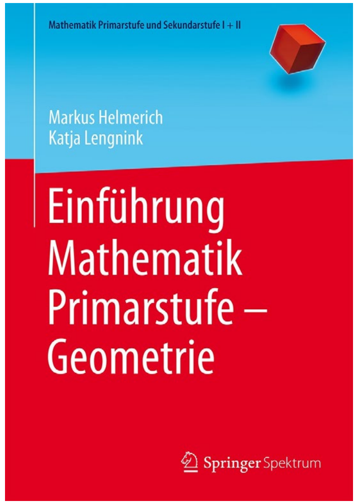
28.12.2023 juergen-roth.de

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Materialien zur Veranstaltung





- **Internetseite zur Veranstaltung und Skript**
  juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/ ⇒ Material

- **Textdatenbank**
  juergen-roth.de/lehre ⇒ Texte

- **Zeitschriften**
  juergen-roth.de/zeitschriften

- **Wichtigste Literatur**

  Krauter, S. & Bescherer, C. (2013). Erlebnis Elementargeometrie. Heidelberg: Springer Spektrum.

  Helmerich, M. & Lengnink, K. (2016). Einführung Mathematik Primarstufe – Geometrie. Heidelberg: Springer Spektrum.

1 : 2 Prinzip

Arbeitsverteilung in der Schule

Unterricht		Eigenarbeit
3	:	1

Arbeitsverteilung an der Universität

Verantwortung

- Rahmenbedingungen: Lehrende
- Lernprozess: Studierende

Lehrveranstaltungen		Eigenarbeit
1	:	2

1:2 Prinzip

1:2 Prinzip

Studienerfolg stellt sich ein, wenn zu jeder Stunde in Lehrveranstaltungen zwei Stunden Eigenarbeit aufgewendet werden.

Beispiele für Eigenarbeit

- Inhalte selbst strukturieren (z.B. Zusammenfassung erstellen)
- Fachgespräche mit Kommilitonen (Arbeitsgruppen bilden)
- Fragen formulieren, stellen, diskutieren, beantworten
- Eigenständig Literatur rezipieren (Lehrbücher, Zeitschriftentexte, ...)
- Mathe-Treff, Tutorien, Sprechstunde, ... besuchen
- **aktive Beteiligung an den Übungen**
- **Prüfungen vorbereiten**

Informationen und Fragen zur Vorlesung

Informationen und Material zur Vorlesung

https://juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

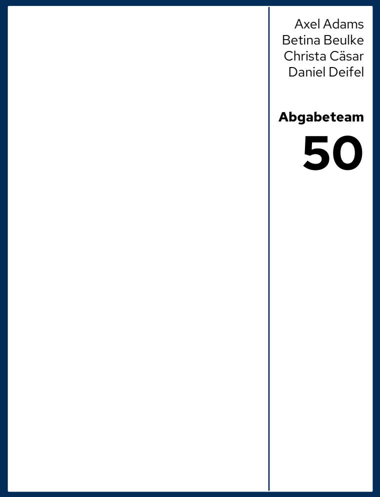
- **Zeitplan Vorlesung & Übungen** → Veranstaltungsplanung
- **Vorlesungsvideos:** In Veranstaltungsplanung verlinkt.
- Skript zur Vorlesung
- Übungsblätter und Lösungshinweise dazu (im OLAT-Kurs)
- Termine der Prüfungen und der Prüfungsanmeldung
- Erläuterung zur Bonusregelung

Fragen zur Vorlesung

- in der Vorlesung direkt stellen,
- notieren und in der Fragerunde zu Beginn der nächsten Vorlesung stellen,
- im Vorlesungsforum im OLAT-Kurs posten.

Übungsblätter

- https://juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/ → Material
- Abgabe: Festen 4er-Abgabeteams.
- Einschreiben für Abgabeteams in OLAT.
- Bearbeitungen auf der ersten Seite rechts oben mit den Namen der Gruppenmitglieder und der Nummer des Abgabeteams (Im Beispiel: 50) beschriften.



- Bearbeitungen als eine PDF-Datei pro Übungsblatt mit allen Aufgaben des Übungsblatts abspeichern.
- Abgabe bis spätestens Freitag, 12:00 Uhr durch Hochladen der PDF-Datei im OLAT-Kurs im vorgesehenen Ordner Abgaben Übungsblätter.
- Rückgabe der korrigierten Übungsblätter im OLAT-Kurs.

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Geometrie 4b

1. Ideen der Geometrie
2. Kongruenzabbildungen der Ebene
3. Figuren in der Ebene und im Raum
4. Zeichnerische Darstellung von Körpern
5. Flächen- und Rauminhalte
6. Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

1

Geometrie 4b

Ideen der Geometrie

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

1 Ideen der Geometrie

1.1 Was ist Geometrie?

1.2 Axiome als Grundlagen

1.3 Bewegungen einer Baggerschaufel

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

1 Ideen der Geometrie

1.1 Was ist Geometrie?

1.2 Axiome als Grundlagen

1.3 Bewegungen einer Baggerschaufel

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

Aspekte von Geometrie

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Lehre vom Anschauungsraum
(Geo-metrie
= Erd-Vermessung)

Beispiel einer deduktiven Theorie

Übungsfeld für Problemlösen und Argumentieren

Vorrat an mathematischen Strukturen

Geometrie (altgriechisch γεωμετρία *geometria*, ionisch γεωμετρίη *geometriē*,) beutet „Erdmessung“.

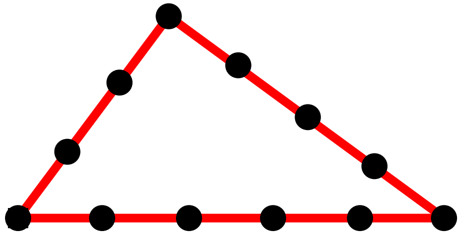
Geometrie?!

Geometrie ist …

- die Wissenschaft vom uns umgebenden Raum.
- das älteste mathematische Teilgebiet:
  Über viele Jahrhunderte hinweg bestand die Mathematik im Wesentlichen aus Geometrie.

Ägypter & Babylonier (ab 3000 v. Chr.)

- Geometrie ist eine Naturwissenschaft.
- Man fragte nicht nach logischer Ableitbarkeit, sondern nach Übereinstimmung mit der Realität.
- Man „wusste“ zum Beispiel, wie man rechte Winkel konstruieren konnte, und das reichte.



Geometrie als erste (deduktive) Wissenschaft

Alte Griechen (ab 500 v. Chr.)

- Man kann durch reines Denken Erkenntnisse erzielen!
- Denken folgt gewissen Regeln, den Gesetzen der Logik.

Elemente des Euklid

- Streng deduktiv aufgebaut.
- Unterscheidung:
  Grundbegriffe ↔ definierte Begriffe
- Ausgehend von wenigen Grundsätzen (Axiomen) werden durch logisches Schließen alle Folgesätze bewiesen.

„More geometrico“

- Im Mittelalter in allen universitären Disziplinen Ausdruck für streng logisch aufgebaute („wissenschaftliche“) Argumentationsketten.

 http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/ausstell/hilbert/euklid.html

Geometrie und Wirklichkeit

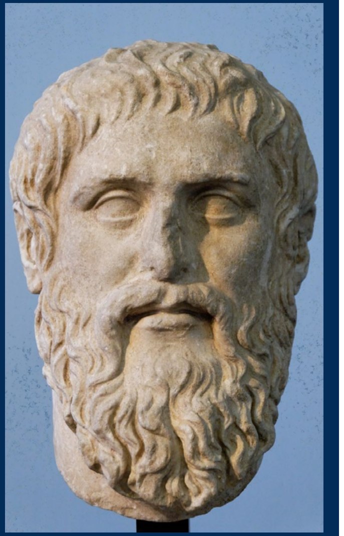
Platon
(427 - 347 v. Chr.)

Es gibt zwei Welten,

- die Welt der Ideen
  (die eigentliche Welt)

  und

- die Welt der Erscheinungen
  (nur ein Schatten der eigentlichen Welt).



Immanuel Kant
(1724 - 1804)

- Geometrie ist ein Produkt unseres Verstandes
- „synthetische Urteile a priori"

David Hilbert
(1862 - 1943)

- Es werden nicht Objekte definiert
  (Es wird z. B. nicht erklärt was ein Punkt ist.),
  sondern nur die Spielregeln fest-gelegt, also wie mit den Objekten umzugehen ist.
- „Man muss jederzeit an Stelle von ‚Punkte, Geraden, Ebenen', ‚Tische, Stühle, Bierseidel' sagen können."

Anschauung, Begriffe und Ideen

So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauung an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.

Immanuel Kant: Kritik der reinen Vernunft,
Elementarlehre T. 2. Abt. 2.

Die Geometrie bedarf (...) zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger einfach Grundsätze.
Diese Grundsätze heißen Axiome der Geometrie.

Die Aufstellung der Axiome der Geometrie (...) läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.

David Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Einleitung

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

1 Ideen der Geometrie

1.1 Was ist Geometrie?

1.2 Axiome als Grundlagen

1.3 Bewegungen einer Baggerschaufel

GeoGebra-Buch „Geometrie (Modul 4b)“ https://roth.tel/geometrie_4b

Definitionen, Axiome und Postulate

Euklid von Alexandria (ca. 365-300 v.Chr.)

