

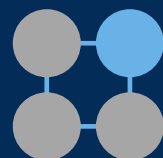


Didaktik der Stochastik

Modul 12a/b

Jürgen Roth

22.04.2025 juergen-roth.de



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

R

TU

P

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Stochastik

1. Ziele und Inhalte
2. Beschreibende Statistik
3. Wahrscheinlichkeitsrechnung
4. Beurteilende Statistik



4

Didaktik der Stochastik

Beurteilende Statistik

Grundkurs

(ca. 42 Stunden)

Stochastik 1

wahlweise

Stochastik 2 – B1:
Schätzen von
Wahrscheinlichkeiten

Stochastik 2 – B2:
Testen von
Hypothesen

Leistungskurs

(ca. 70 Stunden)

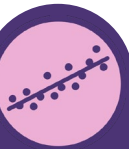
Stochastik

Aufbau der beurteilenden Statistik

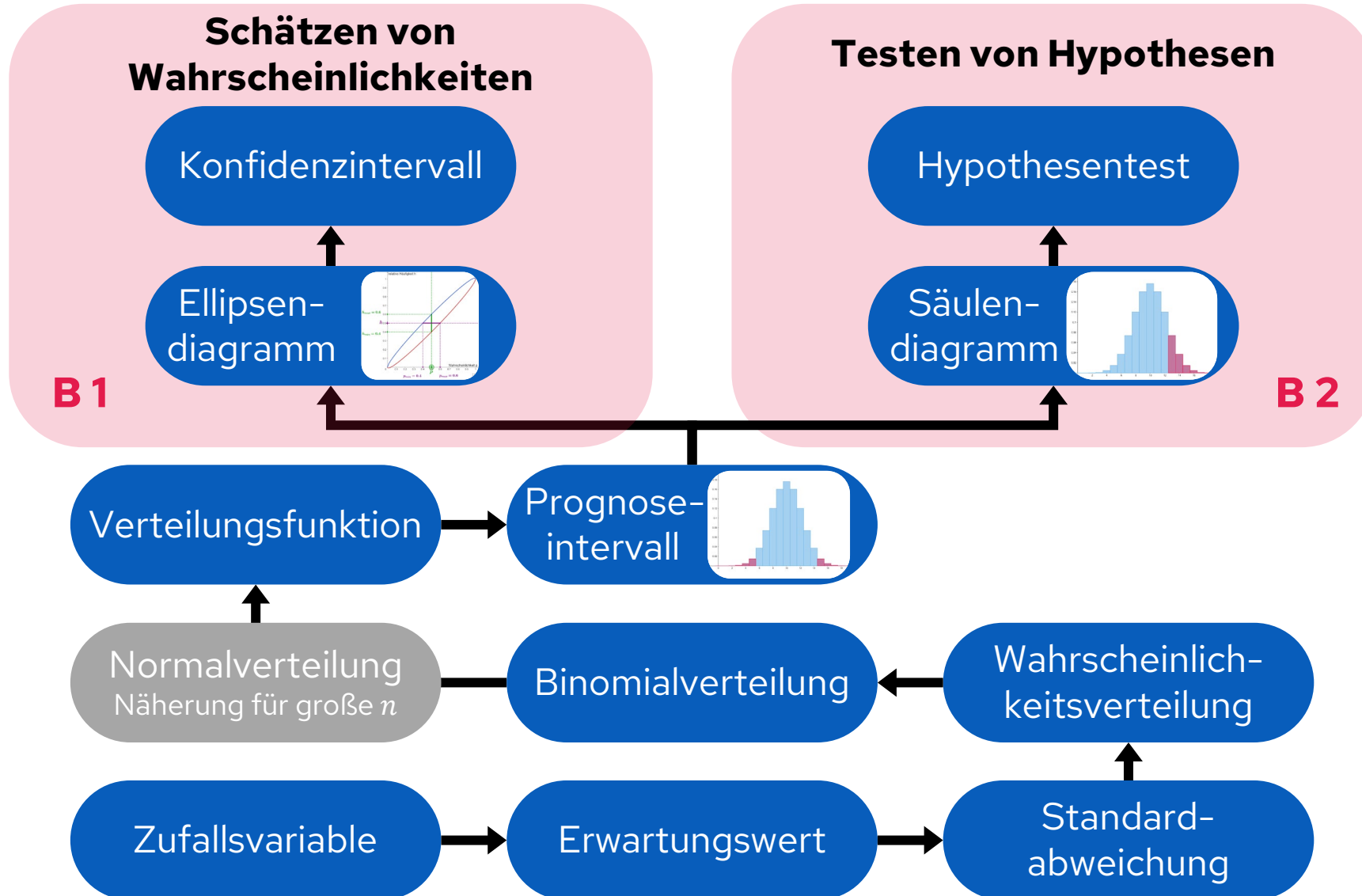
Grundkurs



Kernidee: Verteilungen



Kernidee: Repräsentativität und
Variabilität von Stichproben-Daten



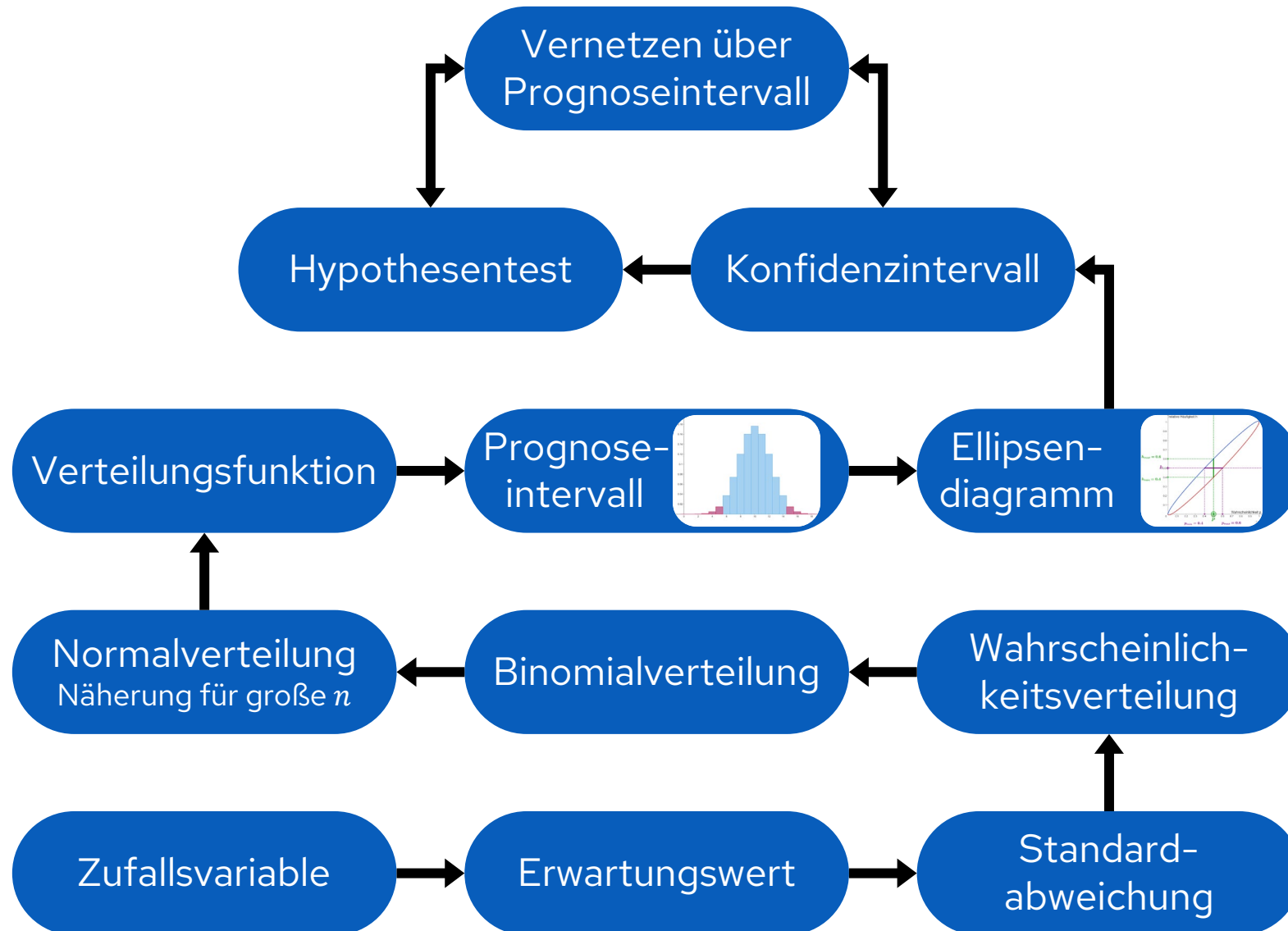
Kernidee: Denkfigur
Bed. Wahrscheinlichkeit



Kernidee: Hypothetisch-prog-
nostische Wahrscheinlichkeit

Aufbau der beurteilenden Statistik

Leistungskurs



Kernidee: Verteilungen

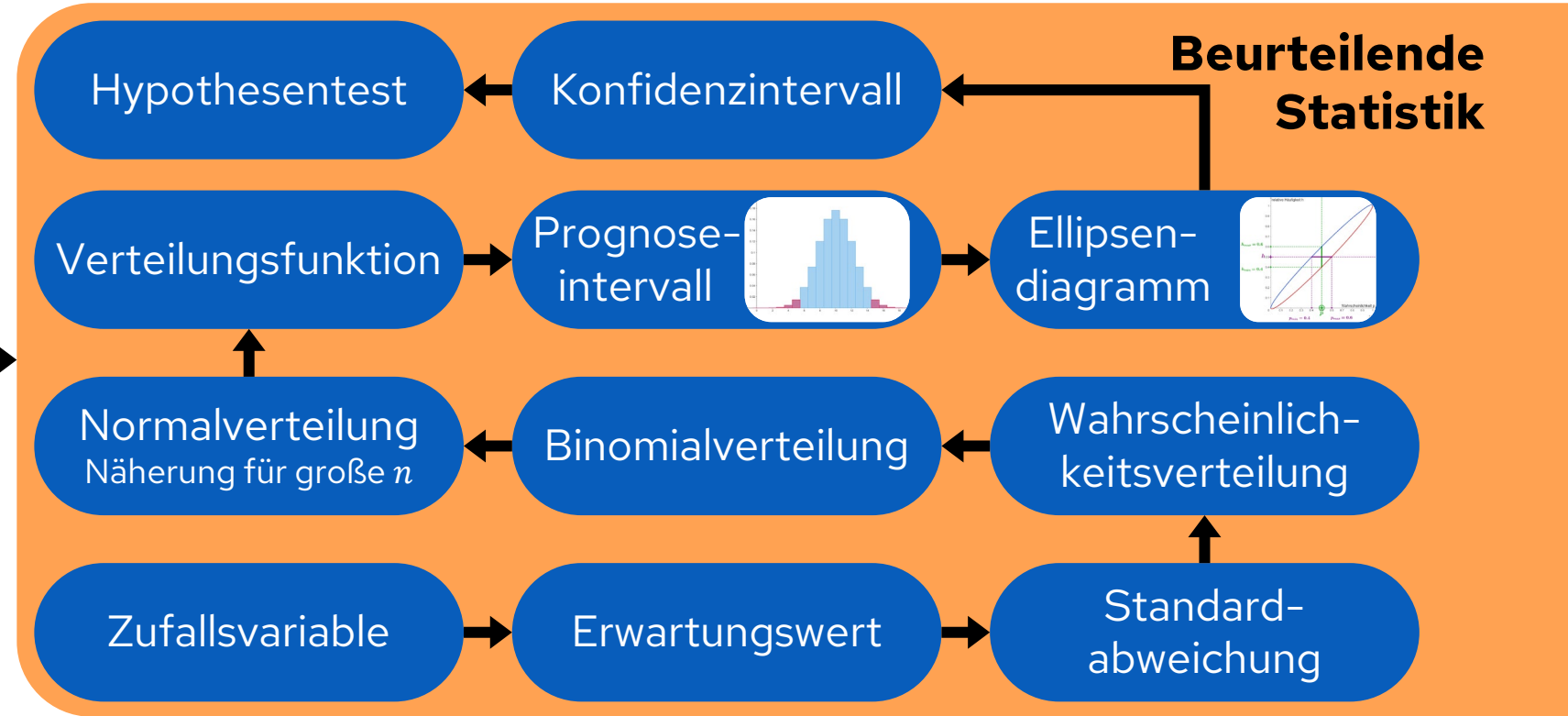
Kernidee: Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Kernidee: Denkfigur
Bed. Wahrscheinlichkeit

Kernidee: Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

Beschreibende Statistik

-  Erhebung – Daten sammeln
-  Graphische Darstellungsformen
-  Mittelwerte & Streuungsmaße



Wahrscheinlichkeitsrechnung

-  (Mehrstufige) Zufallsexperimente
- 
-  Stoch. (Un-)Abhängigkeit
-  Hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit
-  Bedingte Wahrscheinlichkeit

Kapitel 4:

Beurteilende Statistik

- 4.1 Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung ↪
- 4.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion ↪
- 4.3 Prognose- und Konfidenzintervall ↪
- 4.4 Hypothesentest ↪
- 4.5 Ausgewählte Unterrichtsvorschläge ↪



R

TU
P Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Kapitel 4: Beurteilende Statistik

- 4.1 Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung**
- 4.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion
- 4.3 Prognose- und Konfidenzintervall
- 4.4 Hypothesentest
- 4.5 Ausgewählte Unterrichtsvorschläge



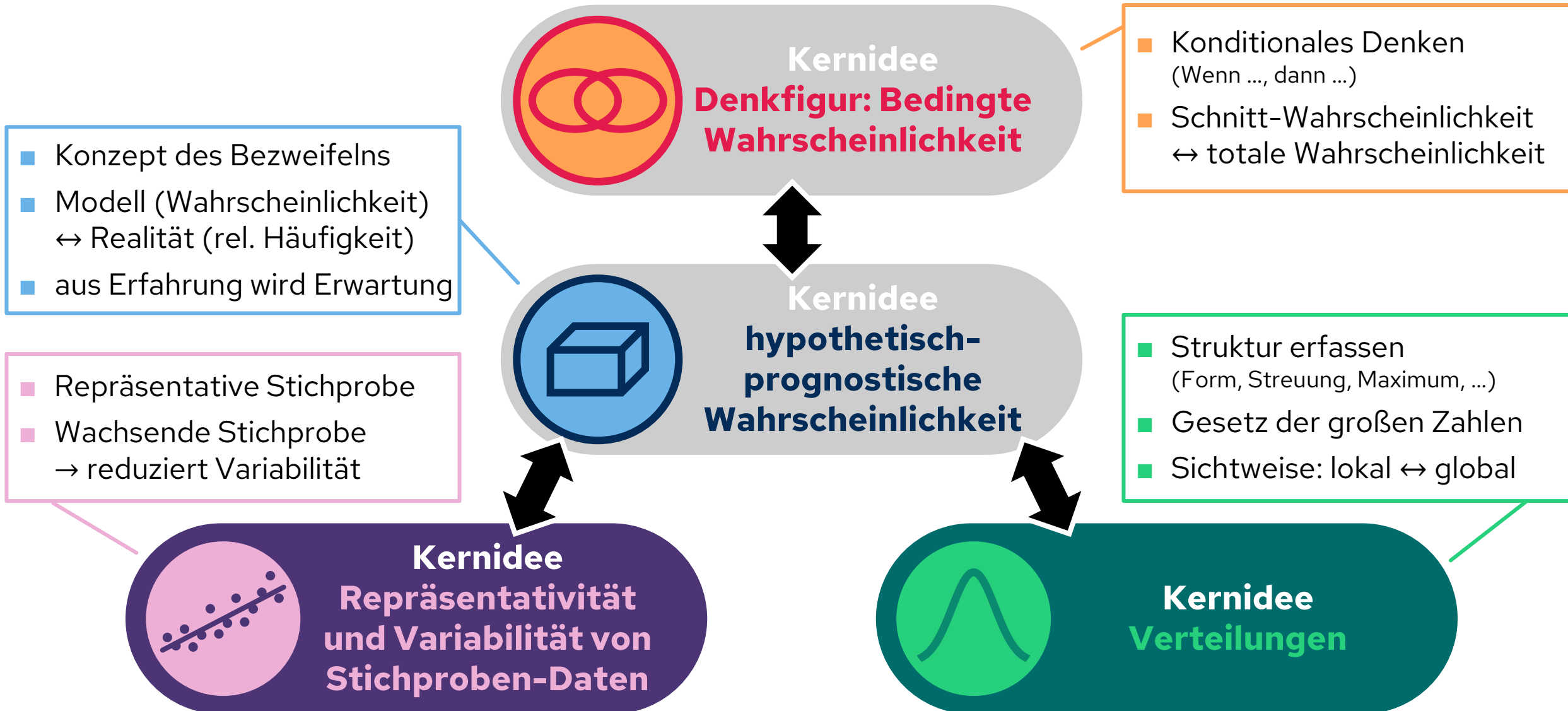
GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
<https://roth.tel/stochastik>

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-stochastik

RPTU

Kernideen im Fokus

bei Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung



Lehrplan RLP: Leistungskurs

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
6.	Die Begriffe „Zufallsgröße“ und „Wahrscheinlichkeitsverteilung“ kennen und an Beispielen erläutern (4.12g)	
7.	Die Begriffe „Erwartungswert“, „Varianz“ und „Standardabweichung“ einer diskreten Zufallsgröße kennen und anwenden (2.06g, 2.07g, 5.01g, 5.04g)	Bei der Anwendung in Sachaufgaben kommt es vor allem darauf an, dass die SuS verstehen, welche Folgerungen man aus den Kennwerten für das Sachproblem ziehen kann. Hier bietet es sich an, exemplarisch eine statistische Erhebung zu planen und zu beurteilen.

Lehrplan RLP: Grundkurs – Stochastik 1

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
8.	Erwartungswert und Standardabweichung für Binomialverteilungen berechnen und anwenden (2.06g, 2.07g, 5.01g, 5.04g)	Die Formeln sollen anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden. Bei der Anwendung in Sachaufgaben kommt es vor allem darauf an, dass die Schülerinnen und Schüler verstehen, welche Folgerungen man aus den Kennwerten für das Sachproblem ziehen kann. Hier bietet es sich an, exemplarisch eine statistische Erhebung zu planen und zu beurteilen.

Definition Zufallsvariable

Eine Funktion X , die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt **Zufallsvariable** (auch **Zufallsgröße**).

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Bemerkungen

- Eine Zufallsvariable X ordnet einem Ergebnis ω jeweils eine reelle Zahlen x zu ($X(\omega) = x$), wobei verschiedenen Ergebnissen durchaus dieselbe Zahl zugeordnet werden kann.
- Ein Ereignis E , d.h. eine Teilmenge des Ergebnisraums Ω ($E \subseteq \Omega$), die alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$ enthält, denen ein bestimmter Wert x der Zufallsvariable X zugeordnet wird, bezeichnet man mit:
 $E = \{X = x\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel

Eine Ergebnismenge Ω ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Anzahl der Teiler der geworfenen Augenzahl zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x := \text{Anzahl der Teiler von } \omega$$

Ereignisse

- Augenzahl hat einen Teiler ($1 = 1 \cdot 1$):
 $E_1 = \{X = 1\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\} = \{1\}$
- Augenzahl hat zwei Teiler ($2 = 1 \cdot 2$; $3 = 1 \cdot 3$; $5 = 1 \cdot 5$):
 $E_2 = \{X = 2\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{2; 3; 5\}$
- Die Augenzahl hat drei Teiler ($4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$):
 $E_3 = \{X = 3\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 3\} = \{4\}$
- Die Augenzahl hat vier Teiler ($6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$):
 $E_4 = \{X = 4\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 4\} = \{6\}$

Weitere sinnvolle Notationen:

- $\{X > 1\} = \{X = 2\} \cup \{X = 3\} \cup \{X = 4\}$
- $\{1 < X < 4\} = \{X = 2\} \cup \{X = 3\}$

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel

Beispiel:

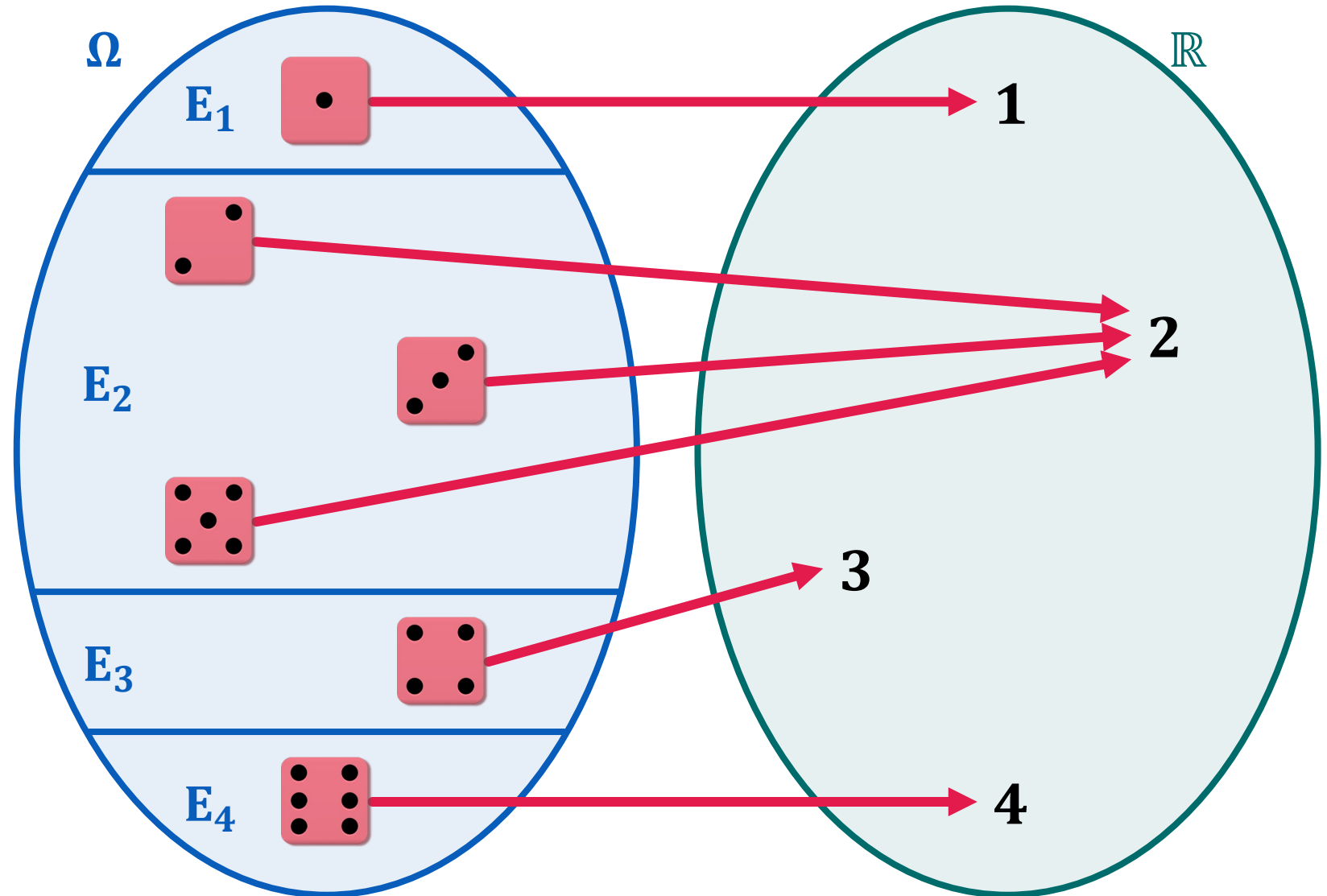
Würfeln mit einem Würfel

Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Anzahl x der Teiler der geworfenen Augenzahl zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Bemerkung

Obige Zufallsvariable X ist nur eine von sehr vielen möglichen Zufallsvariablen zum Zufallsexperiment Würfeln mit einem Würfel. Man könnte z.B. auch die Zufallsvariable Y definieren, die der Augenzahl 6 den Wert 4 € und allen anderen Augenzahlen den Wert -1 € (als Gewinnausschüttung) zuordnet.



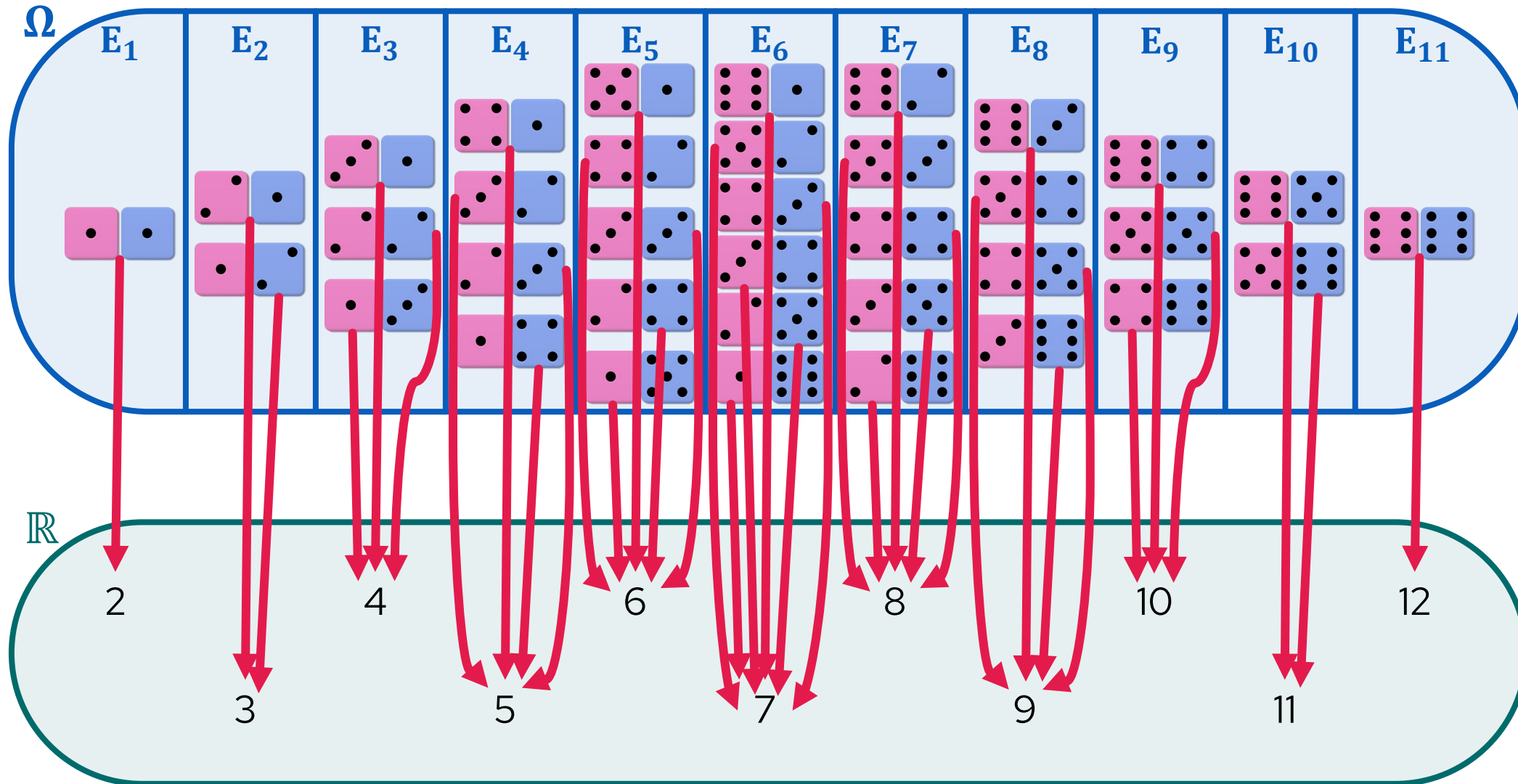
Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

Beispiel:

Würfeln mit
zwei Würfeln

Die Zufalls-
variable X
ordnet jedem
Ergebnis ω
die Augensumme x der
geworfenen
Augenzahl zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \\ \omega \mapsto x$$



Beispiel: $E_3 := \{\omega \in \Omega | X(\omega) = 4\} = \{(1; 3); (2; 2); (3; 1)\}$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Augensumme x der geworfenen Augenzahl zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Die Zufallsvariable Y ordnet jedem Ergebnis ω die Augenzahl y des ersten Würfels zu:

$$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto y$$

Die Zufallsvariable Z ordnet jedem Ergebnis ω die Augenzahl z des zweiten Würfels zu:

$$Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto z$$

Bemerkungen

- Zu einem Zufallsexperiment können sehr verschiedene Zufallsvariablen definiert werden. Links stehen drei Beispiele zum Zufallsexperiment „Würfeln mit zwei Würfeln“.
- Mit Zufallsvariablen kann gerechnet werden. So gilt z.B. für die Zufallsvariablen X , Y und Z und alle $\omega \in \Omega$ im Beispiel links:
$$X(\omega) = (Y + Z)(\omega) := Y(\omega) + Z(\omega)$$

Präsenzaufgabe: Welche Wertebereiche besitzen folgende Zufallsvariablen im obigen Beispiel des zweifachen Würfelwurfs?

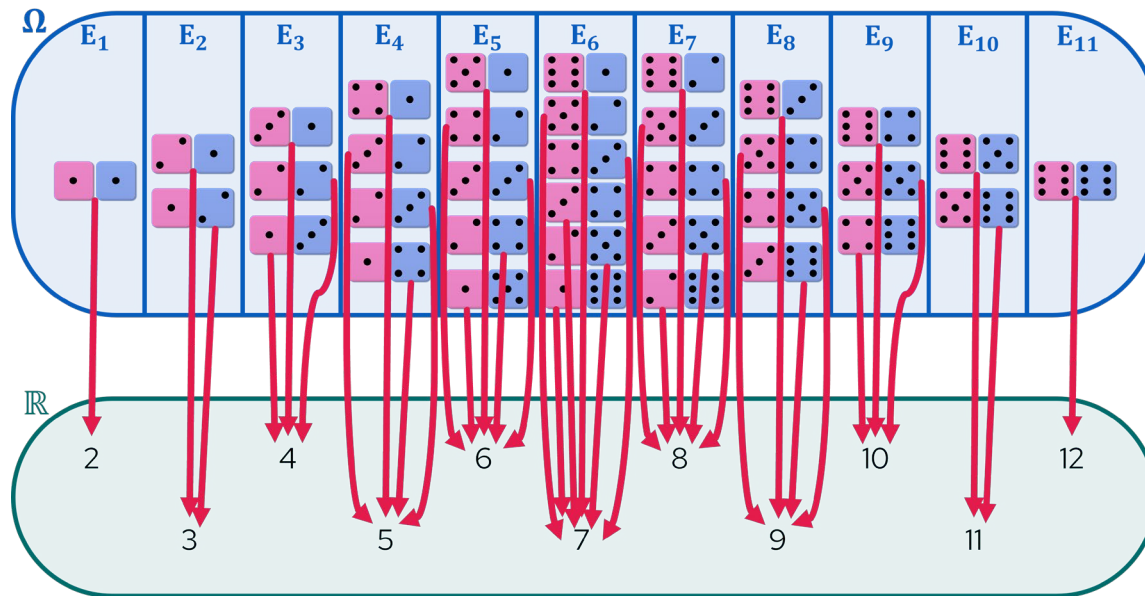
a) $Y - Z$ b) $Y \cdot Z$ c) $Y - 2Z$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln

Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Augensumme x der geworfenen Augenzahl zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$



x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Aufgabe: Welche mittlere Augensumme $\mu = E(X)$ ist beim Würfeln mit zwei Würfeln zu erwarten?

Idee: Die Augensummen treten mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten auf, sie sollten also gewichtet mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit in den im Mittel erwarteten Wert (**Erwartungswert**) eingehen.

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} \\ &\quad + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} \\ &\quad + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7\end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen arithmetischem Mittel und Erwartungswert

Zufallsexperiment: Es wird 20-mal mit einem Spielwürfel gewürfelt. Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die geworfene Augenzahl x zu: $X: \Omega \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}, \omega \mapsto x$

Ergebnis einer Versuchsreihe von $n = 20$ Würfelwürfen: 6, 3, 3, 3, 5, 4, 3, 1, 6, 2, 3, 3, 3, 6, 5, 4, 6, 1, 5, 5

Realität: Arithmetisches Mittel

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{6+3+3+3+5+4+3+1+6+2+3+3+3+6+5+4+6+1+5+5}{20} \\ &= \frac{(1+1)+(2)+(3+3+3+3+3+3+3)+(4+4)+(5+5+5+5)+(6+6+6+6)}{20} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 4}{20}\end{aligned}$$

Mit $H_n(x)$ = „Absolute Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1 \cdot H_n(1) + 2 \cdot H_n(2) + 3 \cdot H_n(3) + 4 \cdot H_n(4) + 5 \cdot H_n(5) + 6 \cdot H_n(6)}{n} \\ &= 1 \cdot \frac{H_n(1)}{n} + 2 \cdot \frac{H_n(2)}{n} + 3 \cdot \frac{H_n(3)}{n} + 4 \cdot \frac{H_n(4)}{n} + 5 \cdot \frac{H_n(5)}{n} + 6 \cdot \frac{H_n(6)}{n}\end{aligned}$$

Mit $h_n(x) = \frac{H_n(x)}{n}$ = „Relative Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ folgt:

$$\bar{x} = x_1 \cdot h_n(x_1) + \dots + x_k \cdot h_n(x_k)$$

Modell: Erwartungswert

$$\mu = E(X) := x_1 \cdot P(X = x_1) + \dots + x_k \cdot P(X = x_k)$$

Definition Erwartungswert

Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Wertemenge $\{x_1, \dots, x_k\}$ heißt

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \dots + x_k \cdot P(X = x_k)$$

der **Erwartungswert** von X .

Ausgedrückt mit dem Summenzeichen:

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i \cdot P(X = x_i)$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Erwartungswerte für alle in diesem Abschnitt angegebenen Zufallsvariablen.

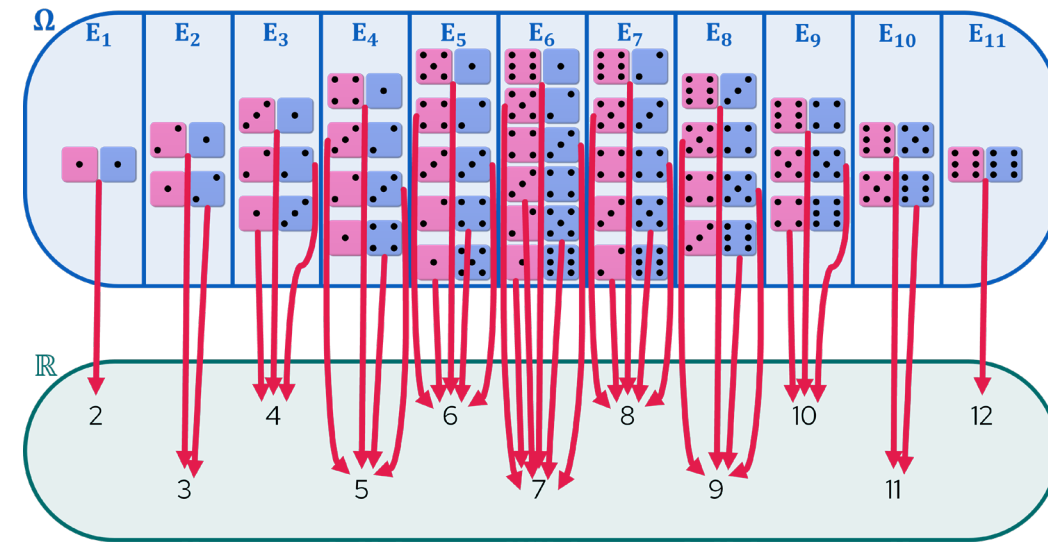
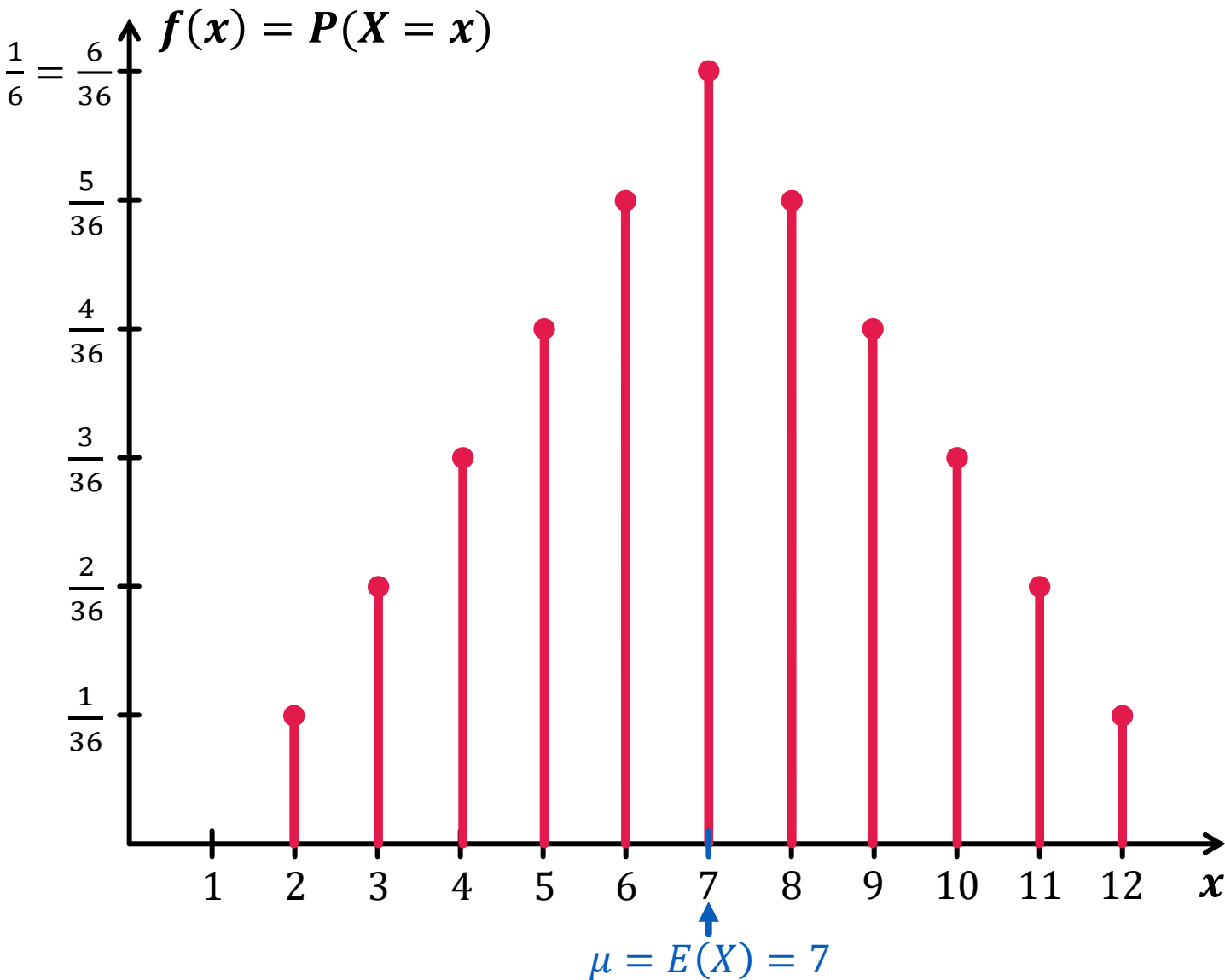
Bemerkungen

Sind $\{\omega_j\}$ die Elementarereignisse bzgl. Ω , also die einelementigen Teilmengen von Ω , dann gilt mit $|\Omega| = m$ und $k \leq m$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m X(\{\omega_j\}) \cdot P(\{\omega_j\})$$