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Definitionen (Erklärungen)

1. Was keine Teile hat, ist ein Punkt.
2. Eine Länge ohne Breite ist eine Linie.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine Linie ist gerade, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist.
5. Was nur Länge und Breite hat, ist eine Fläche.
6. … (Bei Euklid gibt es 23 Erklärungen.)

Axiome (Grundsätze)

1. Dinge, die demselben Dinge gleich sind, sind einander gleich.
2. Fügt man zu Gleichem Gleiches hinzu, so sind die Ergebnisse gleich.
3. Nimmt man von Gleichem Gleiches weg, so sind die Reste gleich.
4. Was zur Deckung miteinander gebracht werden kann, ist einander gleich.
5. Das Ganze ist größer als sein Teil.
6. … (Bei Euklid gibt es 10 Grundsätze.)

https://www.c82.net/euclid/

http://www.opera-platonis.de/euklid/

https://www.kielscn.de/2022/11/visualisierung-des-monats-november/

Definitionen, Axiome und Postulate

Euklid von Alexandria (ca. 365-300 v.Chr.)

Postulate

Es soll gefordert werden, dass

1. sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.
2. sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.
3. sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.
4. alle rechten Winkel einander gleich seien.
5. wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Parallelenaxiom

(alternativ zu Euklids Postulat 5)

In einer Ebene gibt es zu jeder Geraden g und jedem Punkt P außerhalb von g genau eine Gerade, die zu g parallel ist und durch den Punkt P geht.

Hilbertsches Axiomensystem

Hinweis: Inzidenz eines Punktes P mit einer Geraden g oder Ebene ε bedeutet, dass P auf g oder ε liegt ($P \in g$ bzw. $P \in \varepsilon$). Inzidiert die Gerade g mit der Ebene ε, so ist die Geraden g Teilmenge der Ebene ε, es gilt also: $g \subset \epsilon$.

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

(1) Axiome der Verknüpfung (Inzidenz)

I1 Zwei voneinander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade g.

I2 Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.

I3 Auf einer Geraden gibt es stets mindestens zwei Punkte.
In einer Ebene gibt es stets mindestens drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

I4 Drei nicht auf derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene ε.

(1) Axiome der Verknüpfung (Inzidenz) (Forts.)

I5 Irgend drei Punkte einer Ebene ε, die nicht auf derselben Geraden liegen, bestimmen die Ebene ε.

I6 Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden g in einer Ebene ε liegen, so liegt jeder Punkt von g in der Ebene ε.

I7 Wenn zwei Ebenen ε, φ einen gemeinsamen Punkt A haben, so haben sie mindestens einen weiteren gemeinsamen Punkt B.

I8 Es gibt mindestens vier Punkte, die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Bemerkung: Hilberts Axiomensystem ist das erste vollständige und widerspruchsfreie der Geometrie.

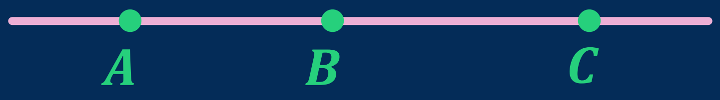
Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. Stuttgart: Teubner.

Hilbertsches Axiomensystem

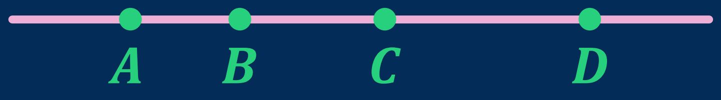
Hinweise: Für „der Punkt C liegt zwischen den Punkten A und B" schreibt man kurz: $A–C–B$.
Mit der Relation „liegt zwischen" kann man z.B. den Begriff Strecke definieren.

(2) Axiome der Anordnung

A1 Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, dann liegt B auch zwischen C und A.



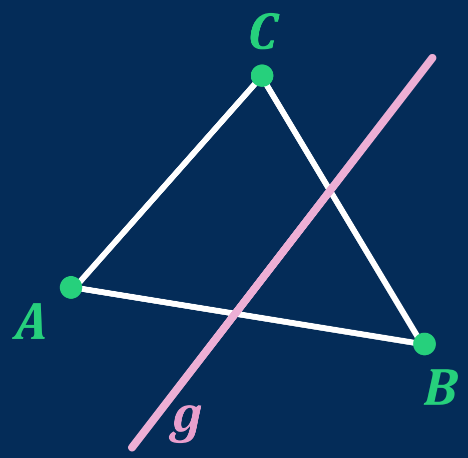
A2 Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es stets mindestens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und mindestens einen Punkt D, so dass C zwischen A und D liegt.



A3 Von drei Punkten einer Geraden liegt immer genau einer zwischen den beiden anderen.

(2) Axiome der Anordnung (Fortsetzung)

A4 (Axiom von Pasch)
Falls eine Gerade g durch keinen der Eckpunkte eines Dreiecks verläuft sowie eine Seite dieses Dreiecks schneidet, so schneidet g noch eine weitere Seite des Dreiecks.



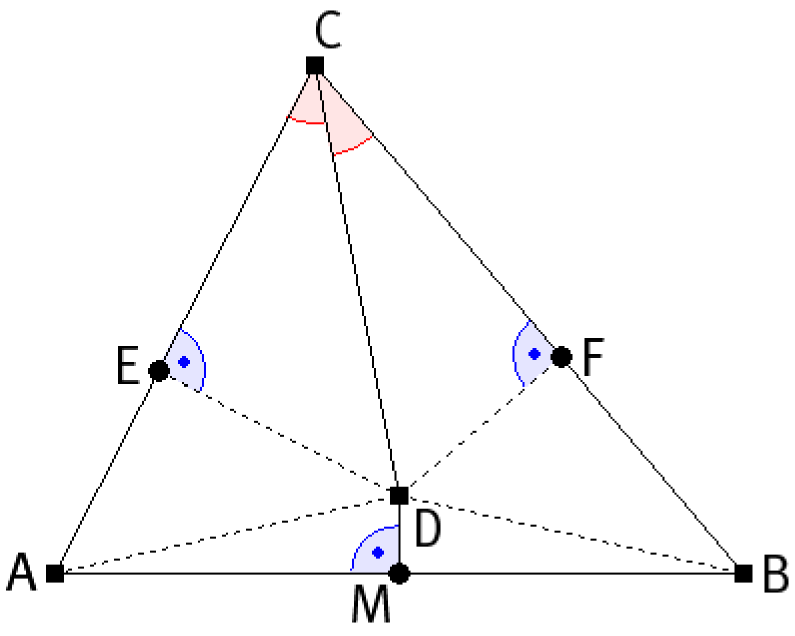
Moritz Pasch
(1843 – 1930)

Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. Stuttgart: Teubner.

Anordnung, wozu?

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Paradoxon
Jedes Dreieck ist gleichschenklig.



Schreibweise:
$|DC|$ bezeichnet die Länge der Strecke $[DC]$.
$|\measuredangle AED|$ bezeichnet die Größe des Winkels $\measuredangle AED$.

Voraussetzungen

(1) CD ist Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$.
(2) MD ist Mittelsenkrechte der Strecke $[AB]$.
(3) DF ist das von D auf BC gefällte Lot mit Lotfußpunkt F.
(4) DE ist das von D auf AC gefällte Lot mit Lotfußpunkt E.

Beweis

- $\Delta CED \cong \Delta CFD$ nach Kongruenzsatz WSW.
- $\Delta AMD \cong \Delta BMD$ nach Kongruenzsatz SWS.
- Aus $|ED| = |DF|$, $|AD| = |DB|$ und $|\measuredangle AED| = |\measuredangle DFB| = 90°$ folgt mit SsW: $\Delta ADE \cong \Delta \mathrm{BDF}$
- Also ist $|AE| = |BF|$.
- Damit ist $|AC| = |BC|$.
- ΔABC ist gleichschenklig.

Wo steckt der Fehler?

RPTU

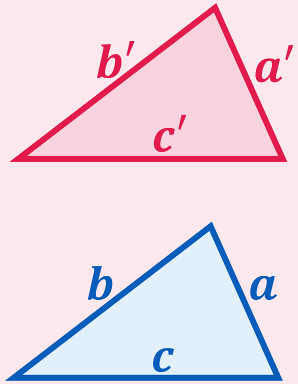
Kongruenzsätze für Dreiecke

Bemerkung: Da kongruente Dreiecke deckungsgleich sind, sind entsprechende Winkel gleich groß und entsprechende Seiten gleich lang.

Kongruenzsatz SSS

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen aller Seiten übereinstimmen.

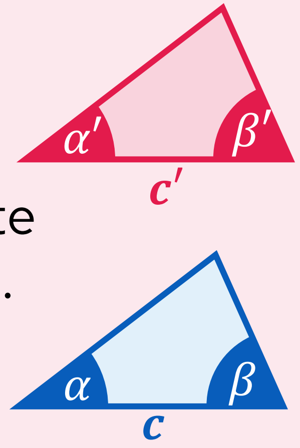
$|a'| = |a| \wedge |b'| = |b| \wedge |c'| = |c|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



Kongruenzsatz WSW

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge einer Seite und den Winkelgrößen der beiden an der Seite anliegenden Winkel übereinstimmen.

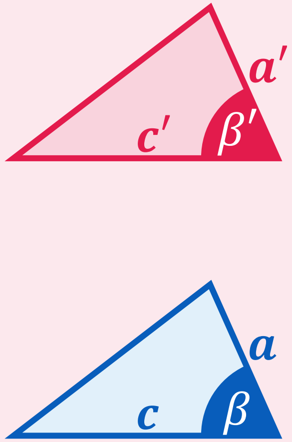
$|c'| = |c| \wedge |\alpha'| = |\alpha| \wedge |\beta'| = |\beta|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



Kongruenzsatz SWS

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Winkelgröße eines Winkels und den Seitenlängen der beiden am Winkel anliegenden Seiten übereinstimmen.

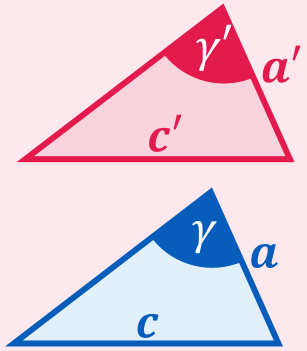
$|\beta'| = |\beta| \wedge |a'| = |a| \wedge |c'| = |c|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



Kongruenzsatz SsW

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und der Winkelgröße des Winkels, der der längeren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen.

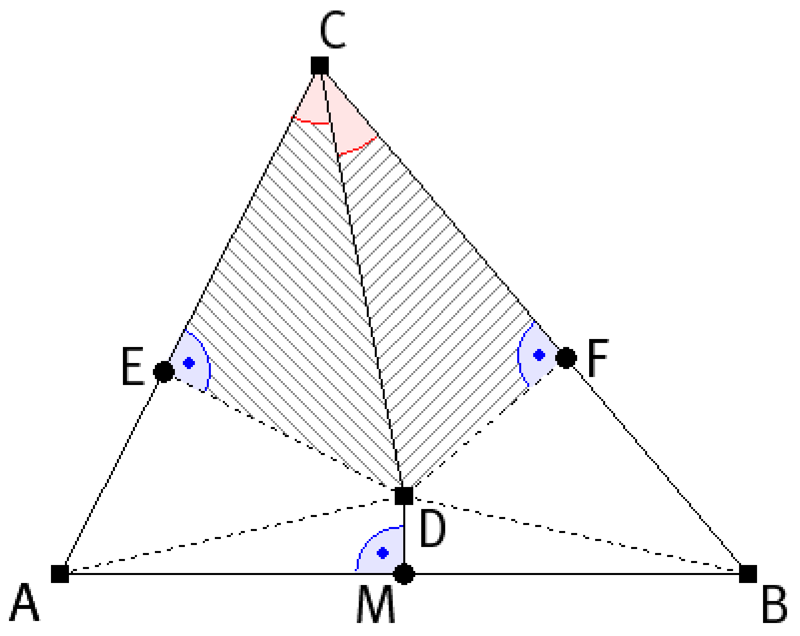
$|a'| = |a| \wedge |c'| = |c| \wedge |c| > |a| \wedge |\gamma'| = |\gamma|$
$\Rightarrow \Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$



Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H. G. (2018). Kongruenzsätze. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 195–199). Berlin: Springer Spektrum.

Kongruenzbeweis 1

Paradoxon
Jedes Dreieck ist gleichschenklig.



Voraussetzungen

(1) CD ist Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$.
(2) MD ist Mittelsenkrechte der Strecke $[AB]$.
(3) DF ist das von D auf BC gefällte Lot mit Lotfußpunkt F.
(4) DE ist das von D auf AC gefällte Lot mit Lotfußpunkt E.

Zu zeigen ist:

Die Dreiecke ΔCED und ΔCFD sind zueinander kongruent ($\Delta CED \cong \Delta CFD$).

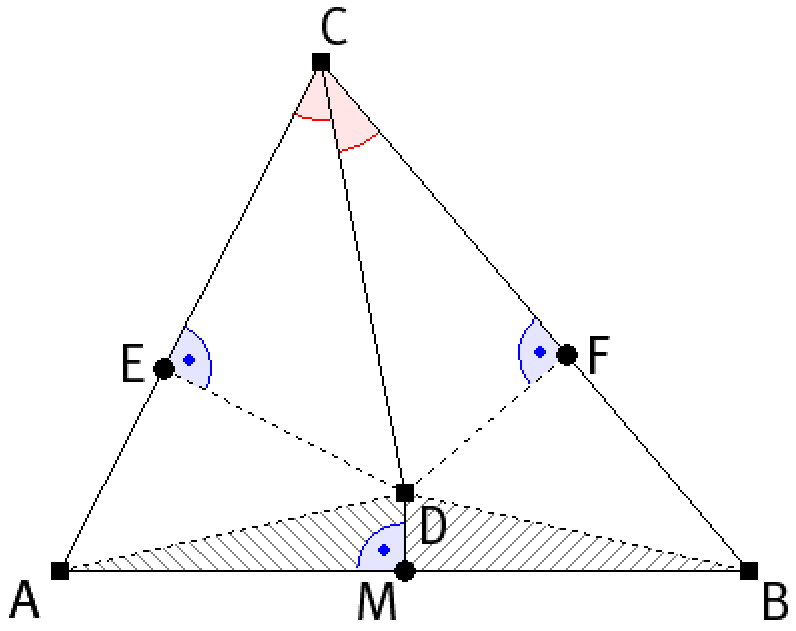
Beweis (Beweisidee: Nutzung des Kongruenzsatzes WSW)

i. $|\measuredangle ACD| = |\measuredangle DCB|$ (Vor. (1))
ii. $|DC| = |DC|$ ($[DC]$ gehört zu ΔCED und ΔCFD)
iii. $|\measuredangle CDE| = |\measuredangle FDC|$ (Vor. (1), (3), (4) und Innenwinkelsumme im Dreieck)

$$\overset{\text{i, ii, iii, Kongruenzsatz WSW}}{\Rightarrow} \Delta CED \cong \Delta CFD$$

Kongruenzbeweis 2

Paradoxon
Jedes Dreieck ist gleichschenklig.



Voraussetzungen

(1) CD ist Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$.
(2) MD ist Mittelsenkrechte der Strecke $[AB]$.
(3) DF ist das von D auf BC gefällte Lot mit Lotfußpunkt F.
(4) DE ist das von D auf AC gefällte Lot mit Lotfußpunkt E.

Zu zeigen ist:

Die Dreiecke ΔAMD und ΔBMD sind zueinander kongruent ($\Delta AMD \cong \Delta BMD$).

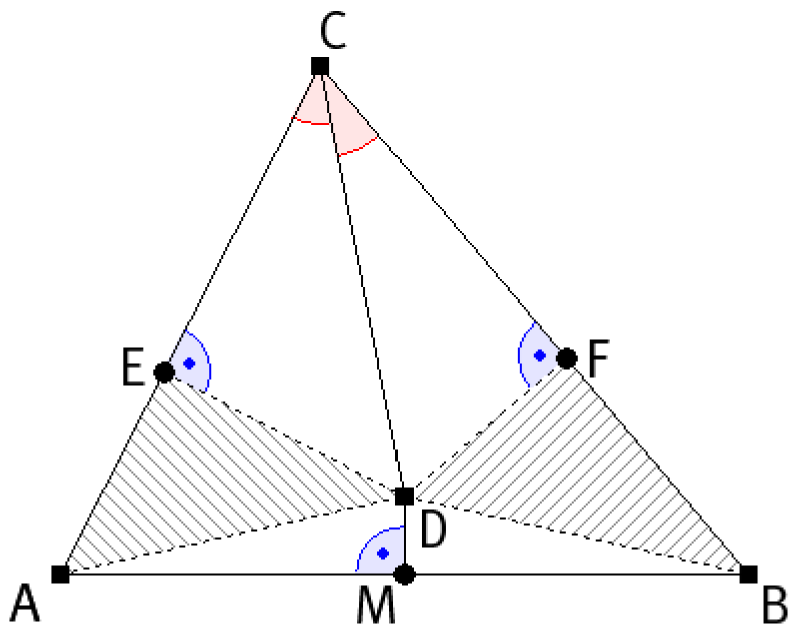
Beweis (Beweisidee: Nutzung des Kongruenzsatzes SWS)

i. $|AM| = |MB|$ (Vor. (2))
ii. $|\measuredangle DMA| = |\measuredangle BMD| = 90°$ (Vor. (2))
iii. $|MD| = |MD|$ ($[MD]$ gehört zu ΔAMD und ΔMBD)

i, ii, iii, Kongruenzsatz SWS
$$\Rightarrow \quad \Delta AMD \cong \Delta BMD$$ ■

Kongruenzbeweis 3

Paradoxon
Jedes Dreieck ist gleichschenklig.



Voraussetzungen

(1) CD ist Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$.

(2) MD ist Mittelsenkrechte der Strecke $[AB]$.

(3) DF ist das von D auf BC gefällte Lot mit Lotfußpunkt F.

(4) DE ist das von D auf AC gefällte Lot mit Lotfußpunkt E.

Zu zeigen ist:

Die Dreiecke ΔADE und ΔDBF sind zueinander kongruent ($\Delta ADB \cong \Delta DBF$).