- Statt $E(X)$ schreibt man auch $\mu(X)$ bzw. nur μ , wenn man nur eine einzige Zufallsvariable betrachtet.
- Bei mehreren Zufallsvariablen X_i ist die Bezeichnung $E(X_i) = \mu_i$ für die Erwartungswerte üblich.
- Interpretiert man die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Masseverteilung mit den $P(X = x_i)$ als punktförmigen Massen mit der Gesamtmasse 1, dann lässt sich $\mu = E(X)$ als die Stelle deuten, an der man unterstützen muss, damit die „Waage“ im Gleichgewicht bleibt.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

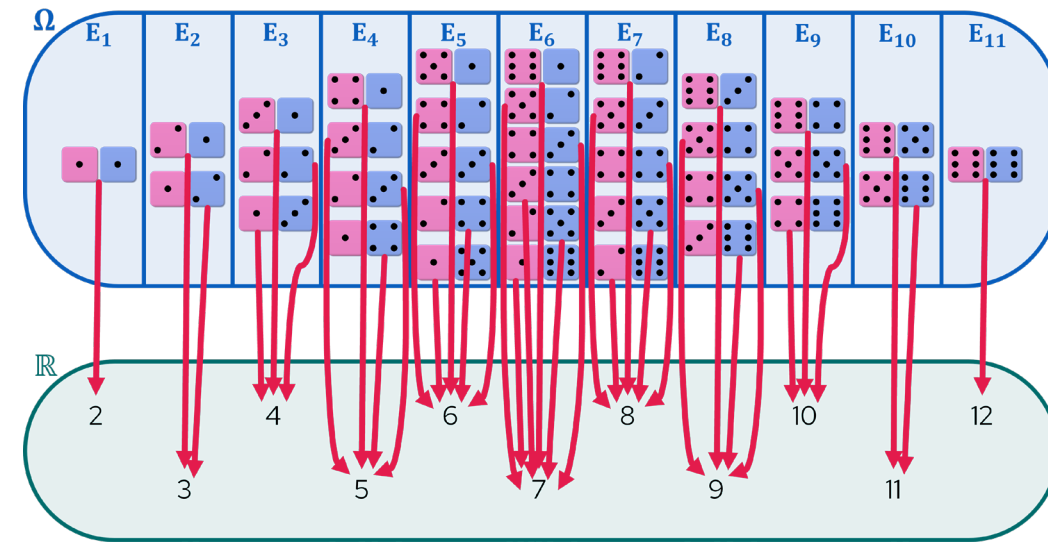
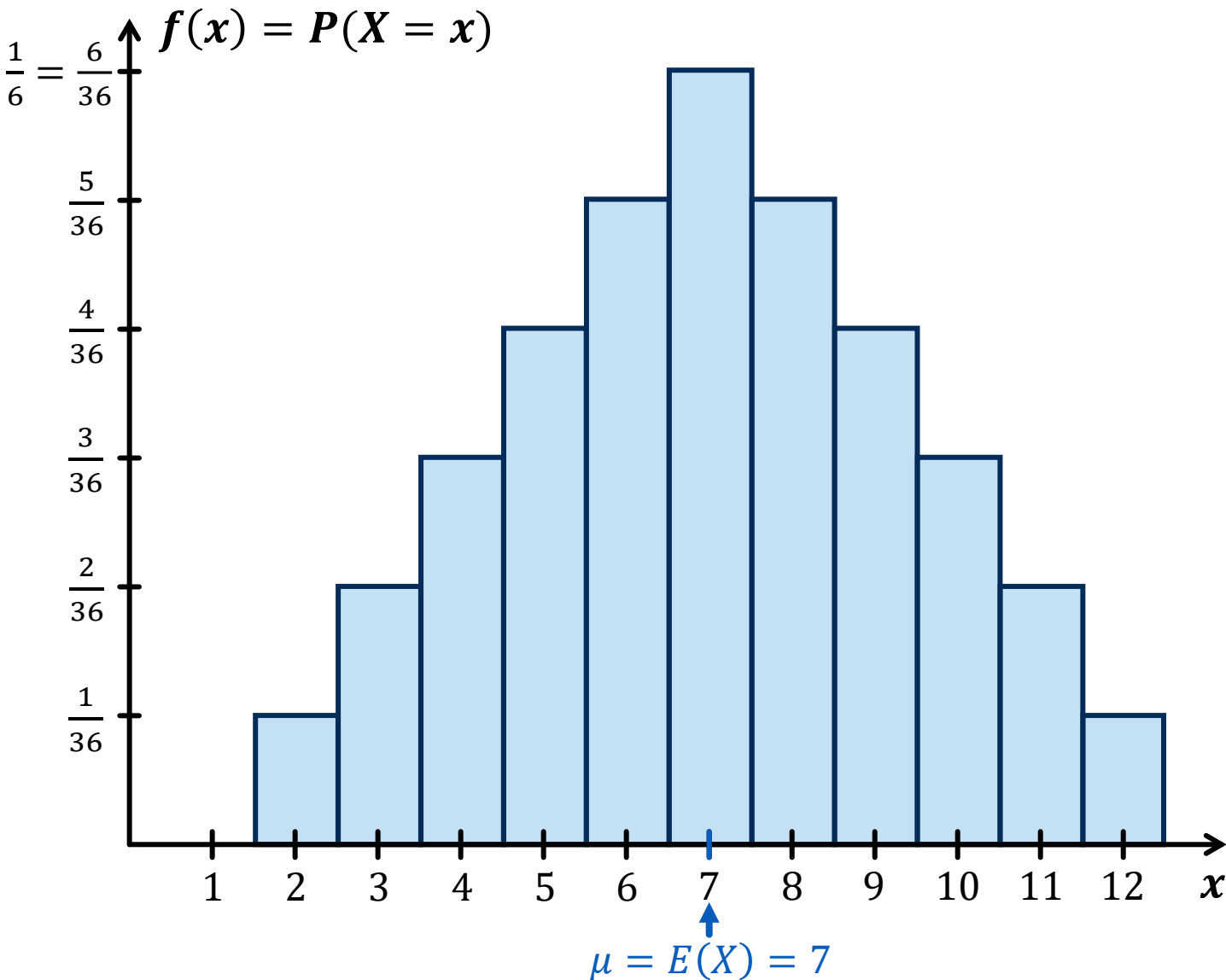


x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Augensumme x der geworfenen Augenzahl zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

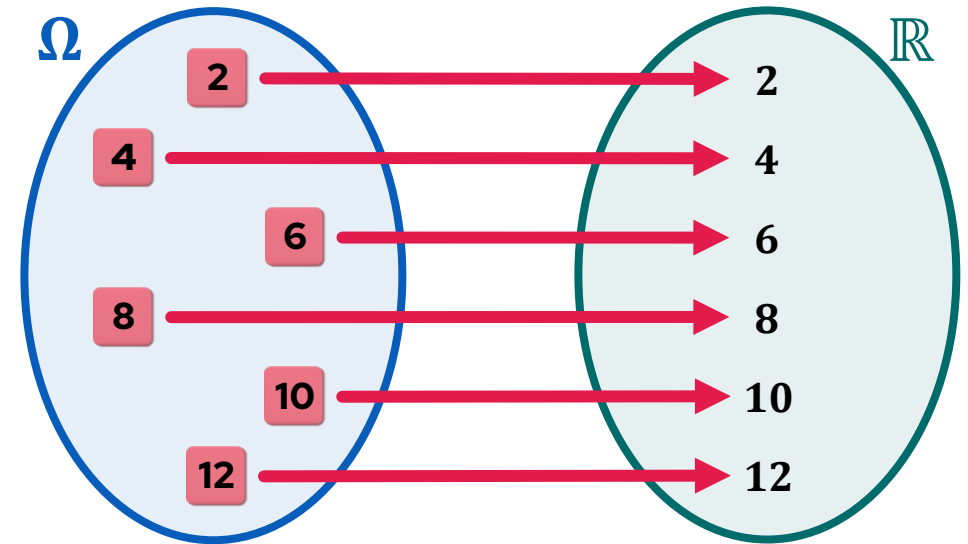
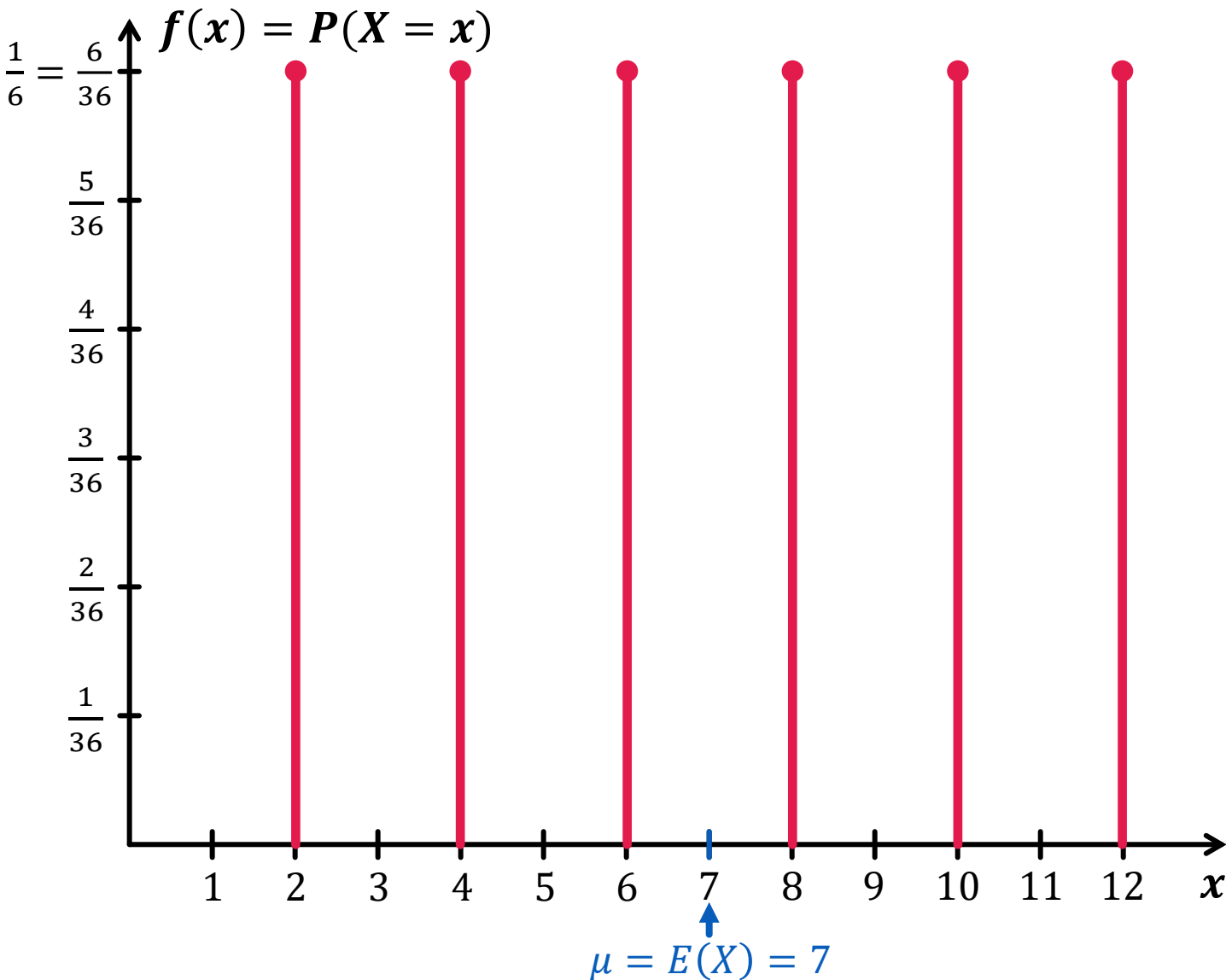


x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die Augensumme x der geworfenen Augenzahl zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung



x	2	4	6	8	10	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Beispiel: Würfeln mit einem Würfel mit den Augenzahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12
Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die geworfene Augenzahl x zu:
 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$

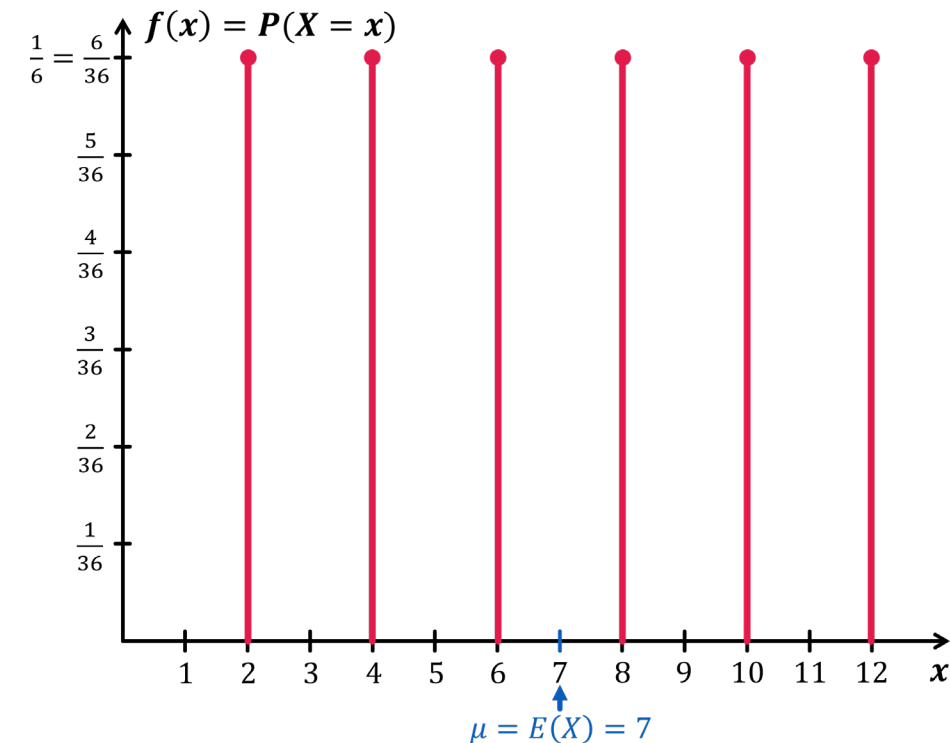
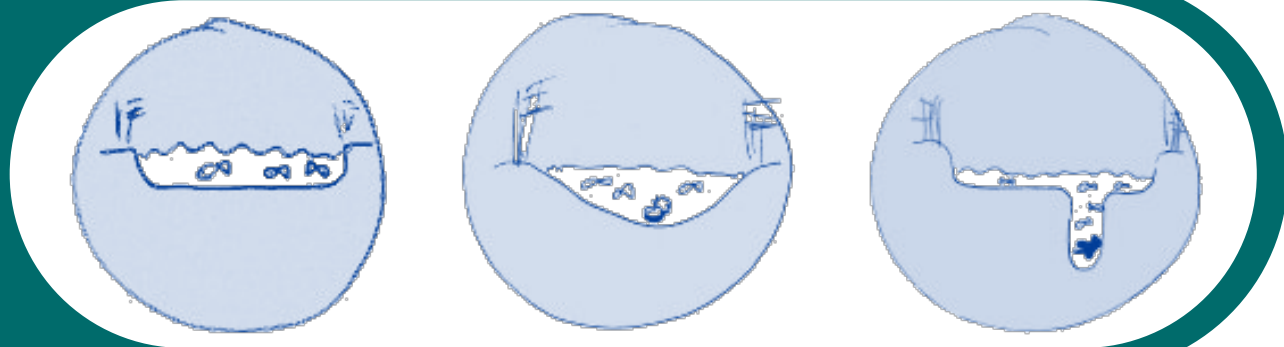
Warum Streuungsmaße?

Durchschnitte (Erwartungswerte)
allein machen nicht glücklich!

Krämer, W. (20068). So lügt man mit Statistik. Piper

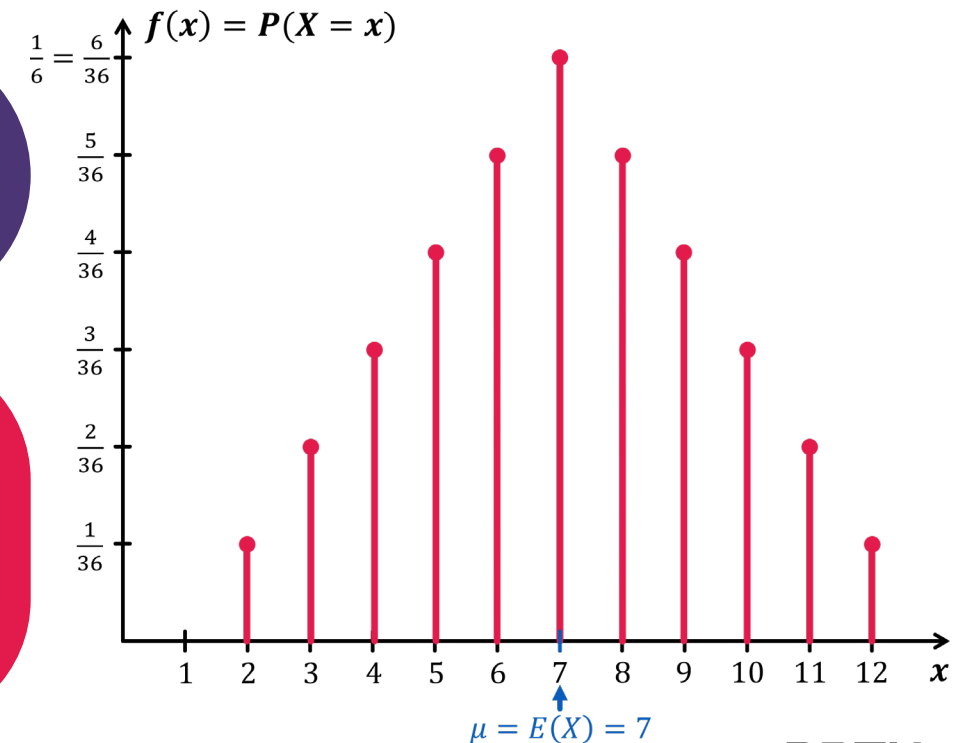
Beispiel: Flussquerschnitte
gleicher mittlerer Tiefe

madin



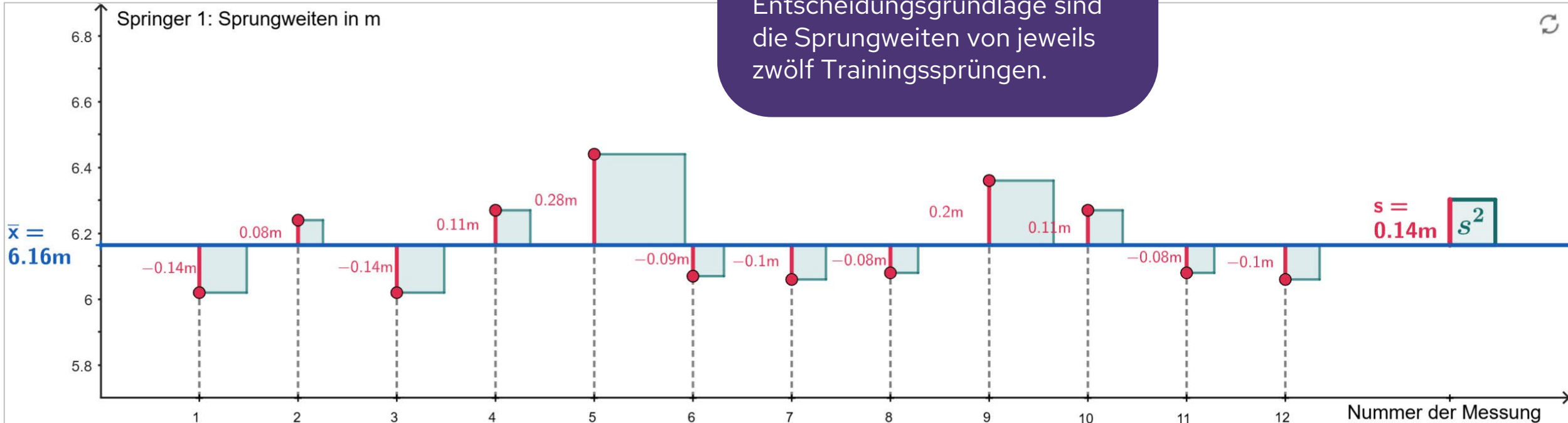
Wahrscheinlichkeits-
verteilungen
mit demselben
Erwartungswert $E(X)$.

Gesucht:
Mittlere Abweichung
der Ausprägungen der
Zufallsvariable vom
Erwartungswert als Maß
für die Streuung.



Warum Streuungsmaße?

Ein **Weitsprung-Trainer** muss entscheiden, welchen der von ihm betreuten drei Springer er zum Wettkampf schicken soll. Entscheidungsgrundlage sind die Sprungweiten von jeweils zwölf Trainingsprüngen.



Springer 1

- ✓ $\bar{x}$
- ✓ $x - \bar{x}$
- ✓ $(x - \bar{x})^2$

Springer 2

- ✓ mittlere absolute Abweichung vom Mittelwert

Springer 3

$$\frac{1}{12} \cdot ((x_1 - \bar{x}) + \dots + (x_{12} - \bar{x})) = 0\text{m}$$

- ✓ mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert (empirische Varianz s^2)

$$s^2 = \frac{1}{12} \cdot ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{x})^2) = 0.02\text{m}^2$$

- ✓ empirische Standardabweichung s

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{x})^2)} = 0.14\text{m}$$

Zusammenhang: Empirische Standardabweichung s und Standardabweichung σ

Zufallsexperiment: Es wird 20-mal mit einem Spielwürfel gewürfelt. Die Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω die geworfene Augenzahl x zu: $X: \Omega \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \omega \mapsto x$

Ergebnis einer Versuchsreihe von $n = 20$ Würfelwürfen: 6, 3, 3, 3, 5, 4, 3, 1, 6, 2, 3, 3, 3, 6, 5, 4, 6, 1, 5, 5

Realität: Arithm. Mittel $\bar{x}$ der quadratischen Abweichungen vom arithm. Mittel $\bar{x} = 3,5$

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1 - 3,5)^2 \cdot 2 + (2 - 3,5)^2 \cdot 1 + (3 - 3,5)^2 \cdot 7 + (4 - 3,5)^2 \cdot 2 + (5 - 3,5)^2 \cdot 4 + (6 - 3,5)^2 \cdot 4}{20}$$

Mit $H_n(x)$ = „Absolute Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ ergibt sich:

$$s^2 = \frac{(1 - \bar{x})^2 \cdot H_n(1) + (2 - \bar{x})^2 \cdot H_n(2) + (3 - \bar{x})^2 \cdot H_n(3) + (4 - \bar{x})^2 \cdot H_n(4) + (5 - \bar{x})^2 \cdot H_n(5) + (6 - \bar{x})^2 \cdot H_n(6)}{n}$$
$$= (1 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(1)}{n} + (2 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(2)}{n} + (3 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(3)}{n} + (4 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(4)}{n} + (5 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(5)}{n} + (6 - \bar{x})^2 \cdot \frac{H_n(6)}{n}$$

Mit $h_n(x) = \frac{H_n(x)}{n}$ = „Relative Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl x bei n Würfelwürfen“ folgt:

$$s^2 = (x_1 - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_1) + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_k) \Rightarrow s = \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_1) + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot h_n(x_k)}$$

Modell: Varianz σ^2 : $\sigma^2 := (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k)$

Standardabweichung σ :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} := \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k)}$$

Streuungsmaße

Varianz und Standardabweichung

Bemerkung: Würden zur Messung der mittleren Abweichung vom Erwartungswert nur die Differenzen $x_i - \mu$ gebildet, dann würden sich Abweichungen nach unten und oben über die unterschiedlichen Vorzeichen gegenseitig aufheben.

Durch das Quadrieren der Terme $(x_i - \mu)^2$ entfällt dieser Effekt.

Bemerkung: Die Maßeinheit der Varianz $\text{Var}(X)$ ist das Quadrat der Einheit, in der die Zufallsvariable X gemessen wird. Zur leichteren Interpretierbarkeit wurde deshalb mit der Standardabweichung $\sigma(X)$ eine Maßzahl konstruiert, die dieselbe Einheit wie X hat.

Für die Varianz schreibt man auch σ^2 .

Definition Varianz

Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Wertemenge $\{x_1, \dots, x_k\}$ und dem Erwartungswert $E(X) = \mu$ heißt

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2)$$

$$= (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k)$$

die **Varianz** von X .

Definition Standardabweichung

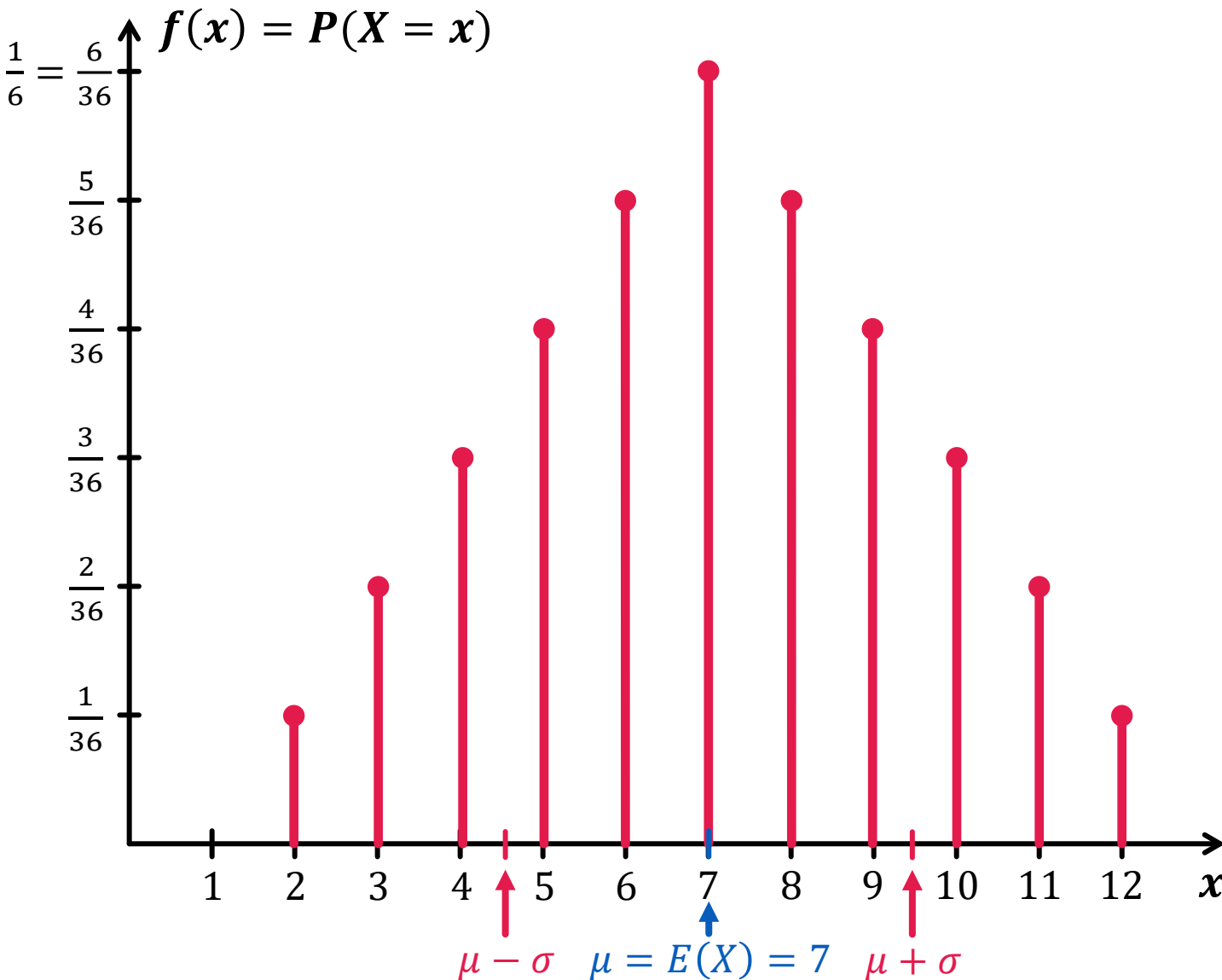
Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Wertemenge $\{x_1, \dots, x_k\}$ und dem Erwartungswert $E(X) = \mu$ heißt

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

$$= \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k)}$$

die **Standardabweichung** von X .

Streuungsmaß: Standardabweichung



x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Varianz σ^2

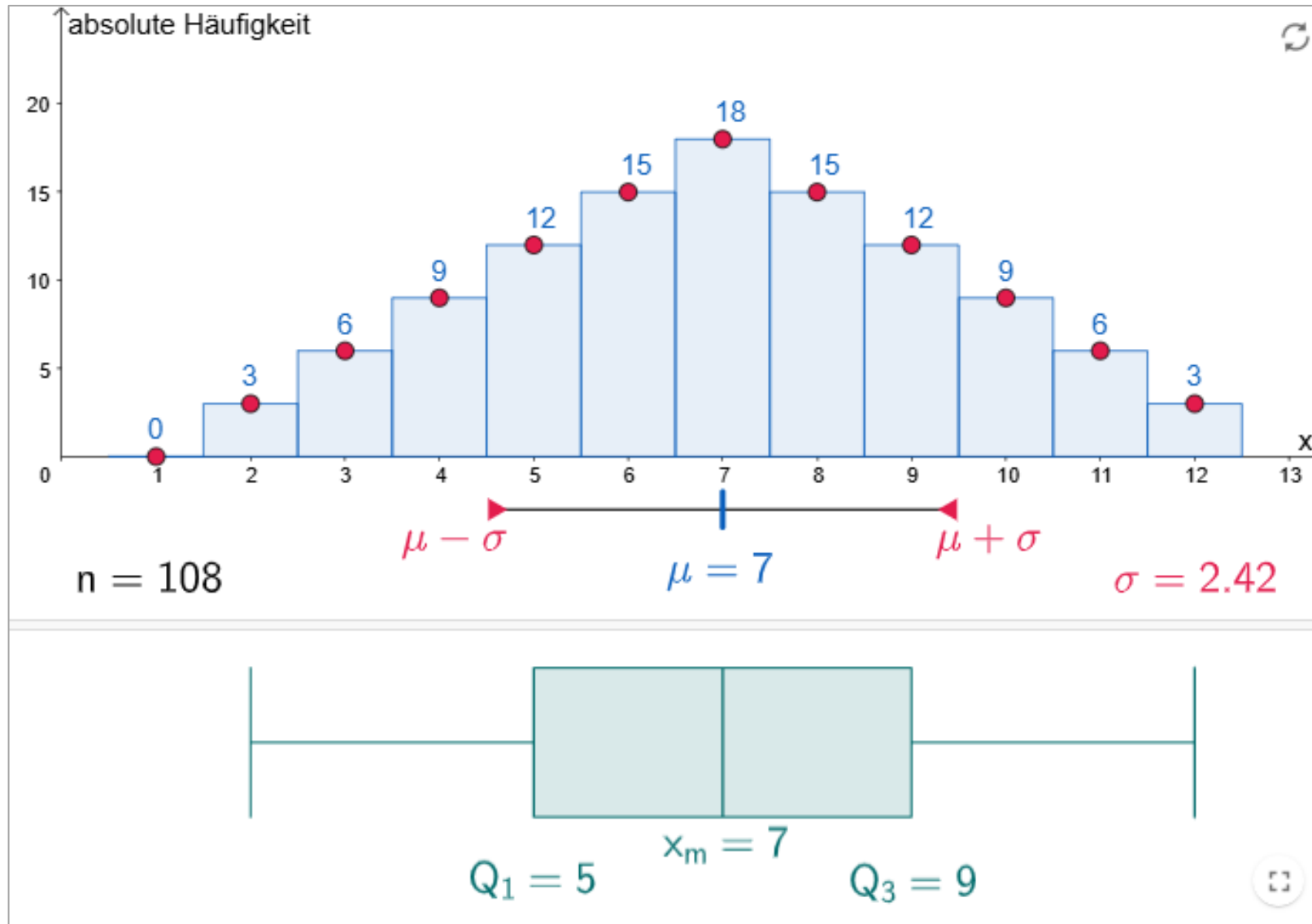
$$\sigma^2 = \text{Var}(X)$$

$$\begin{aligned} &= (2 - 7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3 - 7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (4 - 7)^2 \cdot \frac{3}{36} \\ &\quad + (5 - 7)^2 \cdot \frac{4}{36} + (6 - 7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (7 - 7)^2 \cdot \frac{6}{36} \\ &\quad + (8 - 7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (9 - 7)^2 \cdot \frac{4}{36} + (10 - 7)^2 \cdot \frac{3}{36} \\ &\quad + (11 - 7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (12 - 7)^2 \cdot \frac{1}{36} \\ &= \frac{210}{36} \approx 5,8333 \end{aligned}$$

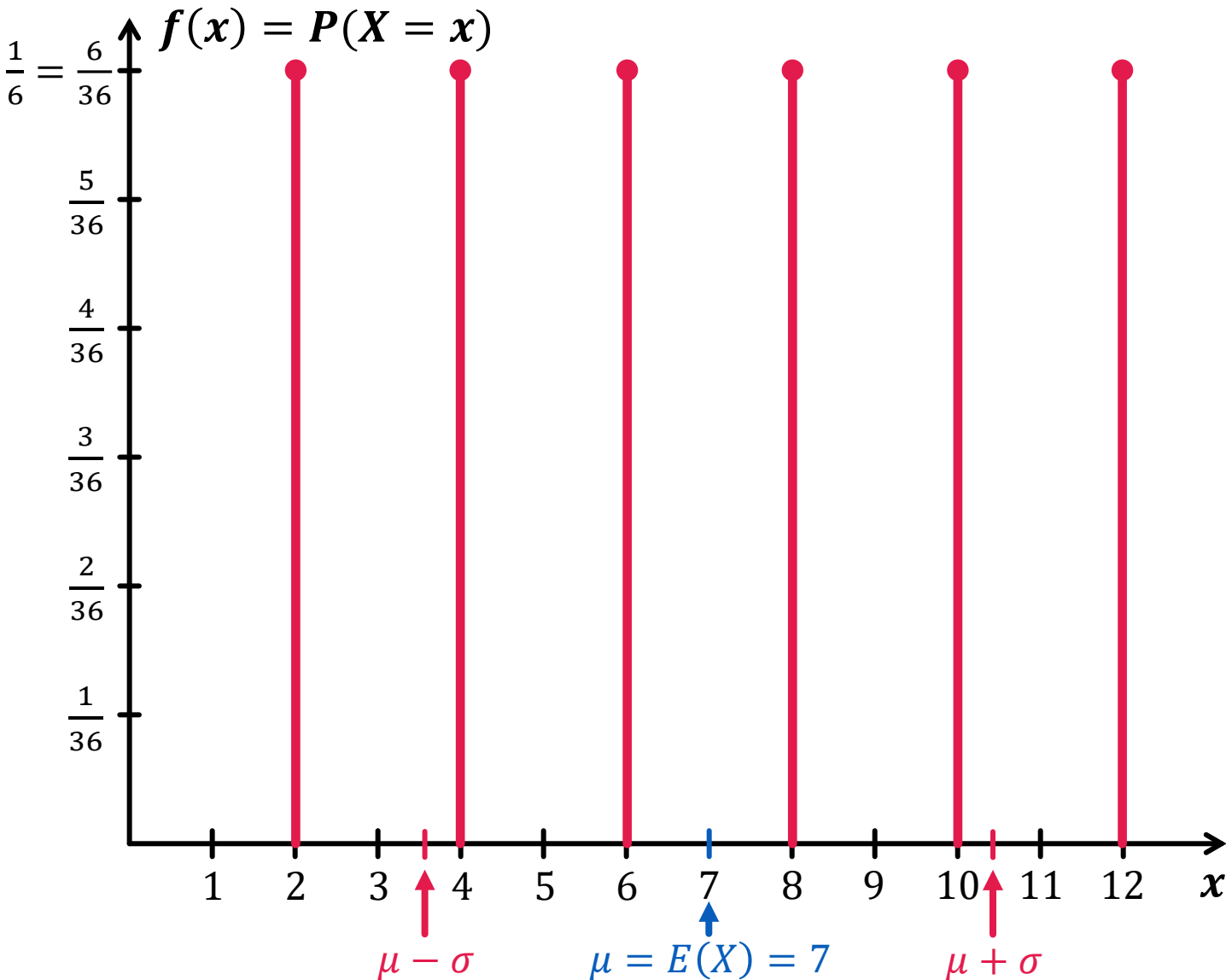
Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{210}{36}} \approx 2,4152$$

Streuungsmaß: Standardabweichung



Streuungsmaß: Standardabweichung



x	2	4	6	8	10	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Varianz σ^2

$$\sigma^2 = \text{Var}(X)$$

$$\begin{aligned} &= (2 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\quad + (6 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (8 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\quad + (10 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (12 - 7)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{70}{6} \approx 11,6667 \end{aligned}$$

Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{70}{6}} \approx 3,4157$$

R

TU
P
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Kapitel 4:

Beurteilende Statistik

- 4.1 Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung
- 4.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion**
- 4.3 Prognose- und Konfidenzintervall
- 4.4 Hypothesentest
- 4.5 Ausgewählte Unterrichtsvorschläge



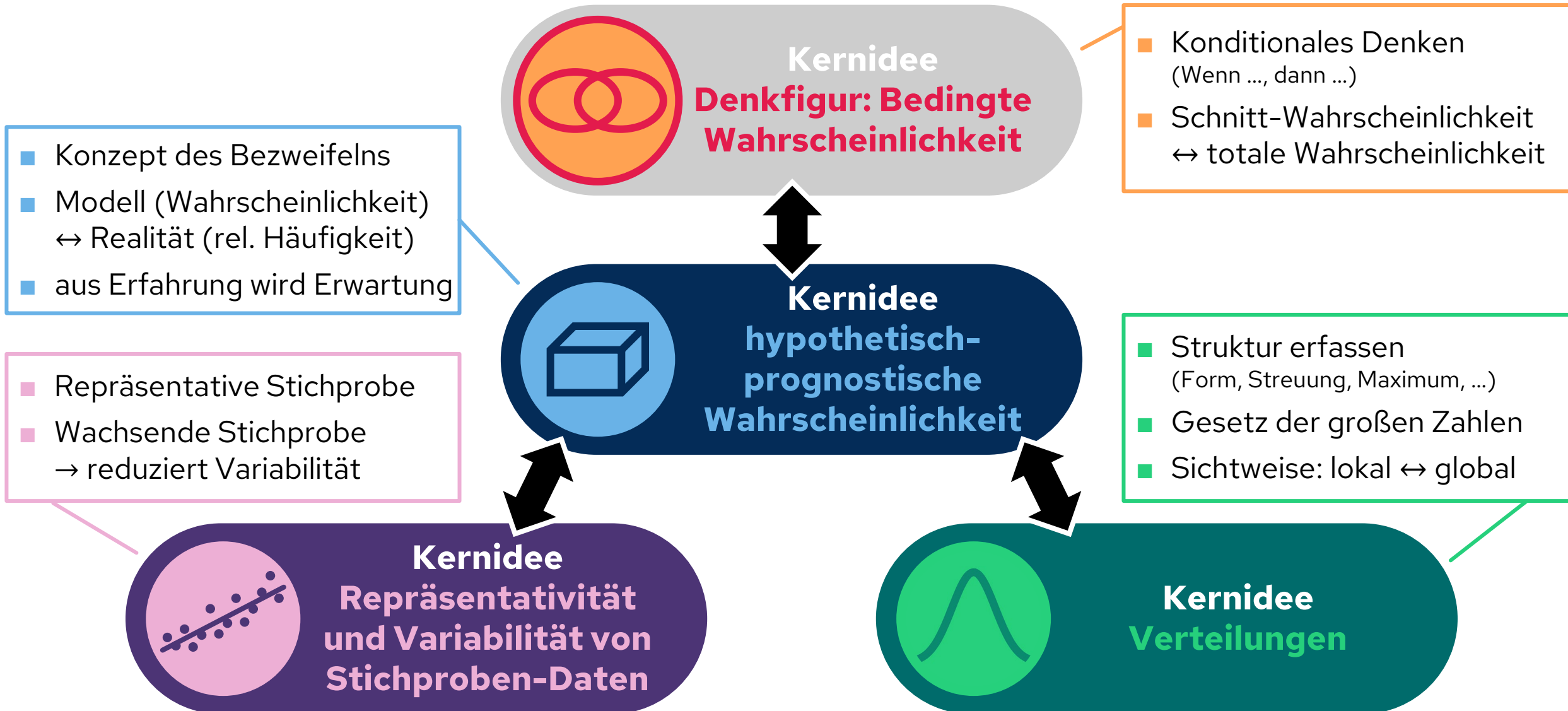
GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
<https://roth.tel/stochastik>

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-stochastik

RPTU

Kernideen im Fokus

bei Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion



	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
8.	Die Begriffe „Bernoullikette“, „Binomialverteilung“ verstehen und die Formel zur Berechnung der Werte einer Binomialverteilung herleiten (5.04g)	Die explizite Berechnung von Werten der Binomialverteilung soll nur exemplarisch mit wenigen Stufen durchgeführt werden. Beim Lösen von Anwendungsaufgaben werden i.d.R. Rechner benutzt. Anknüpfend an vorangegangene Erfahrungen bietet es sich auch an, Bernoulliketten zu simulieren und Werte der Binomialverteilung auf diese Weise zu bestimmen.
9.	Die Formeln für Erwartungswert und Standardabweichung einer Binomialverteilung kennen und anwenden (5.04g)	Die Formeln können anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden; ein Beweis ist nicht gefordert.
10.	Eigenschaften der Binomialverteilung kennen, begründen und anwenden (5.04g)	Zur Veranschaulichung charakteristischer Eigenschaften ist die Darstellung von Binomialverteilungen durch Histogramme hilfreich; der Einsatz geeigneter Computerprogramme wird empfohlen.