Beweis (Beweisidee: Nutzung des Kongruenzsatzes SsW)

i. $|AD| = |DB|$ ($\Delta AMD \cong \Delta BMD$)

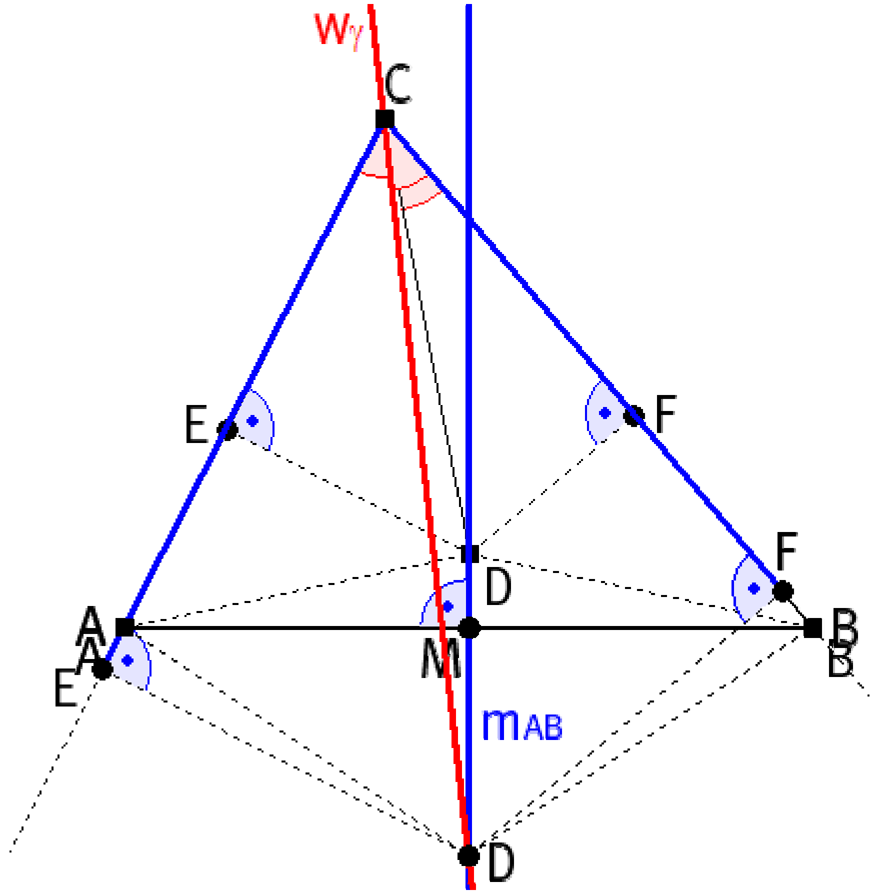
ii. $|ED| = |DF|$ ($\Delta CED \cong \Delta CFD$)

iii. $|\measuredangle AED| = |\measuredangle DFB| = 90°$ (Vor. (3) und Vor. (4))

$$\overset{\text{i, ii, iii, Kongruenzsatz SsW}}{\Rightarrow} \quad \Delta ADE \cong \Delta BDF \quad \blacksquare$$

Anordnung, wozu?

Paradoxon
Jedes Dreieck ist gleichschenklig.



Voraussetzungen

(1) CD ist Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$.

(2) MD ist Mittelsenkrechte der Strecke $[AB]$.

(3) DF ist das von D auf BC gefällte Lot mit Lotfußpunkt F.

(4) DE ist das von D auf AC gefällte Lot mit Lotfußpunkt E.

Beweis

- $\Delta CED \cong \Delta CFD$ nach Kongruenzsatz WSW.
- $\Delta AMD \cong \Delta BMD$ nach Kongruenzsatz SWS.
- Aus $|ED| = |FD|$, $|AD| = |BD|$ und $|\measuredangle AED| = |\measuredangle BFD| = 90°$ folgt mit SsW: $\Delta ADE \cong \Delta \mathrm{BDF}$
- Also ist $|AE| = |BF|$.
- Damit ist $|AC| = |BC|$.
- ΔABC ist gleichschenklig.

Hier steckt der Fehler!

Hilbertsches Axiomensystem

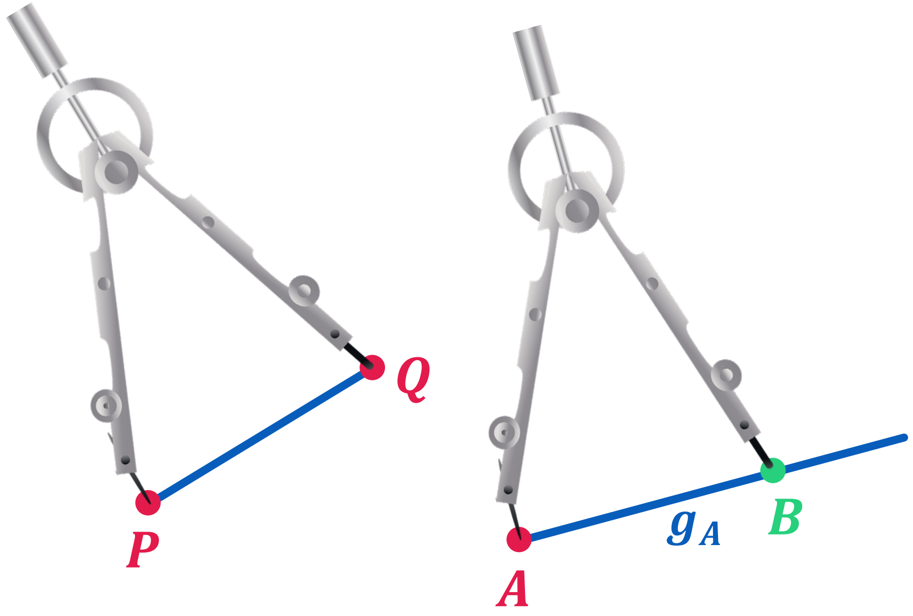
Hinweis: Für „die Strecke $[PQ]$ ist kongruent (deckungsgleich) zur Strecke $[AB]$“ schreibt man kurz: $[PQ] \cong [AB]$

(3) Axiome der Kongruenz

K1 Eindeutige Streckenabtragung und Selbstkongruenz

Ist $[PQ]$ eine Strecke und g_A eine von A ausgehende Halbgerade, dann gibt es genau einen Punkt $B \in g_A$, so dass $[PQ]$ kongruent zu $[AB]$ ist, also gilt: $[PQ] \cong [AB]$

Jede Strecke ist zu sich selbst kongruent, es gilt also: $[AB] \cong [AB]$ und $[AB] \cong [BA]$

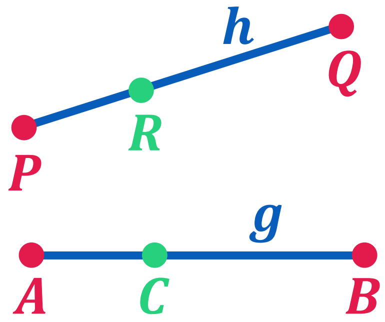


K2 Transitivität der Streckenkongruenz

Wenn eine Strecke zu zwei anderen Strecken kongruent ist, so sind diese auch zueinander kongruent. Es gilt also: $[AB] \cong [PQ] \wedge [PQ] \cong [CD] \Rightarrow [AB] \cong [CD]$

K3 Erhalt der Kongruenz bei Streckenaddition

Ist C ein Punkt der Strecke $[AB]$ und R ein Punkt der Strecke $[PQ]$, dann folgt aus $[AC] \cong [PR]$ und $[CB] \cong [RQ]$, dass auch $[AB] \cong [PQ]$.



Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. Stuttgart: Teubner.

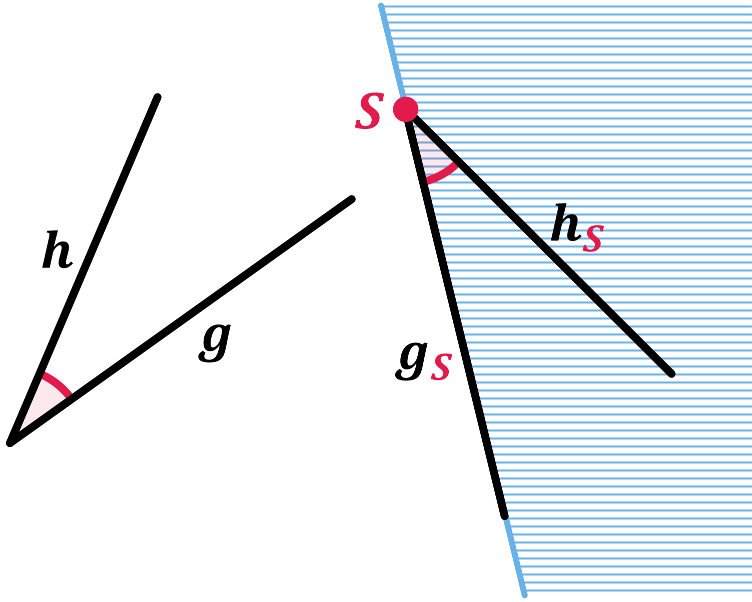
Hilbertsches Axiomensystem

(3) Kongruenzaxiome (Fortsetzung)

K4 Eindeutige Winkelabtragung und Selbstkongruenz

Zu jedem Winkel $\angle(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})$ und jeder Halbgeraden $\boldsymbol{g_S}$ gibt es in jeder Halbebene bzgl. $\boldsymbol{g_S}$ genau eine Halbgerade $\boldsymbol{h_S}$ mit demselben Scheitel $\boldsymbol{S}$, so dass $\angle(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})$ und $\angle(\boldsymbol{g_S},\boldsymbol{h_S})$ zueinander kongruent sind, also gilt: $\angle(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}) \cong \angle(\boldsymbol{g_S},\boldsymbol{h_S})$