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
11.	Sachaufgaben zur Binomialverteilung lösen (5.04g, 4.12g)	Die SuS sollen erfahren, dass viele Zufallsexperimente im täglichen Leben durch eine Binomialverteilung ausreichend gut modelliert werden können.
12.	Verstehen, wie man Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise mit Hilfe der Gaußschen Integralfunktion Φ (Standard-Normalverteilung) bestimmt (5.09e, 5.10e)	Die Möglichkeit der Approximation soll anschaulich, z.B. anhand von Histogrammen, einsichtig gemacht werden. Hierfür empfiehlt sich der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms. Die Bestimmung der Näherungswerte erfolgt mit Hilfe von Tabellen oder Rechnern. Im Rahmen des pädagogischen Freiraums können darauf aufbauend die Normalverteilung definiert und Anwendungsbeispiele behandelt werden.
13.	Funktionsterm, Graph und Eigenschaften der Gaußfunktion Φ kennen (5.09e, 5.10e)	Zur Veranschaulichung charakteristischer Eigenschaften ist die Darstellung von Binomialverteilungen durch Histogramme hilfreich; der Einsatz geeigneter Computerprogramme wird empfohlen.

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
6.	Die Begriffe „Bernoullikette“ und „Binomialverteilung“ verstehen und wissen, wie man die Werte einer Binomialverteilung bestimmen kann (5.04g)	Eine explizite Berechnung der Werte der Binomialverteilung soll nur exemplarisch mit wenigen Stufen durchgeführt werden. Die Herleitung der entsprechenden Formel ist nicht gefordert. Beim Lösen von Anwendungsaufgaben werden Tabellen für die Binomialverteilung benutzt. Binomialverteilungen sollen auch grafisch dargestellt werden (Histogramme).
7.	Sachaufgaben zur Binomialverteilung lösen (5.04g)	Die Formeln sollen anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden. Bei der Anwendung in Sachaufgaben kommt es vor allem darauf an, dass die SuS verstehen, welche Folgerungen man aus den Kennwerten für das Sachproblem ziehen kann. Hier bietet es sich an, exemplarisch eine statistische Erhebung zu planen und zu beurteilen.

Bemerkung

- $P(X = x)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, das zum Wert x der Zufallsvariable X gehört.
- Sprechweise: „ $P(X = x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert x annimmt.“
- Notation
$$P(X = x) := P(\{X = x\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$$

Definition Verteilungsfunktion

Ist X eine Zufallsvariable, dann heißt $F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1], x \mapsto F(x)$ mit

$$\begin{aligned} F(x) &:= P(X \leq x) \\ &= P(\{X \leq x\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) \end{aligned}$$

Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X .

Definition Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ist X eine Zufallsvariable, dann heißt $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1], x \mapsto f(x)$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &:= P(X = x) \\ &= P(\{X = x\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}) \end{aligned}$$

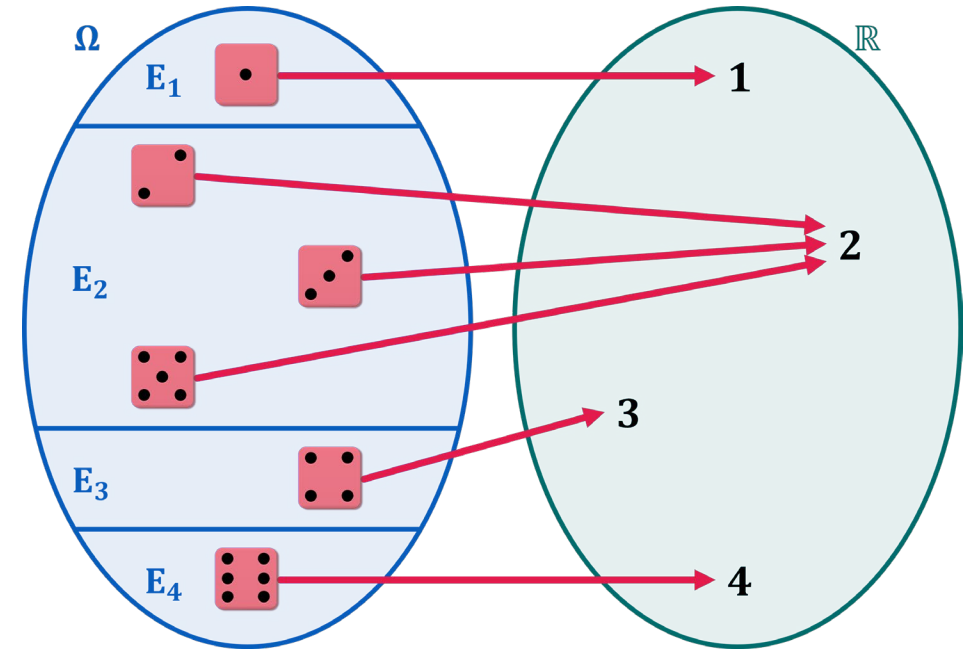
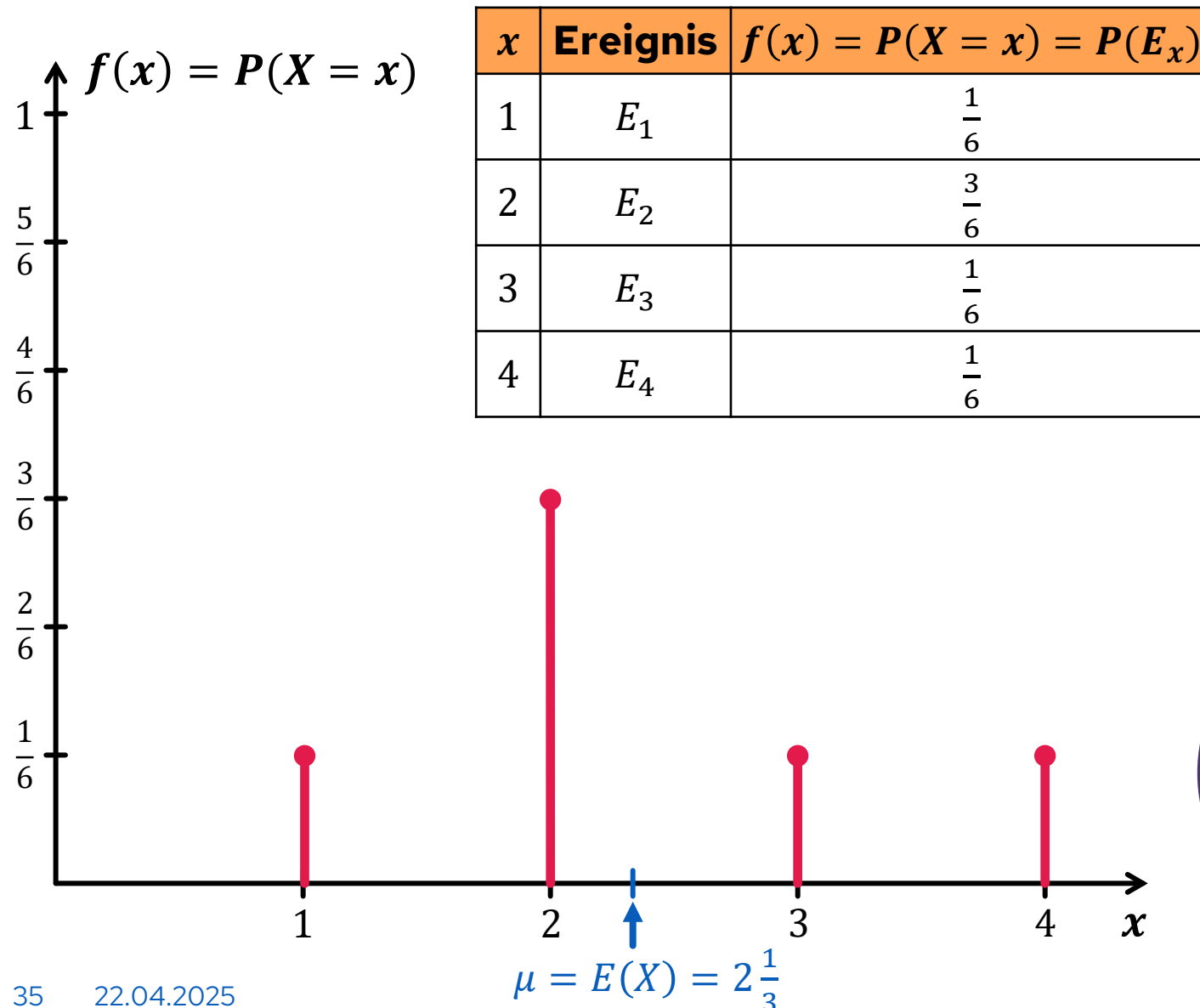
Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X .

Bemerkung

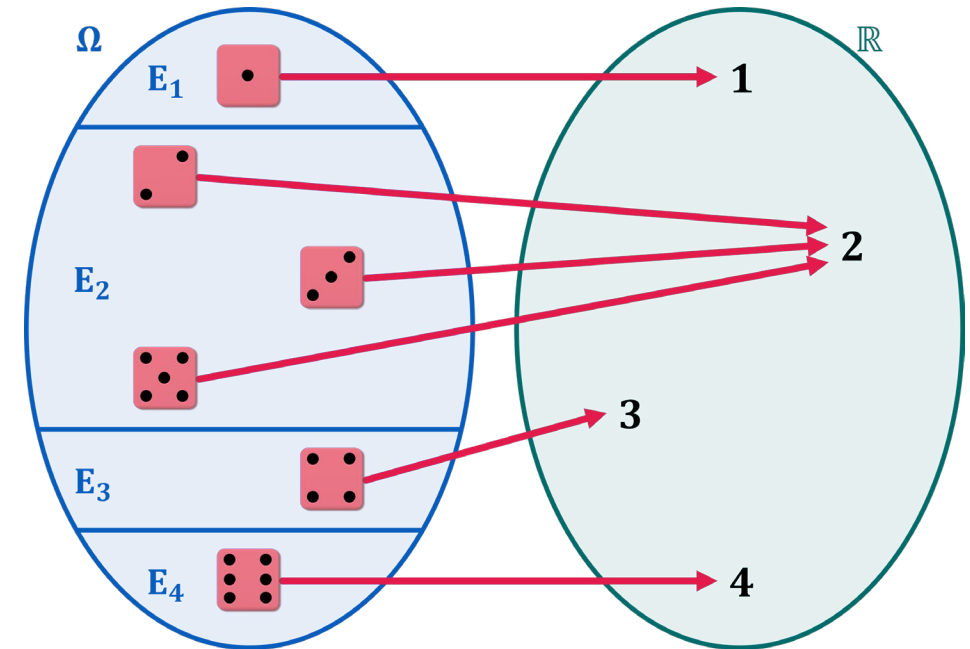
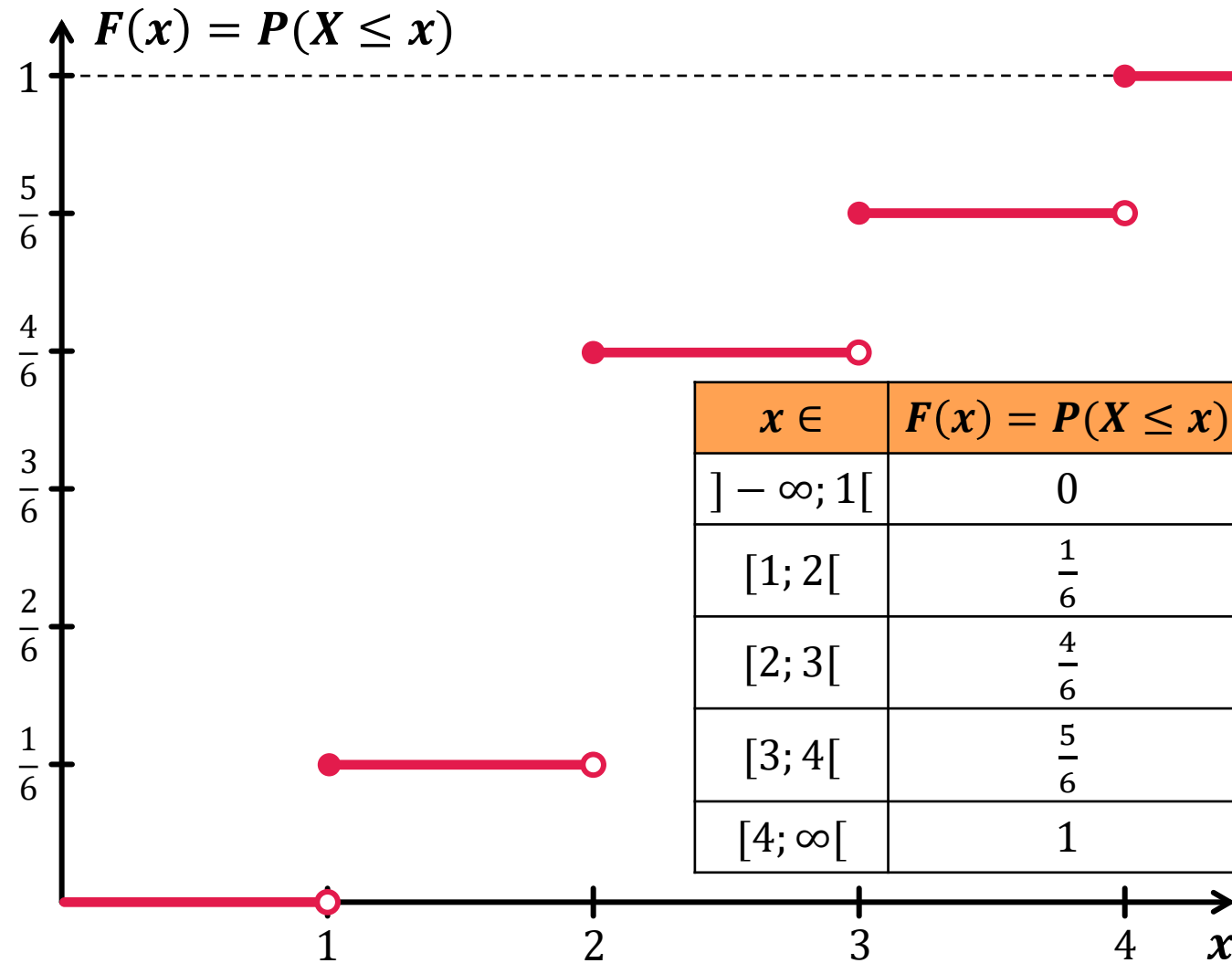
Konkret werden durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung die Wahrscheinlichkeiten so auf disjunkte Ereignisse E_1 bis E_n verteilt, dass gilt:

- (1) $E_1 \cup \dots \cup E_n = \Omega$
- (2) $P(E_1) + \dots + P(E_n) = 1$

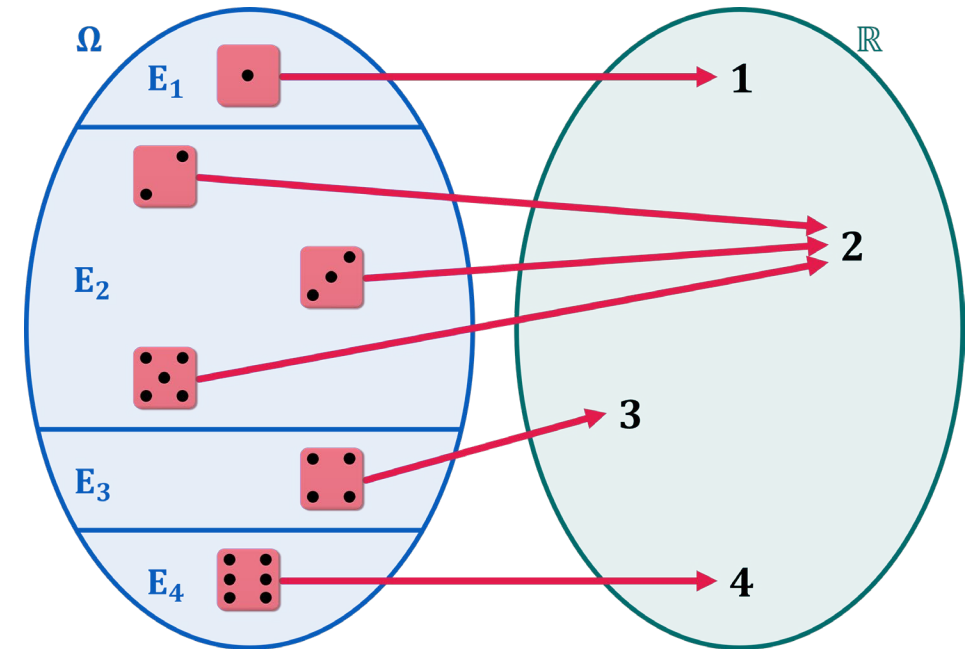
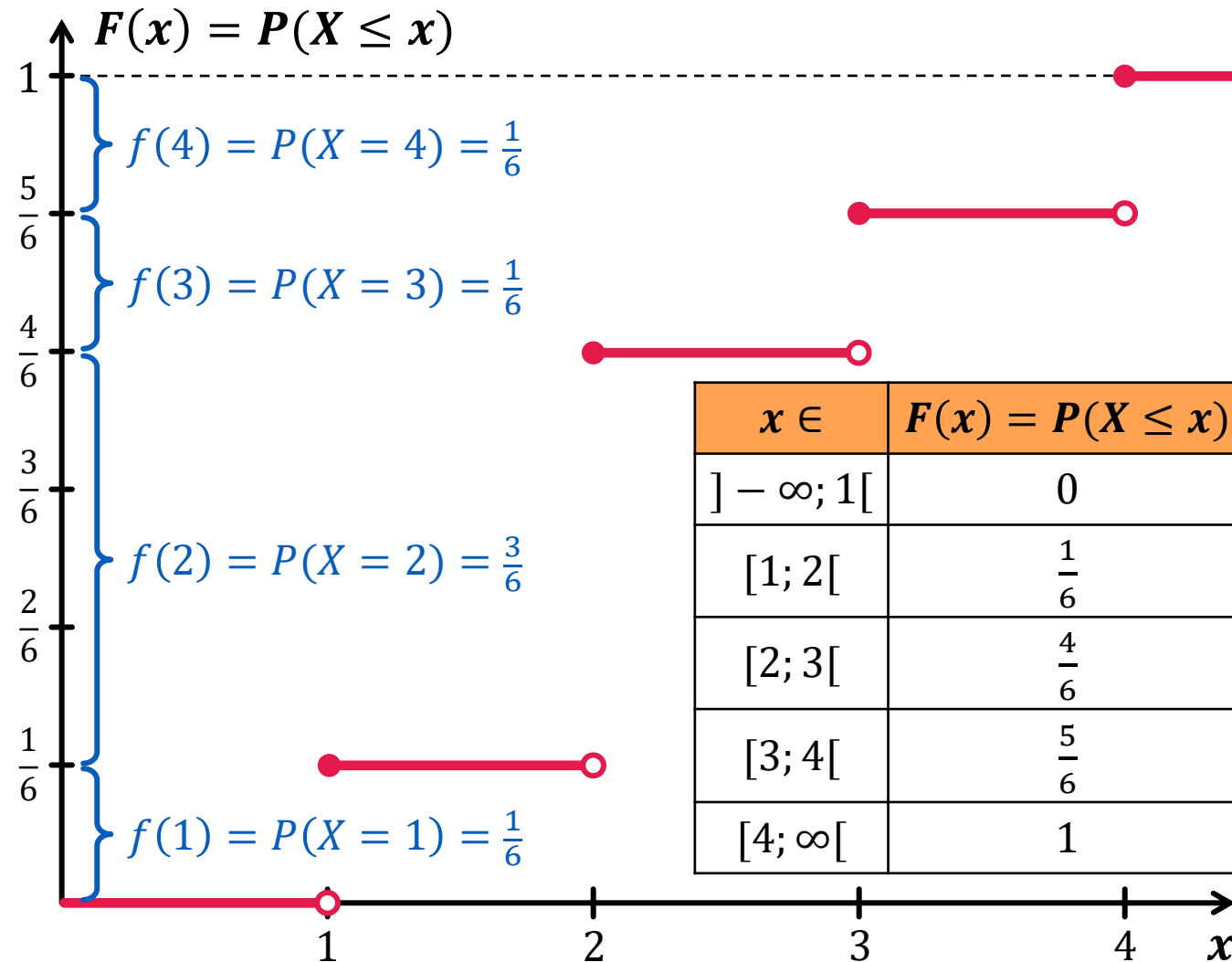
Wahrscheinlichkeitsverteilung



Beispiel: Würfeln mit einem Würfel
Die diskrete Zufallsvariable X
ordnet jedem Ergebnis ω die Anzahl
 x der Teiler der geworfenen
Augenzahl zu: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$



Beispiel: Würfeln mit einem Würfel
Die diskrete Zufallsvariable X
ordnet jedem Ergebnis ω die Anzahl
 x der Teiler der geworfenen
Augenzahl zu: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$



Eigenschaften von Verteilungsfunktionen

- $P(X > a) = 1 - F(a)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- Bei diskreten Zufallsvariablen
 $P(X = x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$

Bernoulli-Experiment¹

- Ein Zufallsexperiment bei dem nur interessiert, ob ein bestimmter Ausgang vorliegt oder nicht, man also nur die beiden Ergebnisse „Treffer“ oder „Niete“ hat, nennt man **Bernoulli-Experiment**.
- Ein passender Ergebnisraum ist $\Omega = \{0,1\}$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $P(\{1\}) = p$ und der Nietenwahrscheinlichkeit $P(\{0\}) = 1 - p = q$.



Bernoulli-Kette: Ein n -stufiges Zufallsexperiment mit Ergebnisraum $\Omega = \{0,1\}^n$, bei dem (für $i = 1, \dots, n$) die Ereignisse E_i : „Menge aller n -Tupel mit der 1 an der i -ten Stelle“ („Treffer in der i -ten Stufe des Experiments“)

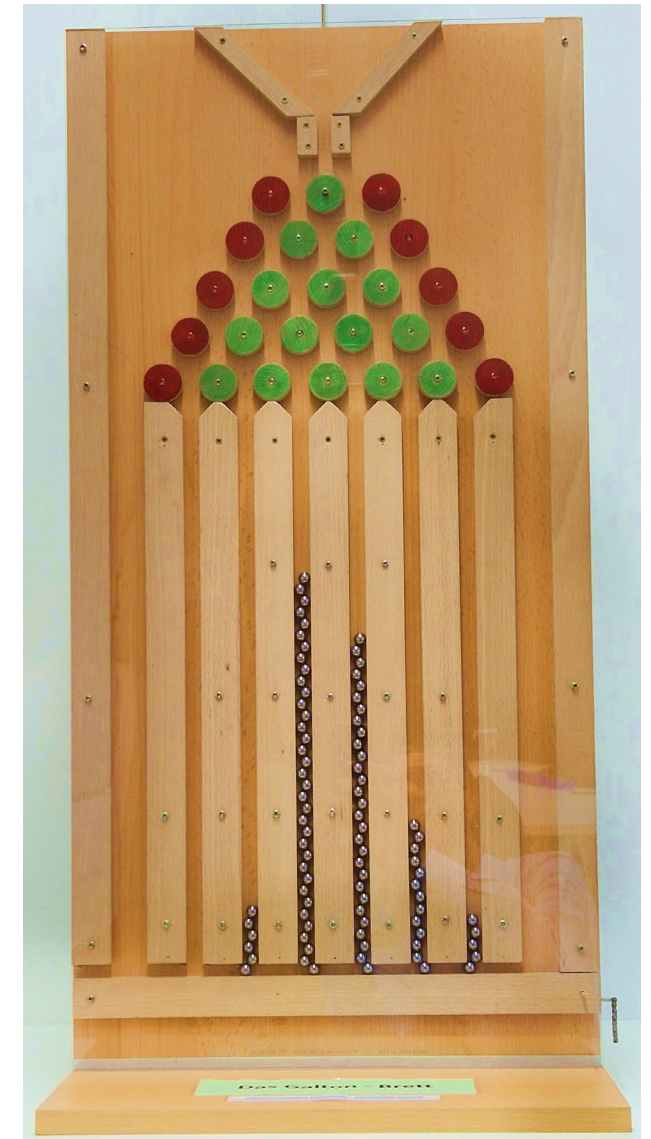
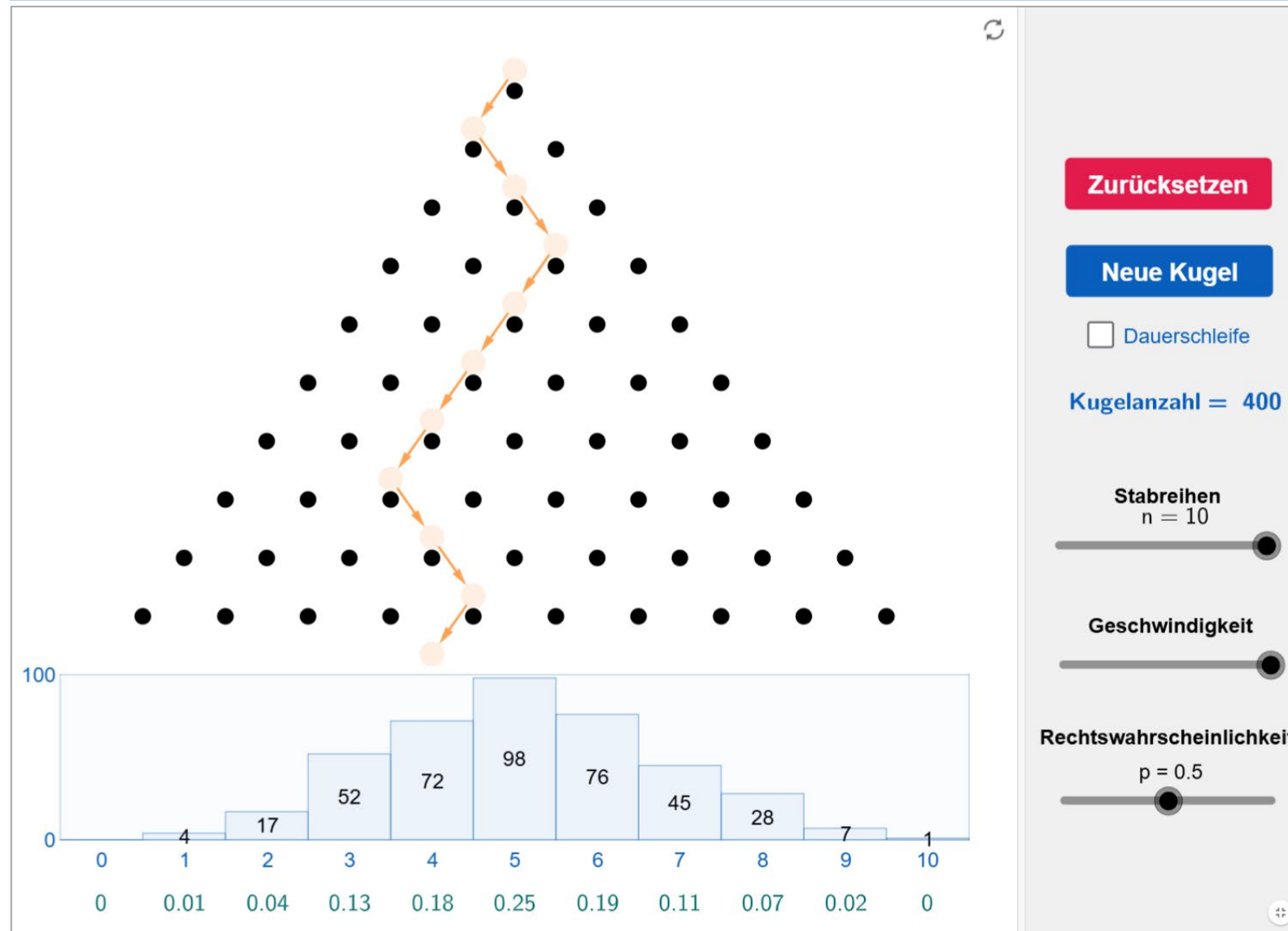
- unabhängig sind und
- die gleiche Wahrscheinlichkeit $P(E_i) = p$ haben, heißt **Bernoulli-Kette** mit den Parametern n und p . Der Parameter n heißt Länge der Bernoulli-Kette.

Aufgabe: Ist die Voraussetzung für eine Bernoulli-Kette jeweils erfüllt?

- a) Eine Person, die bisher nicht Basketball gespielt hat, wirft zehnmal hintereinander auf einen Basketballkorb.
- b) Zehn zufällig gewählte Personen werfen je einmal auf einen Basketballkorb.
- c) Eine Person wirft während zehn Wochen immer Montags in der Pause einmal auf einen Basketballkorb.

Galton-Brett

https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_all.html?locale=de



Herleitung: Wahrscheinlichkeit $B(n; p; k)$ für k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n

$$B(n; p; k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Summenregel: Anzahl aller Pfade mit } k \text{ Treffern}} \cdot \underbrace{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{\text{Produktregel: Wahrscheinlichkeit eines Pfades der Länge } n \text{ mit } k \text{ Treffern}}$$

Pfadregeln

Länge der Kette: $n = 5$

Treffer:

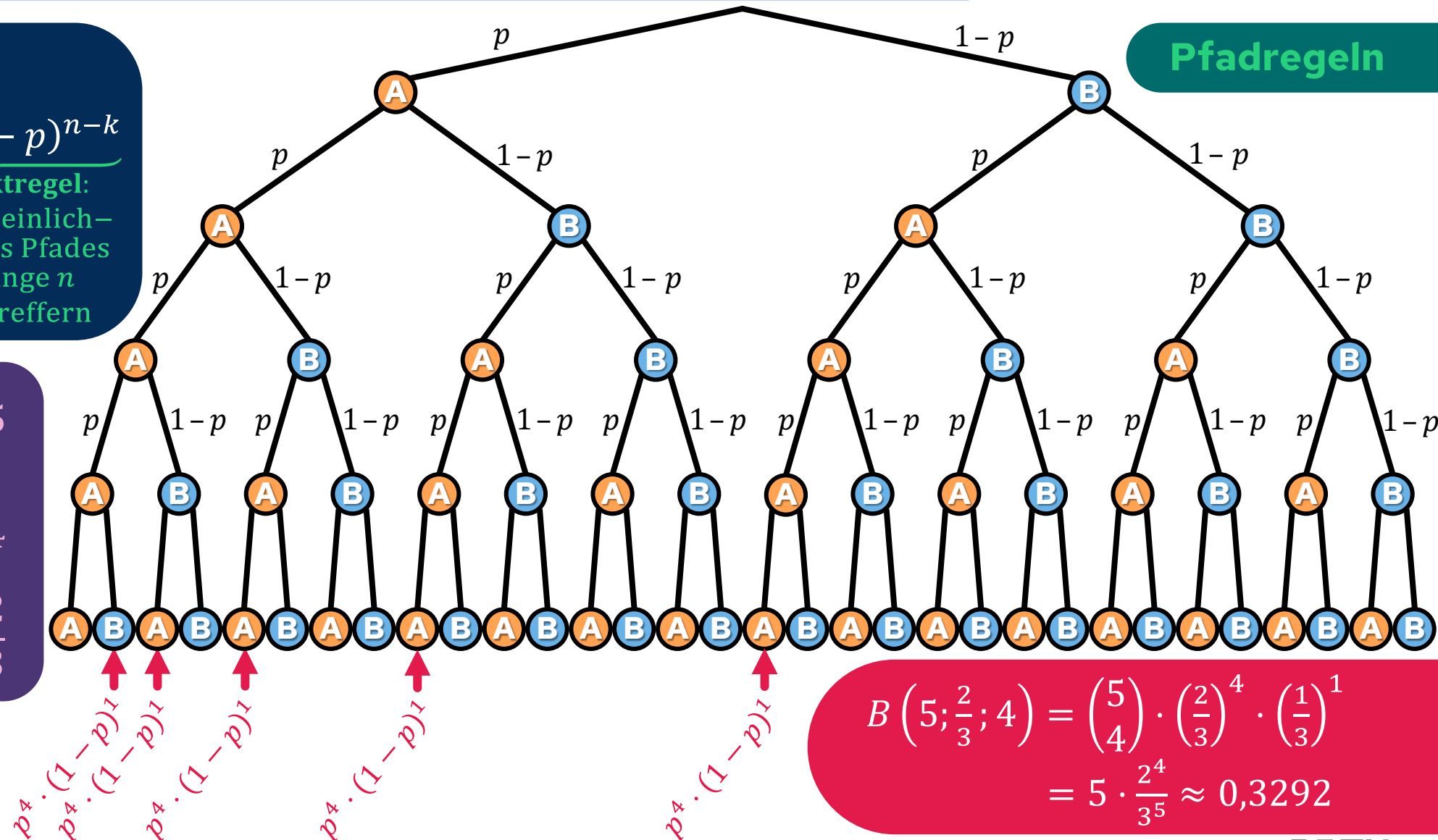
A

Trefferanzahl:

$k = 4$

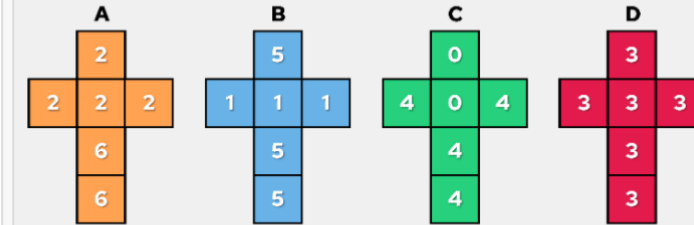
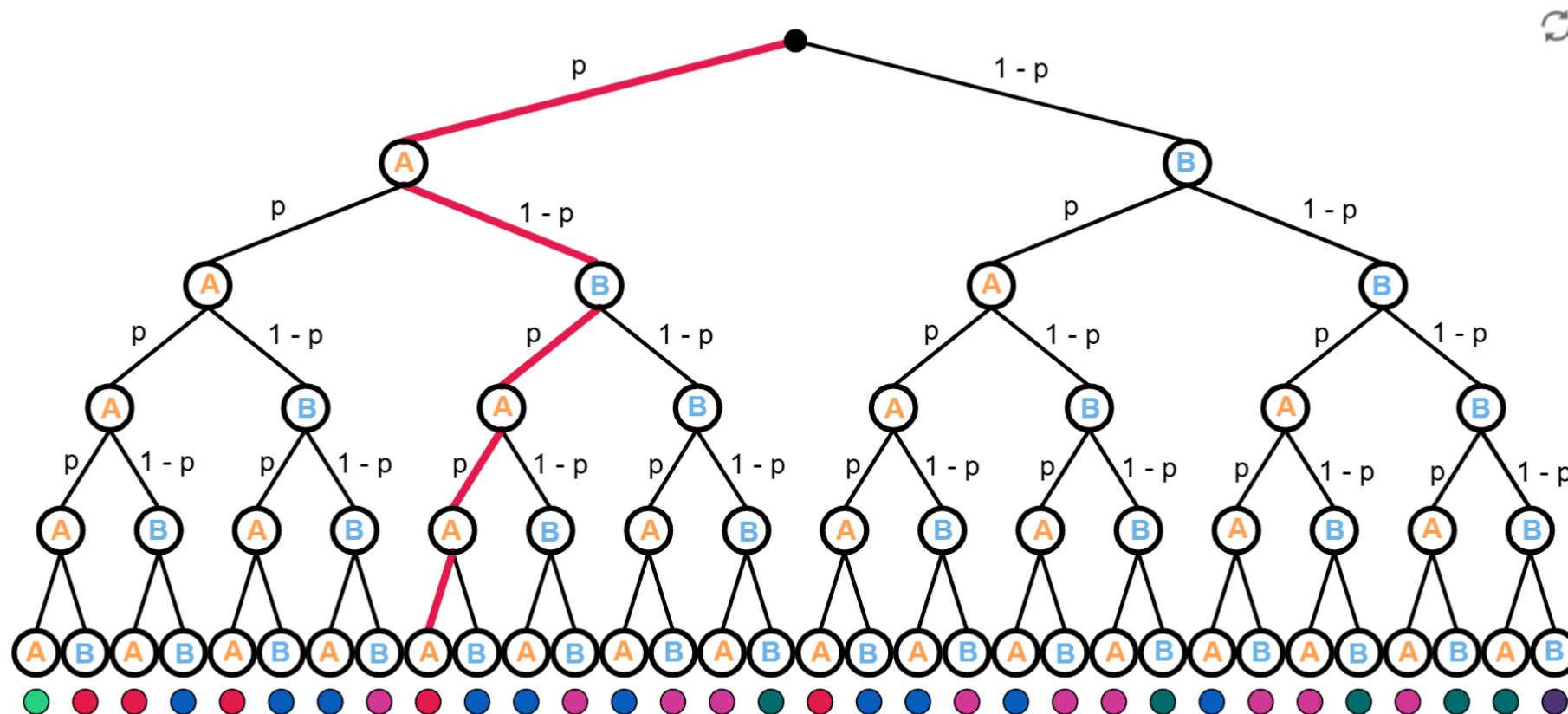
Trefferwahrscheinlichkeit:

$p = \frac{2}{3}$



$$B\left(5; \frac{2}{3}; 4\right) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 5 \cdot \frac{2^4}{3^5} \approx 0,3292$$

Herleitung: Wahrscheinlichkeit $B(n; p; k)$ für k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n



Reset

Würfelauswahl

A und B

A und C

A und D

B und C

B und D

C und D

Anzahl der Stufen = 5



Pfad



$$p = \frac{2}{3}$$

$$\text{green } p^5 \cdot (1-p)^0 \approx 0.132 \quad \text{magenta } p^2 \cdot (1-p)^3 \approx 0.016$$

$$\text{red } p^4 \cdot (1-p)^1 \approx 0.066 \quad \text{cyan } p^1 \cdot (1-p)^4 \approx 0.008$$

$$\text{blue } p^3 \cdot (1-p)^2 \approx 0.033 \quad \text{purple } p^0 \cdot (1-p)^5 \approx 0.004$$