Jeder Winkel ist zu sich selbst kongruent, es gilt also:
$\angle(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}) \cong \angle(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})$ und $\angle(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}) \cong \angle(\boldsymbol{h},\boldsymbol{g})$

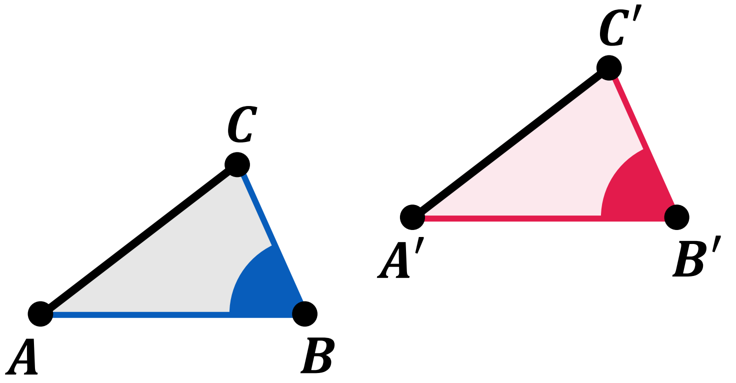


K2 Transitivität der Winkelkongruenz

Wenn ein Winkel zu zwei anderen Winkeln kongruent ist, so sind diese auch zueinander kongruent. Es gilt also:
$\angle(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}) \cong \angle(\boldsymbol{g'},\boldsymbol{h'}) \wedge \angle(\boldsymbol{g'},\boldsymbol{h'}) \cong \angle(\boldsymbol{g''},\boldsymbol{h''}) \Rightarrow \angle(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}) \cong \angle(\boldsymbol{g''},\boldsymbol{h''})$

K6 Zusammenhang zwischen Strecken- und Winkelkongruenzen

Wenn für zwei Dreiecke $\Delta\boldsymbol{ABC}$ und $\Delta\boldsymbol{A'B'C'}$ gilt $[\boldsymbol{AB}] \cong [\boldsymbol{A'B'}]$, $[\boldsymbol{BC}] \cong [\boldsymbol{B'C'}]$ und $\measuredangle(\boldsymbol{CBA}) \cong \measuredangle(\boldsymbol{C'B'A'})$, dann gilt immer auch $\measuredangle(\boldsymbol{BAC}) \cong \measuredangle(\boldsymbol{B'A'C'})$ und $\measuredangle(\boldsymbol{ACB}) \cong \measuredangle(\boldsymbol{A'C'B'})$.



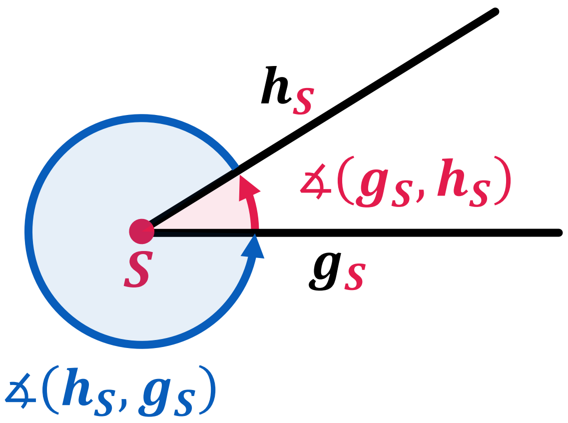
Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. Stuttgart: Teubner.

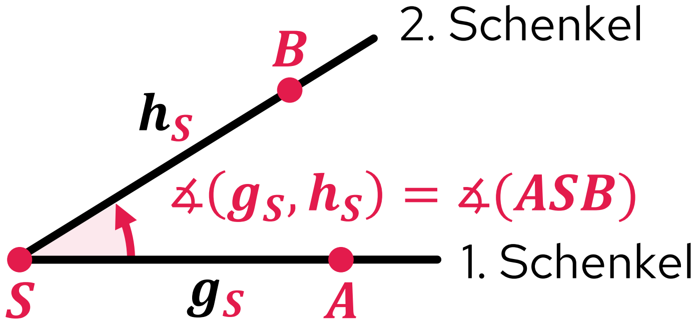
Winkeltypen

Bemerkung: Wir unterschieden vier Winkeltypen.

(1) Orientierter Winkel zwischen zwei Halbgeraden

- Zwei Halbgeraden g_S und h_S, die einen gemeinsamen Anfangspunkt $\boldsymbol{S}$ besitzen, legen zwei orientierte Winkel fest, die jeweils einen mathematisch positiven Umlaufsinn (gegen den Uhrzeigersinn) besitzen, nämlich die Winkel $\measuredangle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})$ und $\measuredangle(\boldsymbol{h_S}, \boldsymbol{g_S})$.
- Die Winkelgrößen dieser beiden Winkel ergänzen sich zu 360°, es gilt also: $|\measuredangle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})| + |\measuredangle(\boldsymbol{h_S}, \boldsymbol{g_S})| = 360°$
- Wenn der Punkt A ($\neq S$) auf dem ersten Schenkel des Winkels $\measuredangle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})$, also auf der Halbgeraden g_S, liegt und der Punkt B ($\neq S$) auf dem zweiten Schenkel des Winkels $\measuredangle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})$, also auf der Halbgeraden h_S liegt, dann kann man für kann für $\measuredangle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})$ auch $\measuredangle(\boldsymbol{ASB})$ schreiben ($\boldsymbol{A}$ = „Punkt auf dem 1. Schenkel“, $\boldsymbol{S}$ = „Scheitelpunkt“, $\boldsymbol{B}$ = „Punkt auf dem zweiten Schenkel“).





Winkeltypen

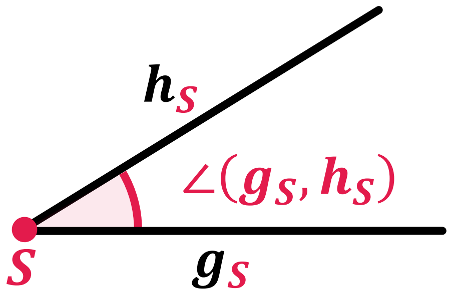
Bemerkung: Wir unterschieden vier Winkeltypen.

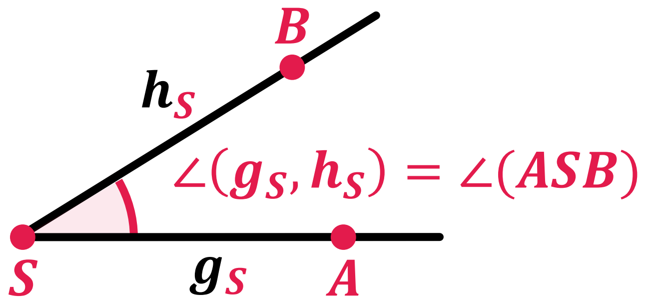
(2) Nicht-orientierter Winkel zwischen zwei Halbgeraden

- Zwei Halbgeraden g_S und h_S, die einen gemeinsamen Anfangspunkt $\boldsymbol{S}$ besitzen, legen einen nicht-orientierten Winkel fest, der als Punktmenge bestehend aus den beiden Halbgeraden g_S und h_S interpretiert werden kann. Diesen nicht-orientierten Winkel bezeichnen wir mit $\angle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S}) \equiv \angle(\boldsymbol{h_S}, \boldsymbol{g_S})$.

- Für die Winkelgrößen eines solchen nicht-orientierten Winkels gilt: $0° \leq |\angle(g_S, h_S)| \leq 180°$

- Wenn der Punkt A auf der Halbgeraden g_S und der Punkt B auf der Halbgeraden h_S liegt, dann kann man für kann für $\angle(\boldsymbol{g_S}, \boldsymbol{h_S})$ auch $\angle(\boldsymbol{ASB})$ schreiben.





Winkeltypen

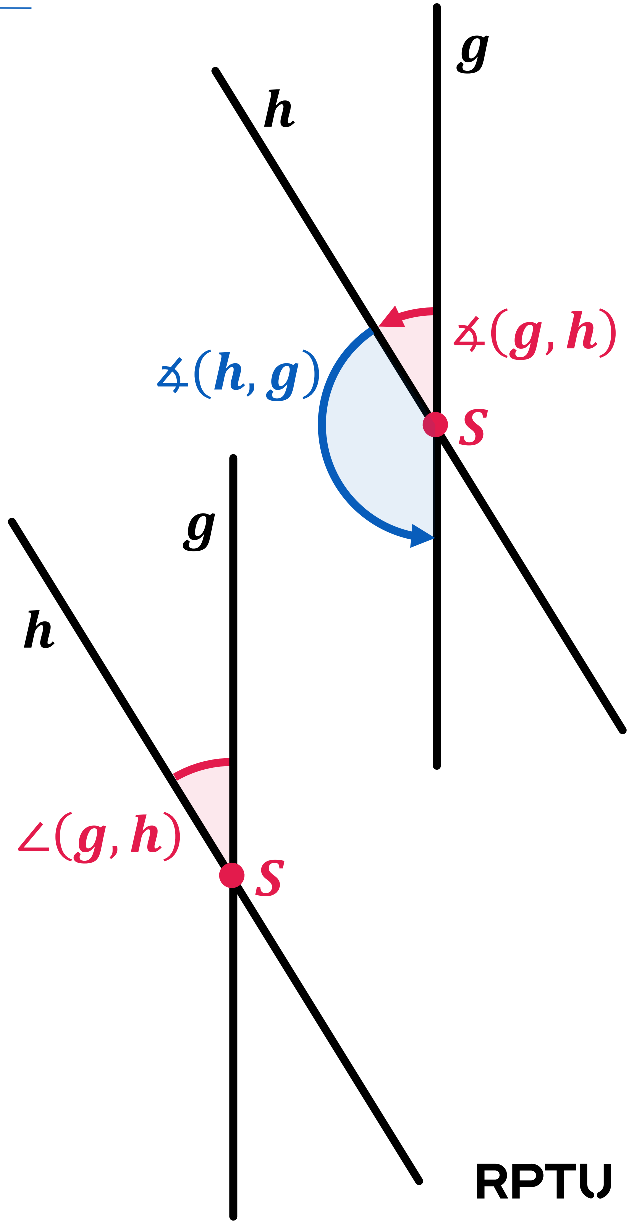
Bemerkung: Wir unterschieden vier Winkeltypen.