Satz: Trefferwahrscheinlichkeit in einer Bernoulli-Kette ¹

Für ein Bernoulli-Experiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p \in]0; 1[$ ist die Wahrscheinlichkeit $B(n; p; k)$ für k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n gegeben durch ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$):

$$B(n; p; k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Beweisidee

Vgl. Folie 37 →

Definition: Binomialverteilung

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$B(n; p): k \mapsto B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

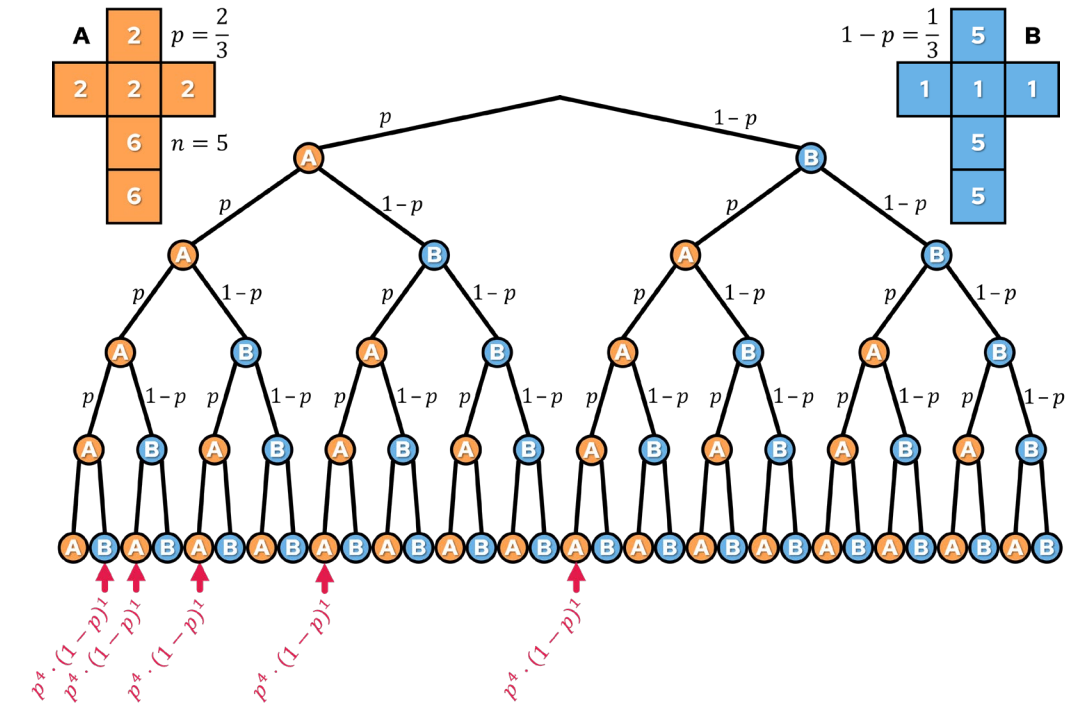
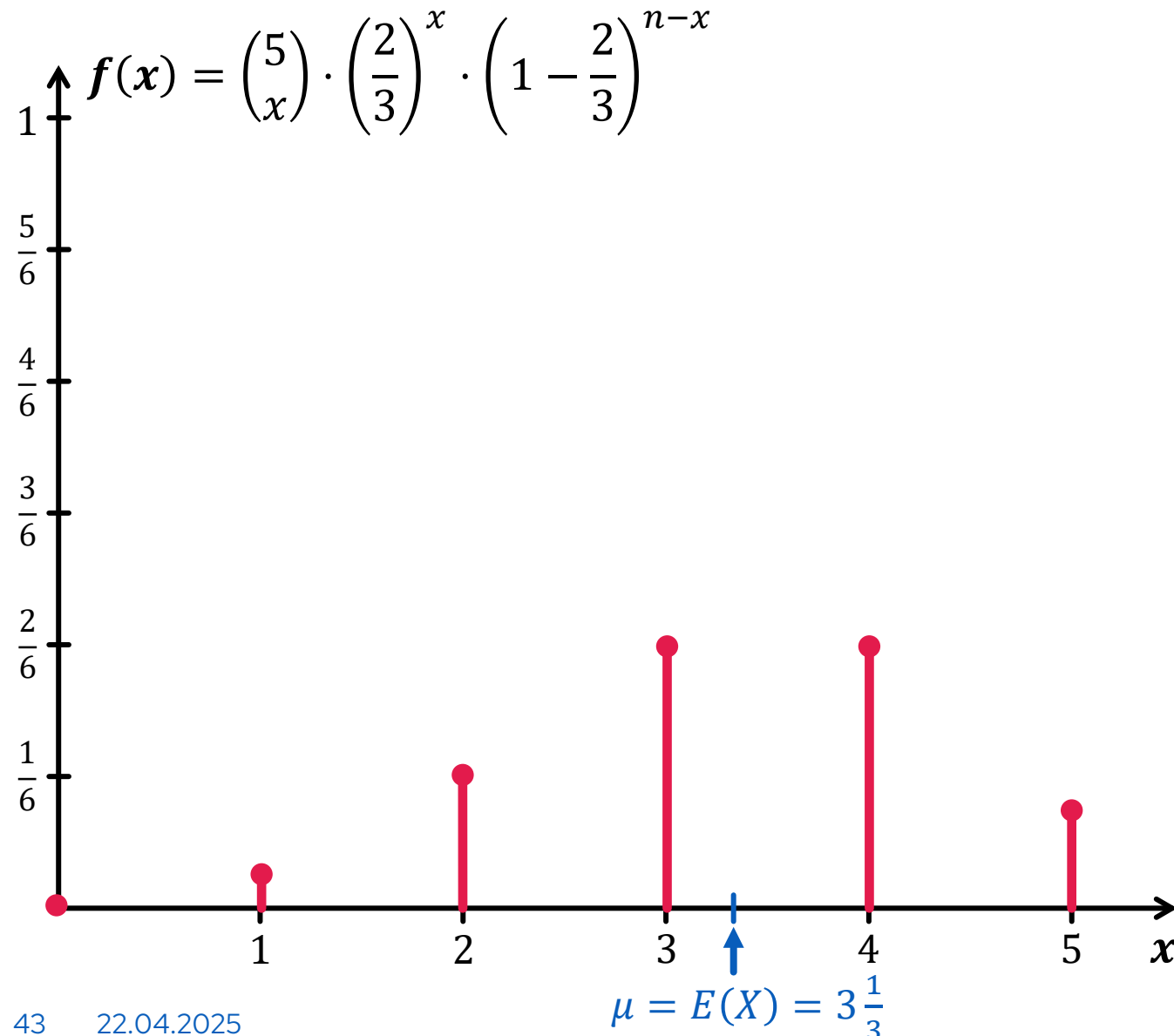
mit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $p \in]0; 1[$ heißt **Binomialverteilung** mit den Parametern n und p .

- Eine Zufallsgröße X mit $P(X = k) = B(n; p; k)$ heißt binomial verteilt nach der Binomialverteilung $B(n; p)$.



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beispiel: Bernoulli-Kette → Binomialverteilung

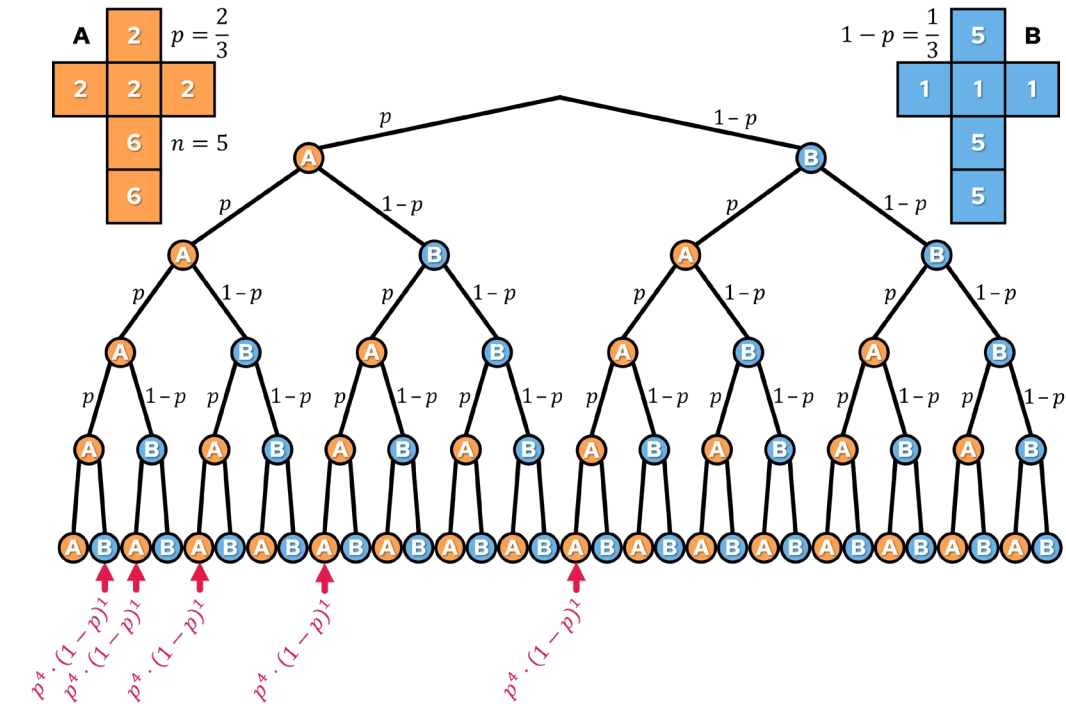
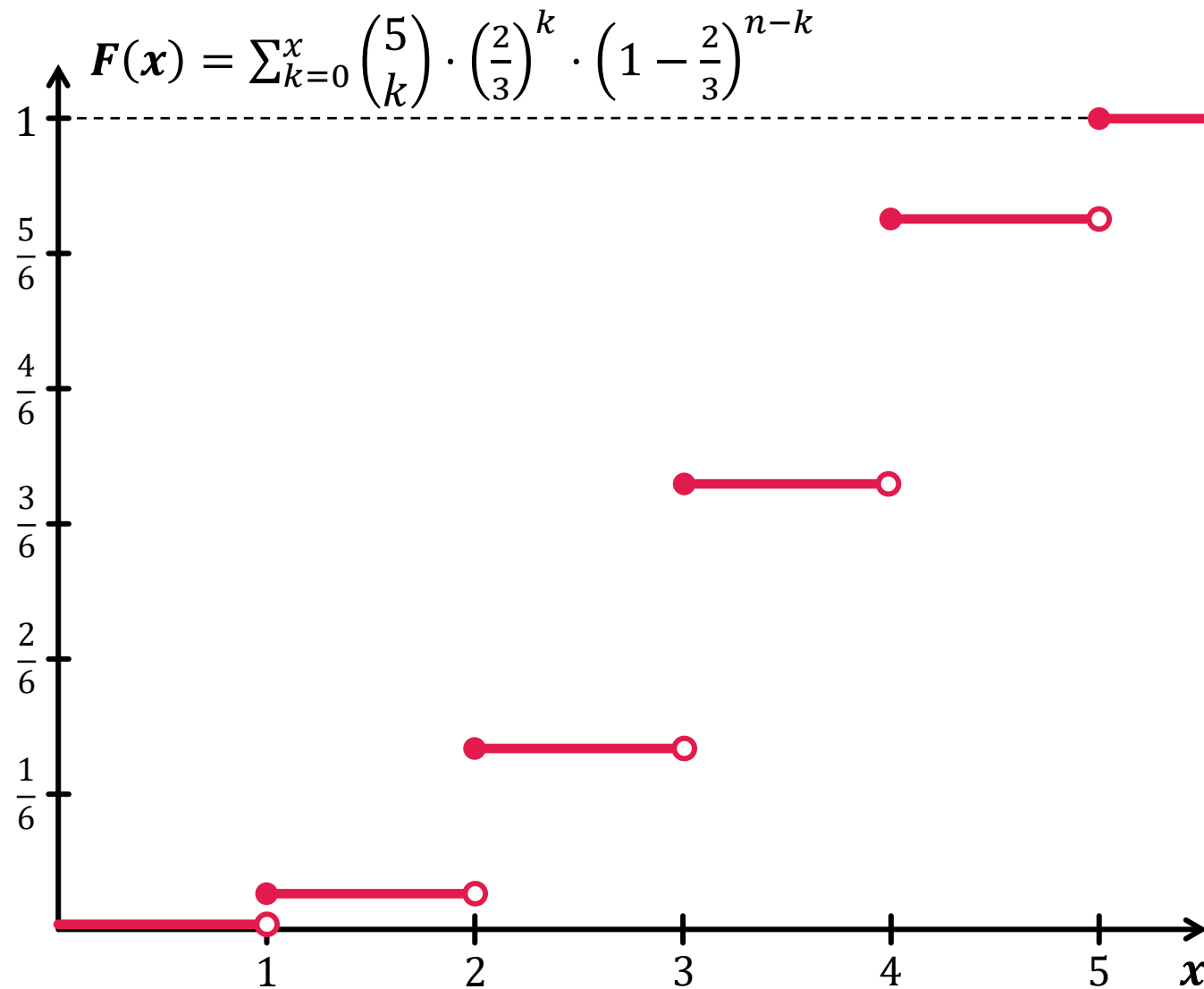


Beispiel: Fünfmaliges Würfeln mit zwei chinesischen Würfeln
Die diskrete Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω des fünfmaligen Würfeln ($n = 5$) die Anzahl x der Gewinne des orangenen Würfels (Gewinnwahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{3}$) zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Verteilungsfunktion

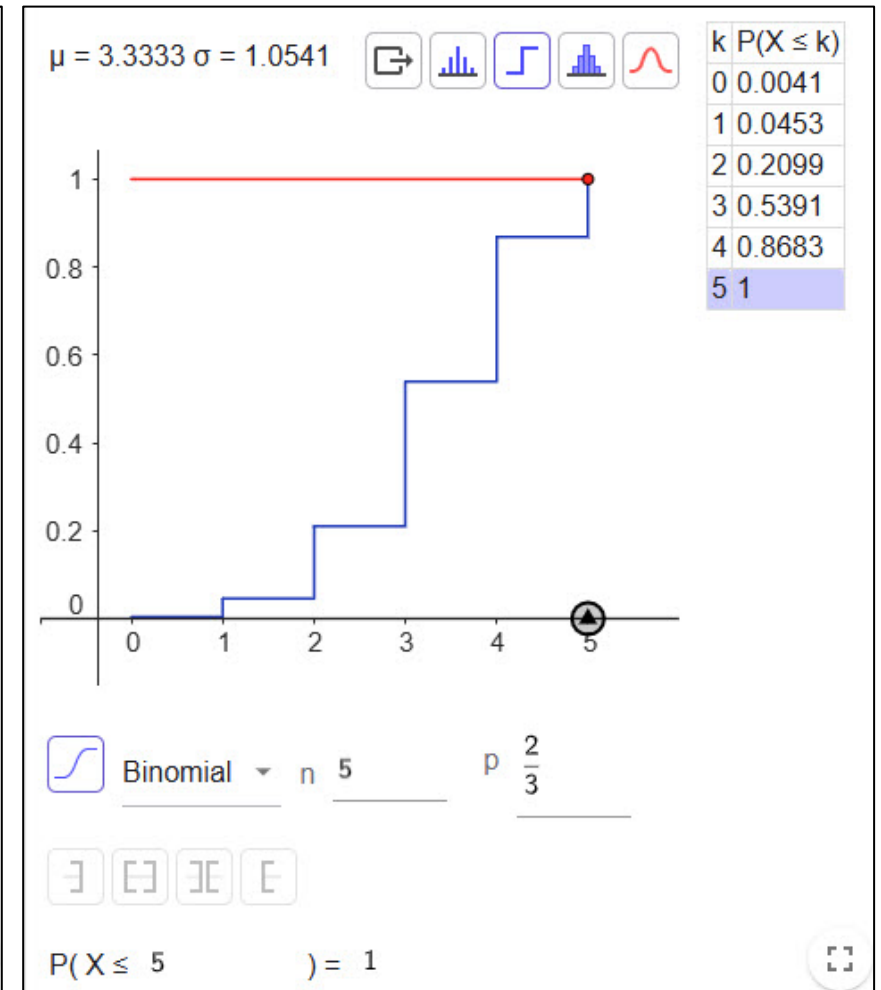
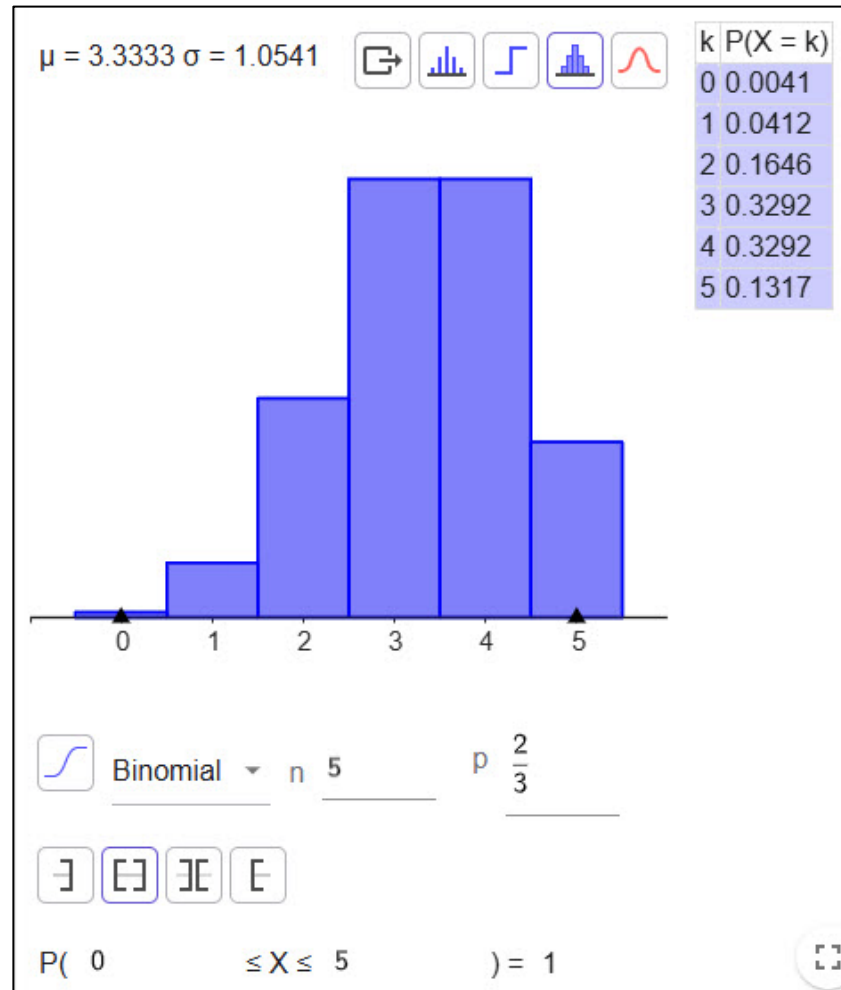
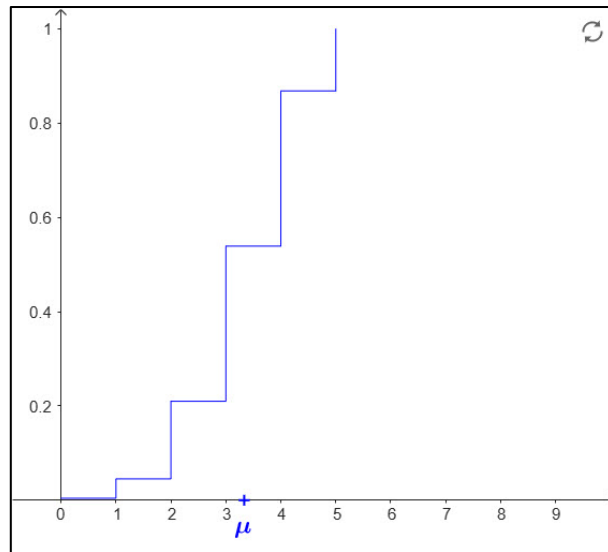
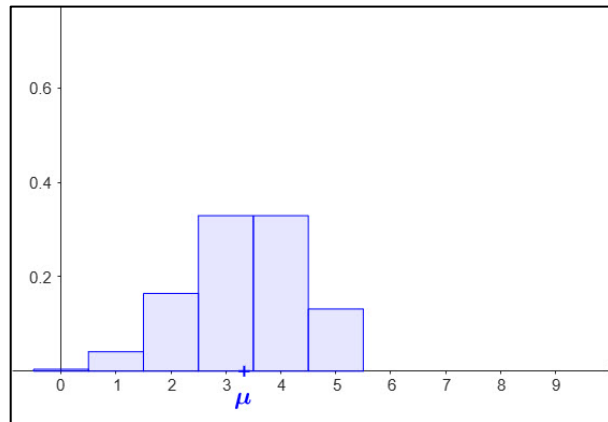
Beispiel: Bernoulli-Kette → Binomialverteilung



Beispiel: Fünfmaliges Würfeln mit zwei chinesischen Würfeln
Die diskrete Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis ω des fünfmaligen Würfeln ($n = 5$) die Anzahl x der Gewinne des orangen Würfels (Gewinnwahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{3}$) zu:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto x$$

Binomialverteilung mit GeoGebra



Aufgabe: Erkunden Sie Eigenschaften der Binomialverteilung anhand der GeoGebra-Datei.