(3) Orientierte Winkel zwischen zwei Geraden

- Zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt S schneiden, legen zwei orientierte Winkel fest, die einen mathematisch positiven Umlaufsinn (gegen den Uhrzeigersinn) besitzen, nämlich die Winkel $\measuredangle(g,h)$ und $\measuredangle(h,g)$.
- Die Winkelgrößen dieser beiden Winkel ergänzen sich zu 180°, es gilt also: $|\measuredangle(g,h)| + |\measuredangle(h,g)| = 180°$

(4) Nicht-orientierter Winkel zwischen zwei Geraden

- Zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt S schneiden, legen einen nicht-orientierten Winkel fest, der als Punktmenge bestehend aus den beiden Geraden g und h interpretiert werden kann. Diesen Winkel bezeichnen wir mit $\angle(g,h) \equiv \angle(h,g)$.
- Für die Winkelgröße gilt: $0° \leq |\angle(g,h)| \leq 90°$



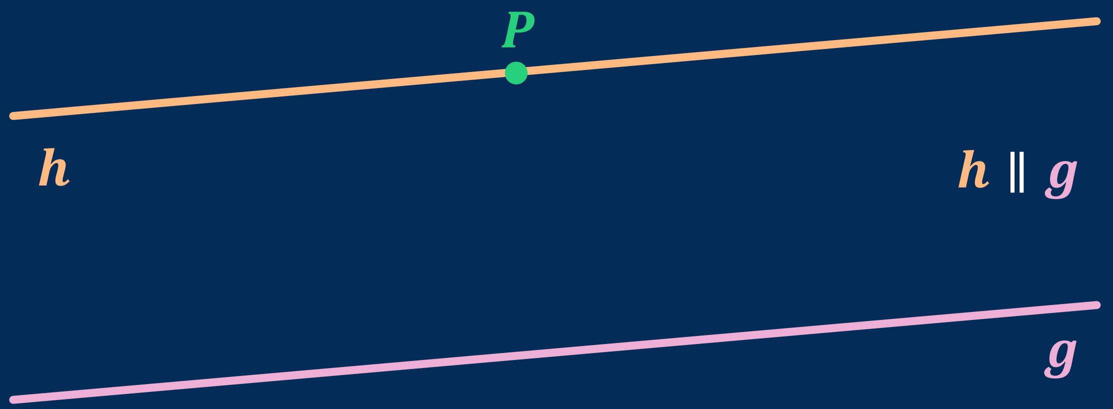
Hilbertsches Axiomensystem

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

(5) Axiom der Parallelen

PA Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt P existiert in der durch g und P bestimmten Ebene ε genau eine Gerade h, die durch P verläuft und g nicht schneidet.

h heißt die Parallele zu g durch P.



Hinweis:
Die Frage, ob das Parallelenaxiom von den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie unabhängig ist, war bis in das 19. Jahrhundert hinein umstritten.

Lobatschewski, Gauß und Bolyai haben schließlich die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms nachgewiesen, indem sie eine Geometrie konstruierten, in der alle anderen Axiome der euklidischen Geometrie und die Negation des Parallelenaxioms gelten.

Diese Geometrie wird Lobatschewski-Geometrie, hyperbolische Geometrie bzw. nichteuklidische Geometrie genannt.

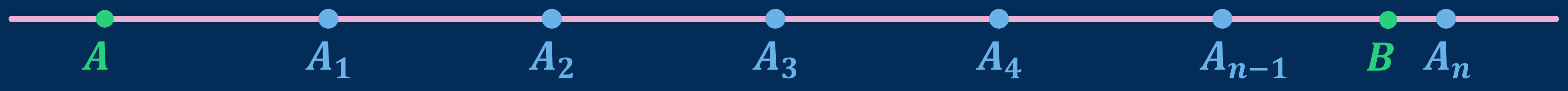
 Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. Stuttgart: Teubner.

Hilbertsches Axiomensystem

(5) Axiome der Stetigkeit

S1 Archimedisches Axiom (Axiom des Messens)

Es sei $\boldsymbol{A_1}$ ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$. Man konstruiere dann die Punkte $\boldsymbol{A_2, A_3, A_4}, \ldots$ so, dass $\boldsymbol{A_1}$ zwischen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A_2}$, ferner $\boldsymbol{A_2}$ zwischen $\boldsymbol{A_1}$ und $\boldsymbol{A_3}$, ferner $\boldsymbol{A_3}$ zwischen $\boldsymbol{A_2}$ und $\boldsymbol{A_4}$ usw. liegt und überdies gilt $[\boldsymbol{AA_1}] \cong [\boldsymbol{A_1A_2}] \cong [\boldsymbol{A_2A_3}] \cong [\boldsymbol{A_3A_4}] \ldots$. Dann gibt es in der Reihe der Punkte $\boldsymbol{A_2, A_3, A_4}, \ldots$ stets einen Punkt $\boldsymbol{A_n}$, so dass $\boldsymbol{B}$ zwischen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A_n}$ liegt.



S2 Axiom der Vollständigkeit

Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, das bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome nicht erweitert werden kann, d. h. zum System der Punkte, Geraden, Ebenen kann kein anderes System von Dingen so hinzugefügt werden, dass in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämtliche Axiome der Gruppen **(1)** bis **(4)** und **S1** erfüllt sind.

 Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. Stuttgart: Teubner.

R TU P
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

1 Ideen der Geometrie

1.1 Was ist Geometrie?

1.2 Axiome als Grundlagen

1.3 Bewegungen einer Baggerschaufel

GeoGebra-Buch
„Geometrie (Modul 4b)“
https://roth.tel/geometrie_4b

juergen-roth.de/lehre/m4b-geometrie/

RPTU

Bewegungen einer Baggerschaufel

Roth, J. (2010). Baggerarmsteuerung – Zusammenhänge rekonstruieren und Problemlösungen erarbeiten. *Der Mathematikunterricht, 56*(5), 35-46


TEREX

Baggersimulation

Zylinderlänge Ausleger

Zylinderlänge Löffelstiel

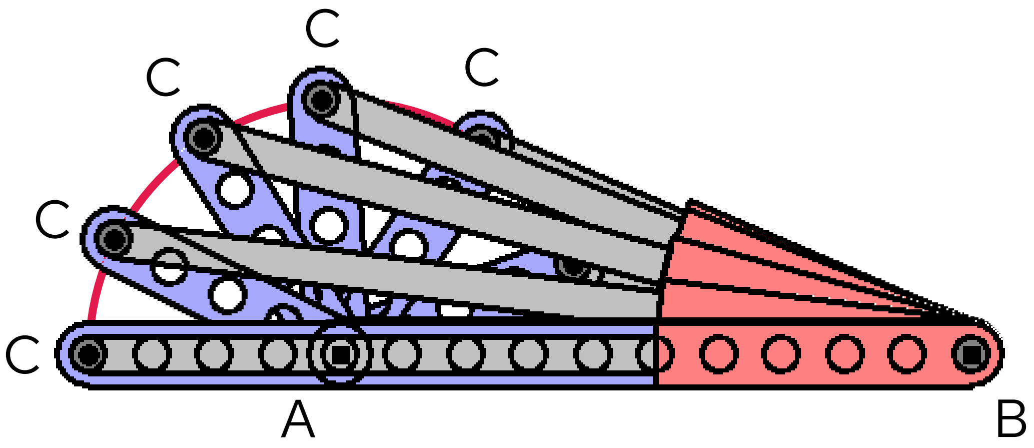
Zylinderlänge Löffel

☐ Dreiecke einblenden

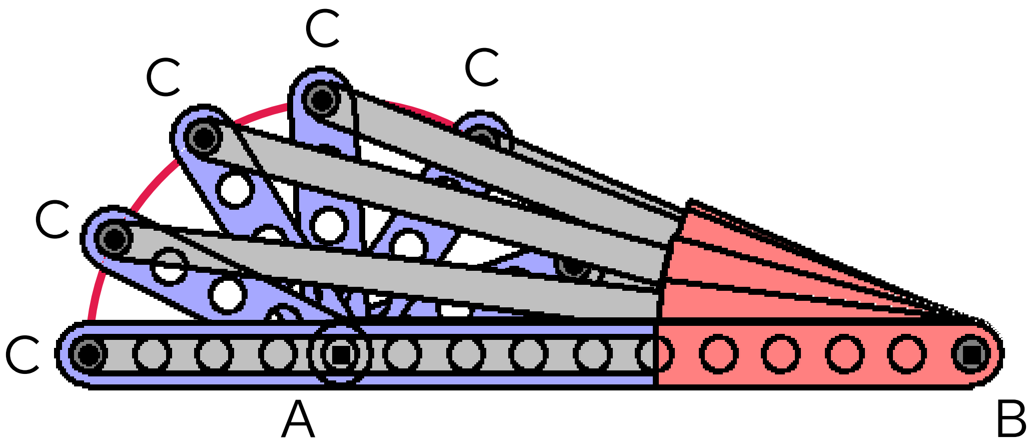
☐ Ortslinien einblenden

☐ Graph einblenden

Krandreieck



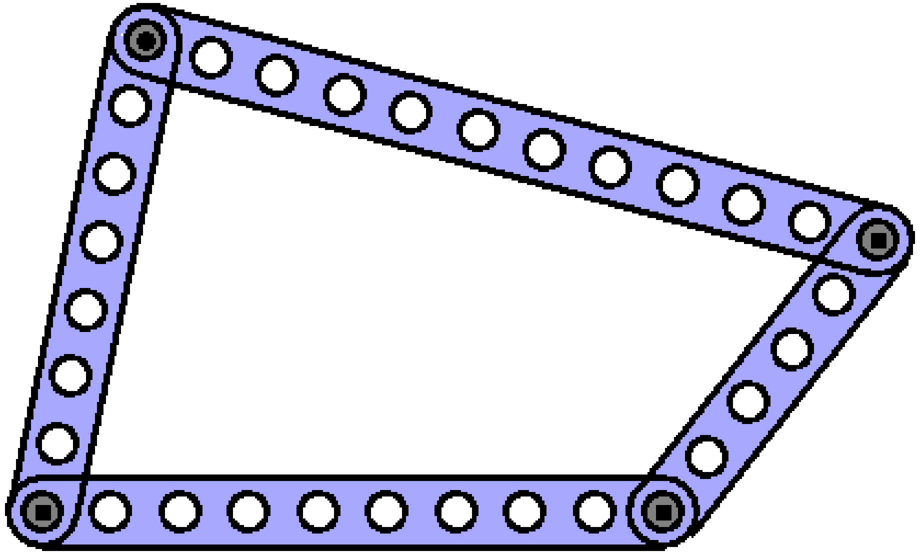
Krandreieck



Bewegungen einer Baggerschaufel

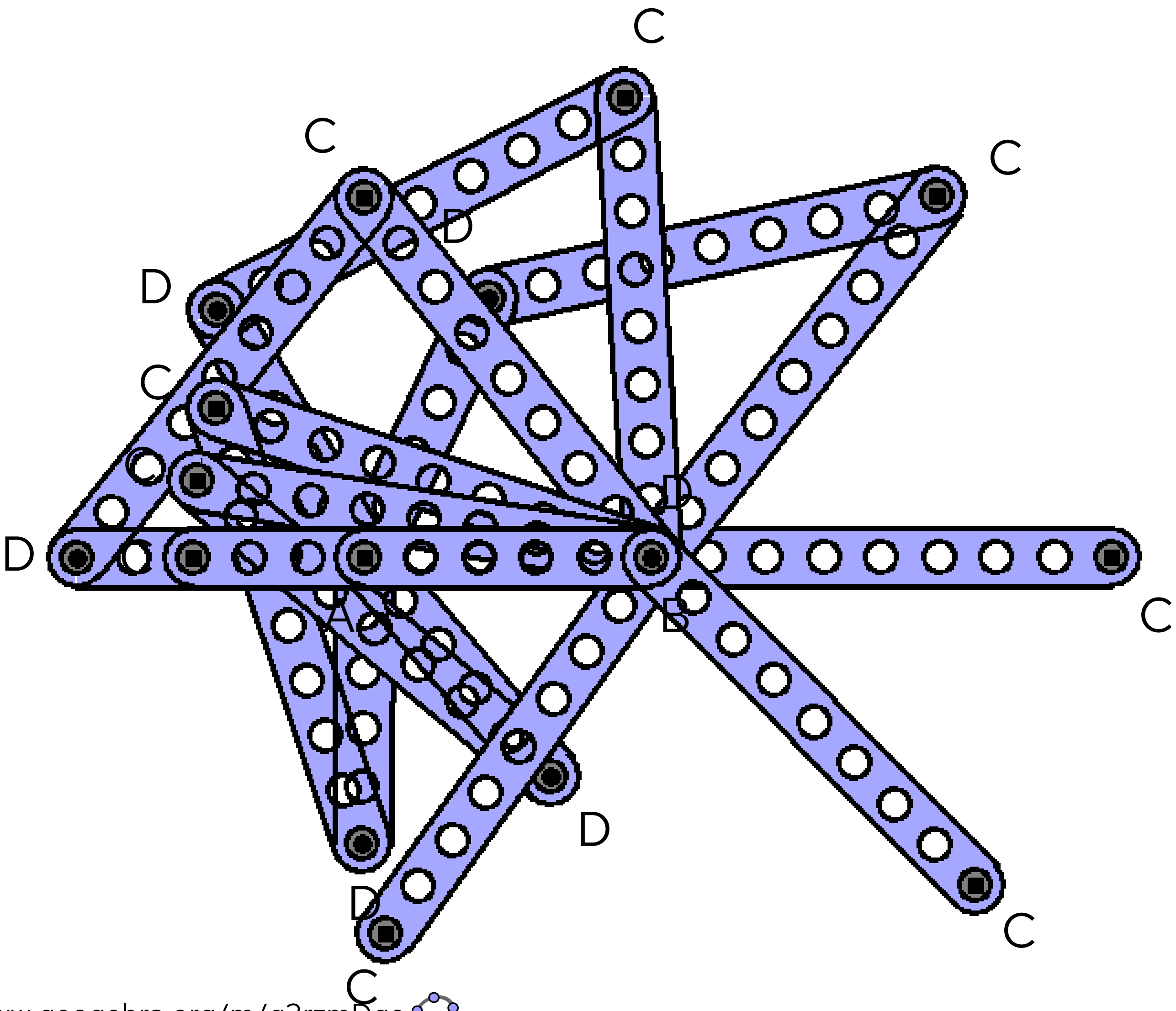
Bewegungen einer Baggerschaufel

Gelenkviereck

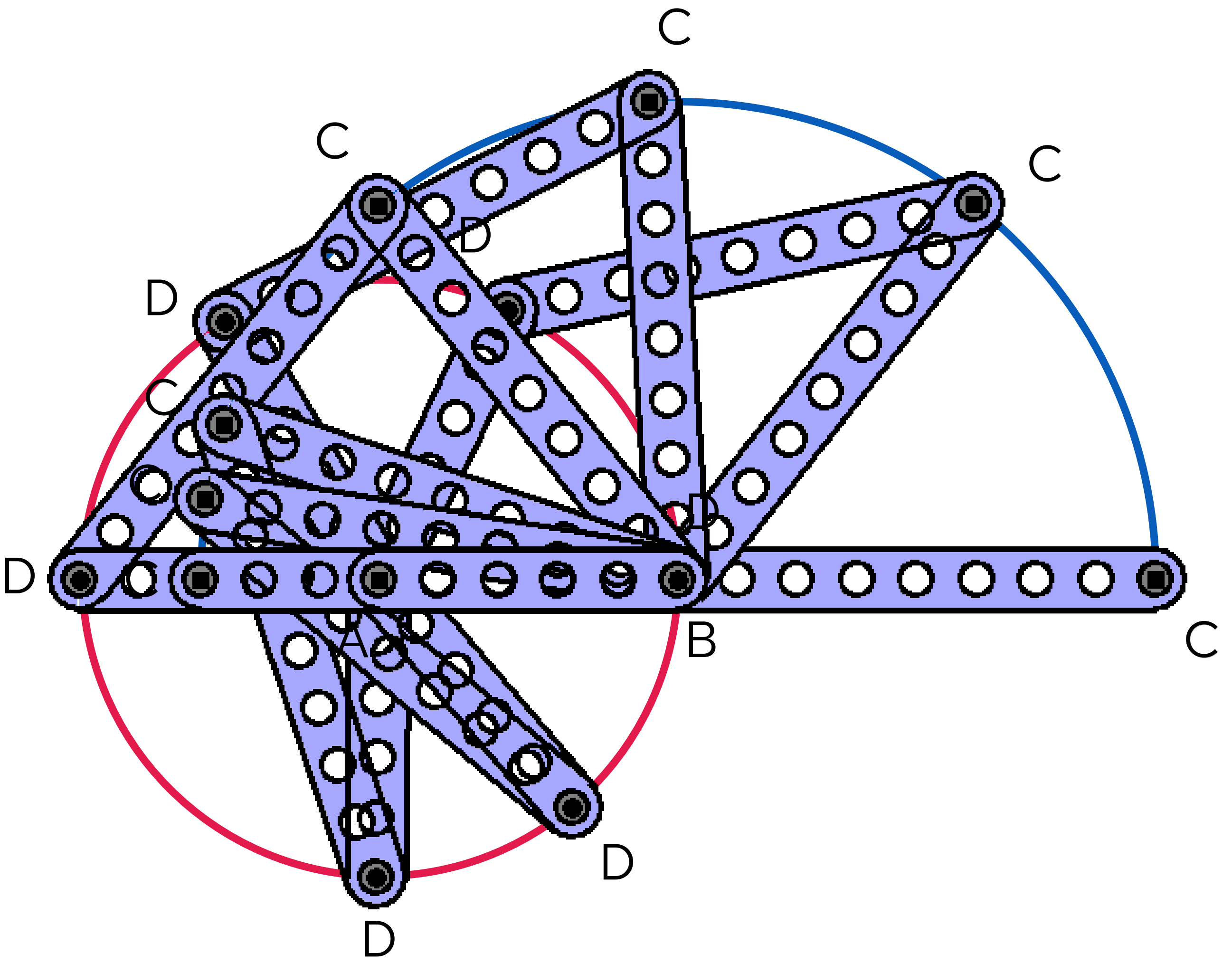


$a = 6$
$b = 9$
$c = 9$
$d = 6$

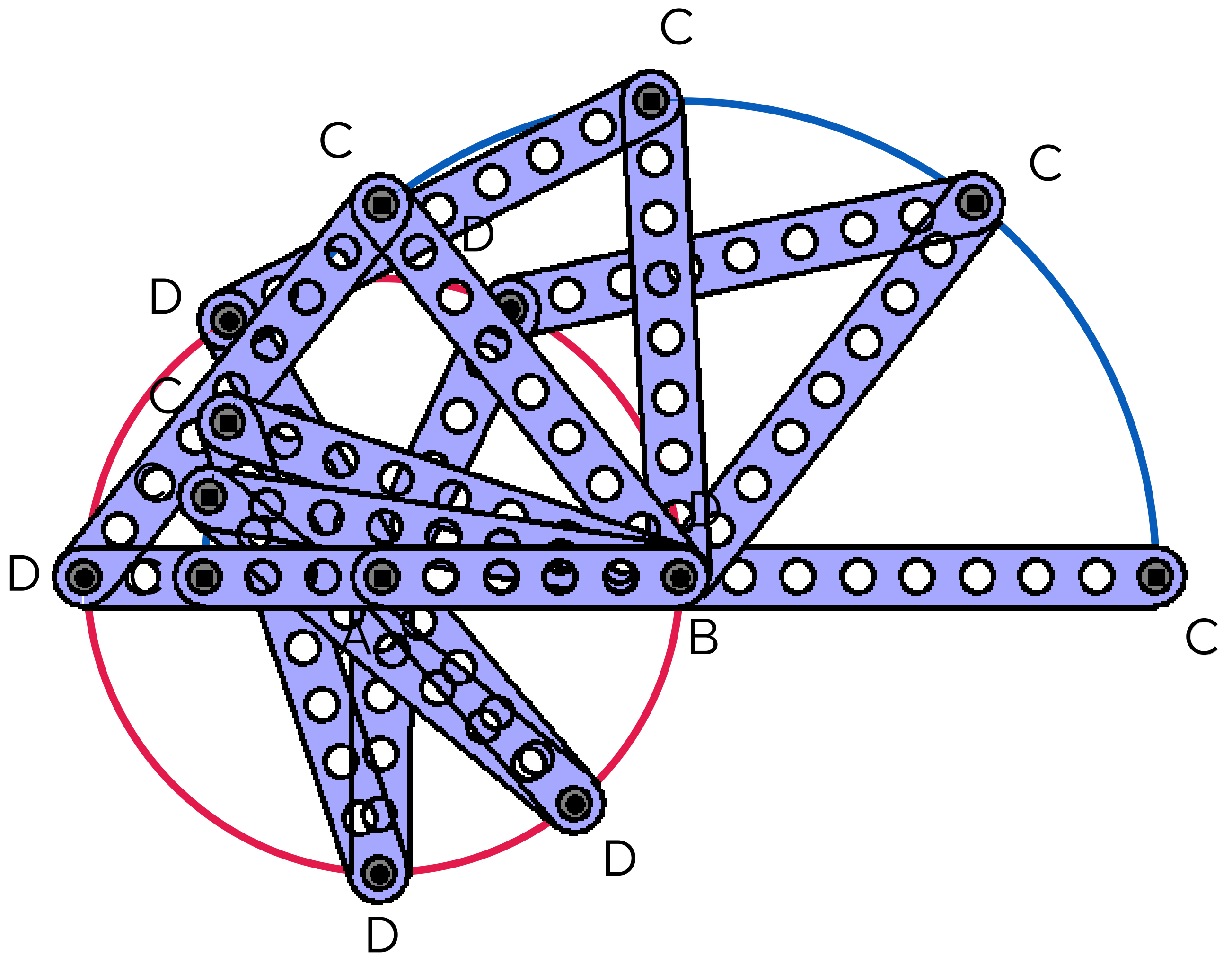
Gelenkviereck



Gelenkviereck



Gelenkviereck

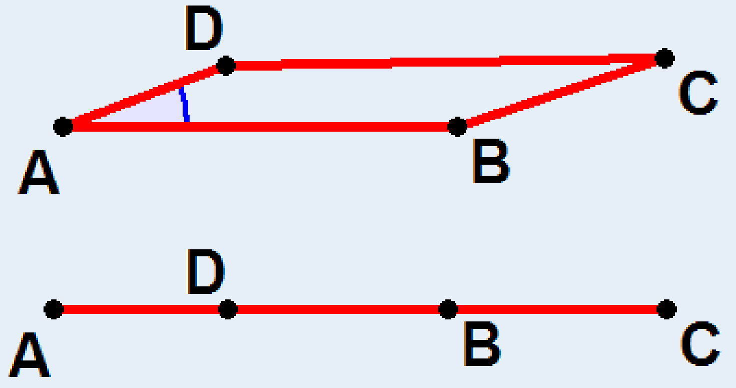


Gelenkviereck mit $0 \leq \alpha \leq 360°$

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

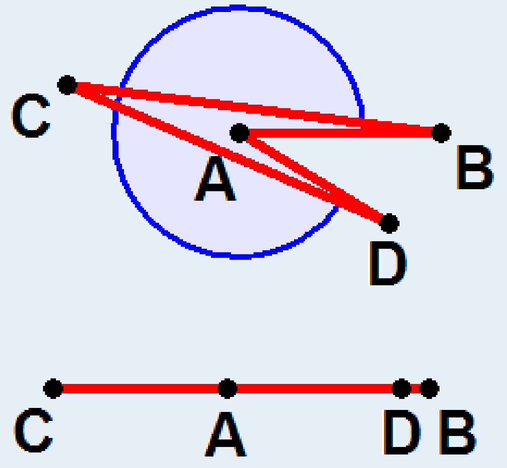
Bedingung für $\alpha = 0°$

- Alle Punkte des Vierecks $ABCD$ liegen auf AB.
- Daraus ergibt sich für die Streckenlängen:
  $|\boldsymbol{AB}| + |\boldsymbol{BC}| = |\boldsymbol{CD}| + |\boldsymbol{DA}|$ **(I)**



Bedingungen für $\alpha = 360°$

- A liegt zwischen C und D.
  $|\boldsymbol{CD}|=|\boldsymbol{CA}|+|\boldsymbol{AD}|$ **(II)**
- A liegt zwischen C und B.
  $|\boldsymbol{CB}|=|\boldsymbol{CA}|+|\boldsymbol{AB}|$ **(III)**



RPTU

Gelenkviereck mit $0 \leq \alpha \leq 360°$

Bedingung für $\alpha = 0°$

- Alle Punkte des Vierecks $ABCD$ liegen auf AB.
- Daraus ergibt sich für die Streckenlängen:
  $|\boldsymbol{AB}| + |\boldsymbol{BC}| = |\boldsymbol{CD}| + |\boldsymbol{DA}|$ (I)

Bedingungen für $\alpha = 360°$

- A liegt zwischen C und D.
  $|\boldsymbol{CD}|=|\boldsymbol{CA}|+|\boldsymbol{AD}|$ (II)
- A liegt zwischen C und B.
  $|\boldsymbol{CB}|=|\boldsymbol{CA}|+|\boldsymbol{AB}|$ (III)

(II) − (III):

$|CD| - |CB| = |AD| - |AB|$

$|\boldsymbol{CD}| + |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{AD}| + |\boldsymbol{CB}|$ (IV)

(IV) − (I):

$|CD| - |BC| = |CB| - |CD|$

$\Rightarrow 2 \cdot |CD| = 2 \cdot |BC|$

$\Rightarrow |\boldsymbol{CD}| = |\boldsymbol{BC}|$ $(*)$

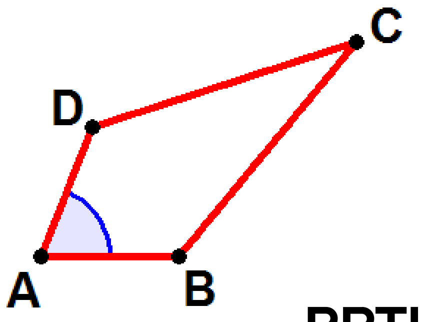
$(*)$ in (I) einsetzen:

$|AB| + |BC| = |BC| + |DA|$

$\Rightarrow |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{DA}|$ $(**)$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt:

$ABCD$ ist ein symmetrisches Drachenviereck.



Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de