Aufgabe: Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl (absolute Häufigkeit) k der Treffer bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p .

- Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n ordnet die Zufallsvariable X_i dem i -ten Bernoulli-Experiment der Kette den Wert 0 für Niete und den Wert 1 für Treffer mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung zu:

x_i	0	1
$P(X_i = x_i)$	$1 - p$	p

- Die Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ beschreibt also die Anzahl (absolute Häufigkeit) der Treffer in einer Bernoulli-Kette mit den Parametern n und p , wobei die X_i unabhängig sind.

- Da für die Erwartungswerte $E(X_i)$ gilt

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) \\ &= 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p \end{aligned}$$

folgt für den **Erwartungswert** $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &\stackrel{*}{=} E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \\ &= \underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot p \end{aligned}$$

Satz: Erwartungswert der binomialverteilten Zufallsvariable „absolute Trefferhäufigkeit“ X
Für den **Erwartungswert** $E(X)$ einer $B(n; p)$ -verteilten Zufallsvariable „absolute Trefferhäufigkeit“ X gilt: $E(X) = n \cdot p$

Satz: Erwartungswert der binomialverteilten Zufallsvariable „relative Trefferhäufigkeit“ h
Für den **Erwartungswert** $E(h)$ einer $B(n; p)$ -verteilten Zufallsvariable „relative Trefferhäufigkeit“ h gilt: $E(h) = \frac{E(X)}{n} = \frac{n \cdot p}{n} = p$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Standardabweichung für die Anzahl k der Treffer bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p .

- Die Varianz der Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ lässt sich ebenfalls über die Varianzwerte der unabhängigen Zufallsgrößen X_i bestimmen:
- Mit $\mu_i = E(X_i) = p$ gilt für die Varianzen $\text{Var}(X_i)$:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_i) &= (0 - \mu_i)^2 \cdot P(X_i = 0) + (1 - \mu_i)^2 \cdot P(X_i = 1) \\ &= (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p \\ &= p^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p \\ &= p \cdot (1 - p) \cdot \underbrace{[p + (1 - p)]}_{=1} \\ &= p \cdot (1 - p)\end{aligned}$$

Daraus folgt für die **Varianz $\text{Var}(X)$** :

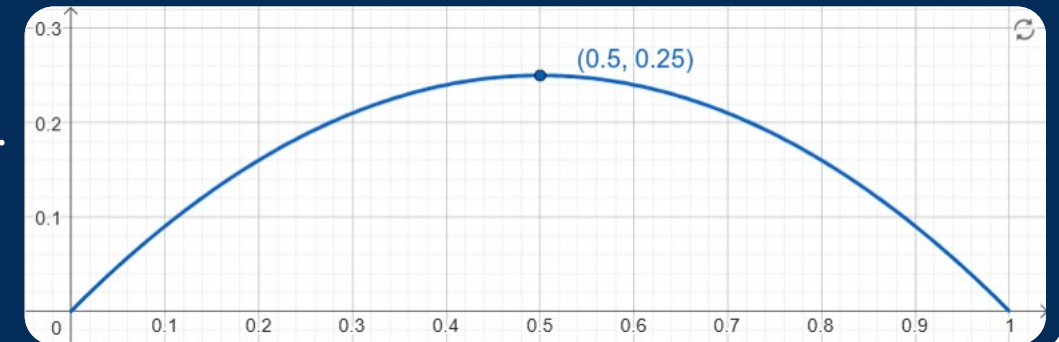
$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &\stackrel{*}{=} \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) \\ &= \underbrace{p \cdot (1 - p) + \dots + p \cdot (1 - p)}_{n \text{ Summanden}} \\ &= n \cdot p \cdot (1 - p) \\ \Rightarrow \sigma(X) &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}\end{aligned}$$

Satz: Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariable X

Für die Standardabweichung $\sigma(X)$ einer $B(n; p)$ -verteilten Zufallsvariable X gilt: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

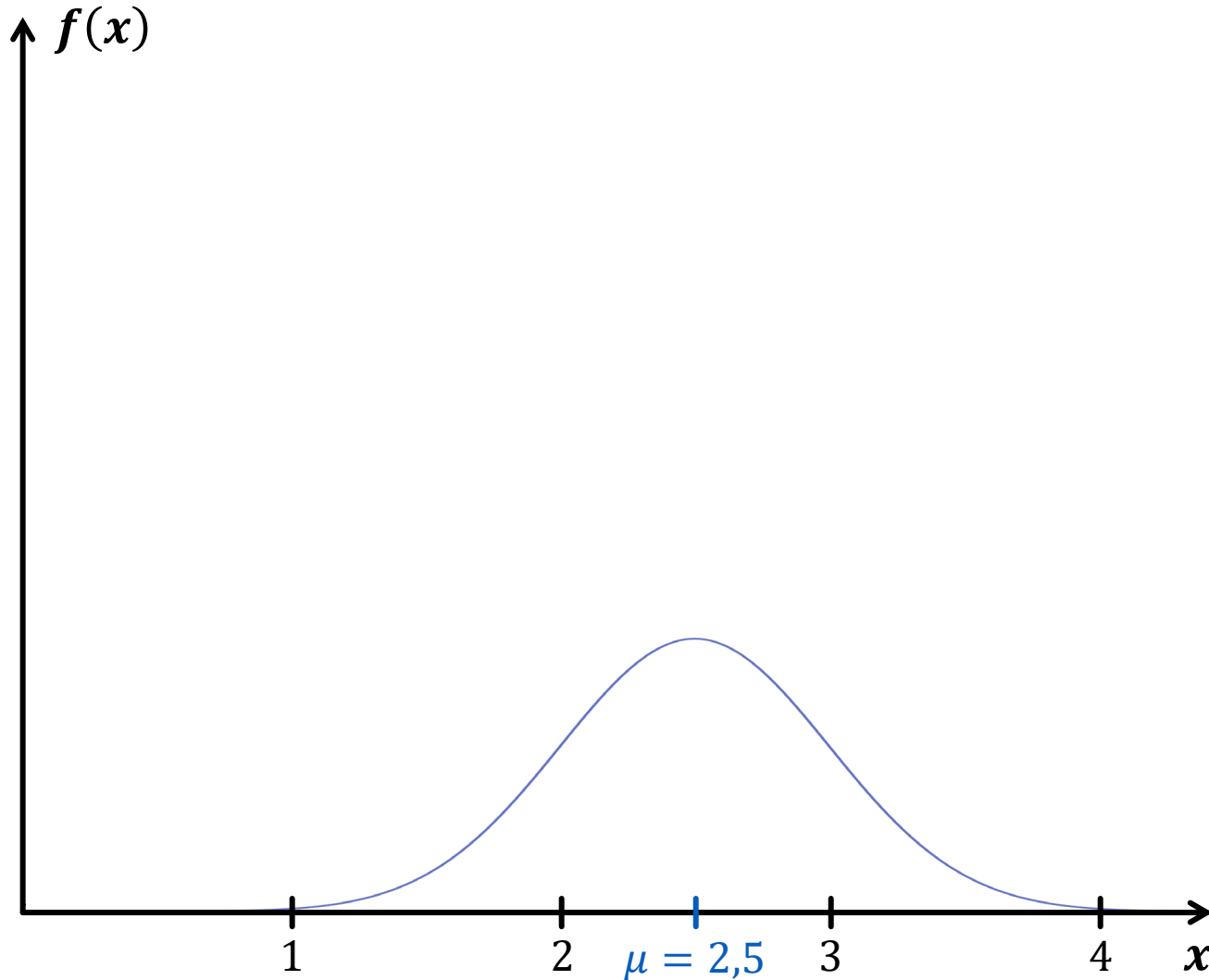
Bemerkung: Für die Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ einer Binomialverteilung lässt sich eine obere Abschätzung angeben, die unabhängig von p ist:

- Der Term $p \cdot (1 - p)$ unter der Wurzel kann wegen $0 \leq p \leq 1$ nicht größer als $\frac{1}{4}$ werden. Man sieht das, wenn man die Funktion $p \mapsto p \cdot (1 - p) = -p^2 + p$ im Definitionsbereich $0 \leq p \leq 1$ betrachtet.
- Der Graph dieser quadratischen Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
- Damit folgt:
$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \leq \sqrt{n \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$$



Satz: Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariable X
Für die Standardabweichung $\sigma(X)$ einer $B(n; p)$ -verteilten Zufallsvariable X gilt:

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$$



Bemerkung

- Hier ist der Graph der Dichtefunktion f einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung, konkret einer Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit $\mu = 2,5$ und $\sigma = 0,5$ dargestellt.

- Für eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung f gilt:

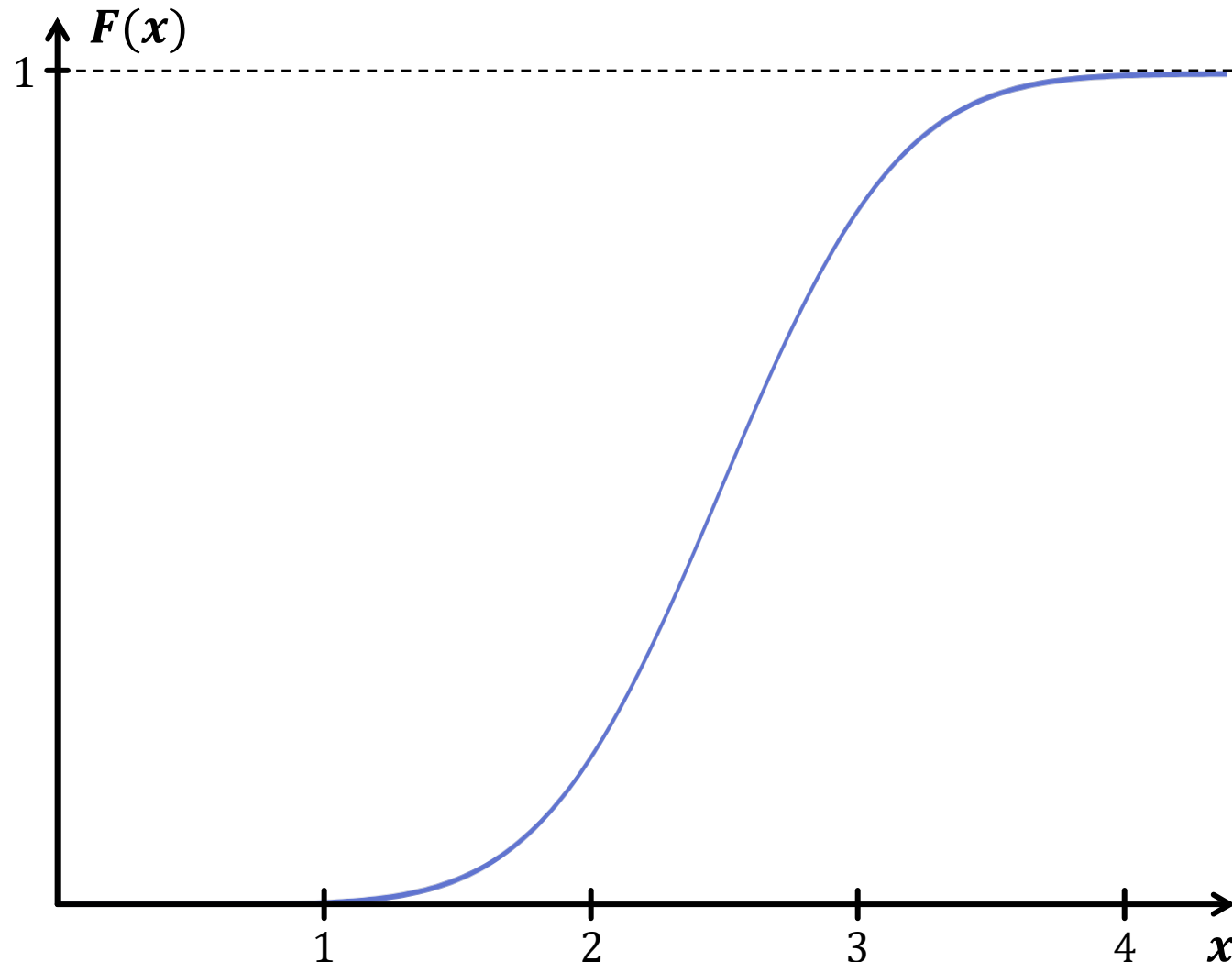
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Bemerkung

Eine Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ heißt auch φ .

Unnötig!

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Bemerkung

- Hier ist der Graph der Verteilungsfunktion F einer Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit $\mu = 2,5$ und $\sigma = 0,5$ dargestellt.

- Für solche Verteilungsfunktionen F gilt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

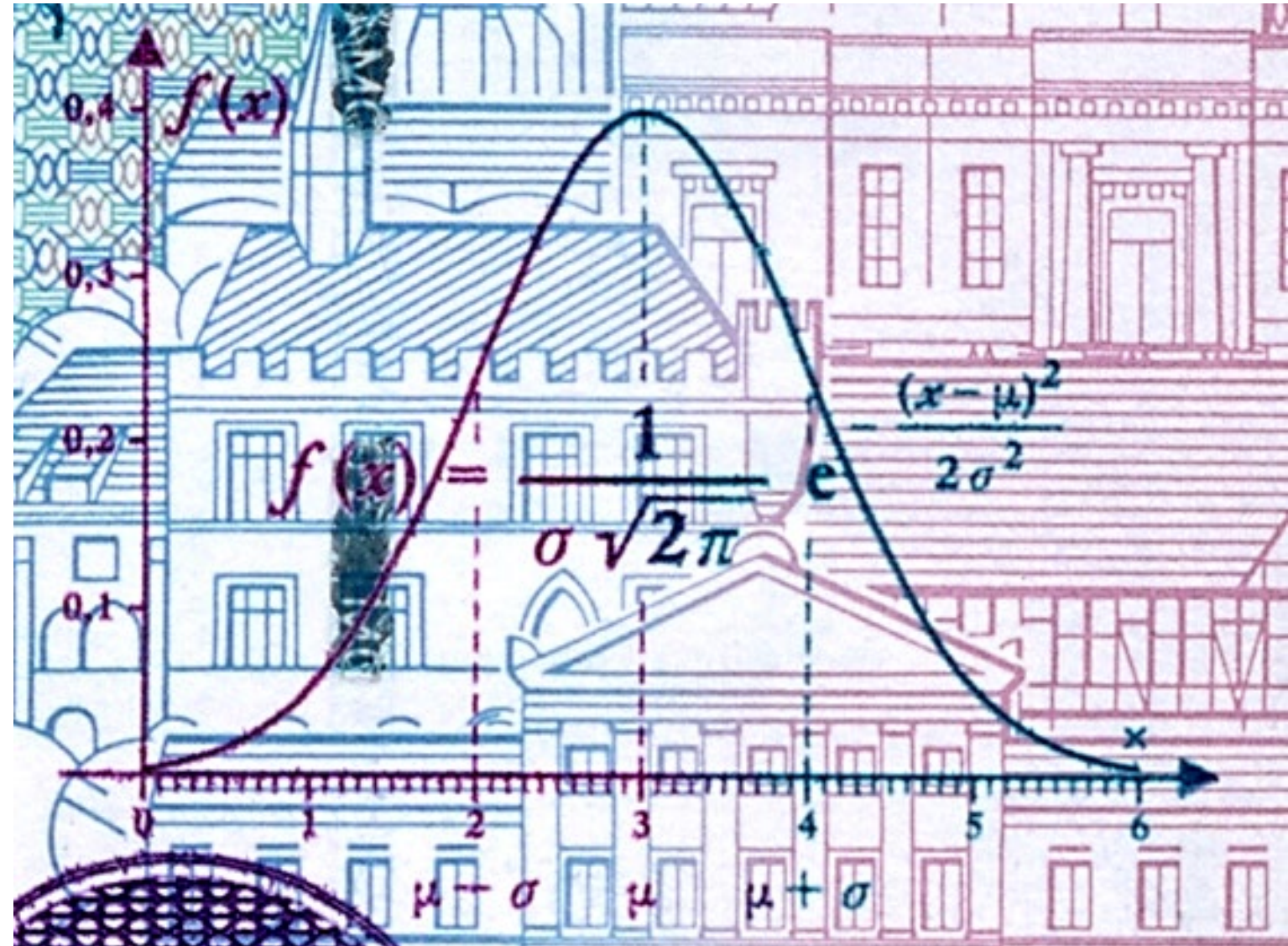
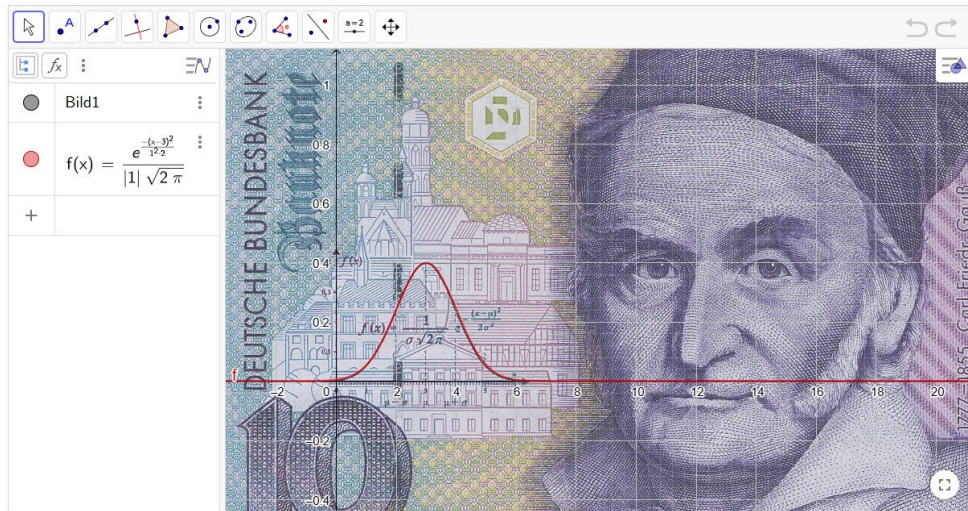
Bemerkung

Die Verteilungsfunktion zur Normalverteilung φ mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ heißt auch Φ .

Unnötig!

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Normalverteilung mit GeoGebra



Normalverteilung mit GeoGebra

☐ ☐ w = false

$NV(x) = \text{Normal}(\mu, \sigma, x, w)$

$= \frac{e^{\frac{-(x-3)^2}{1^2 \cdot 2}}}{|1| \sqrt{2 \pi}}$

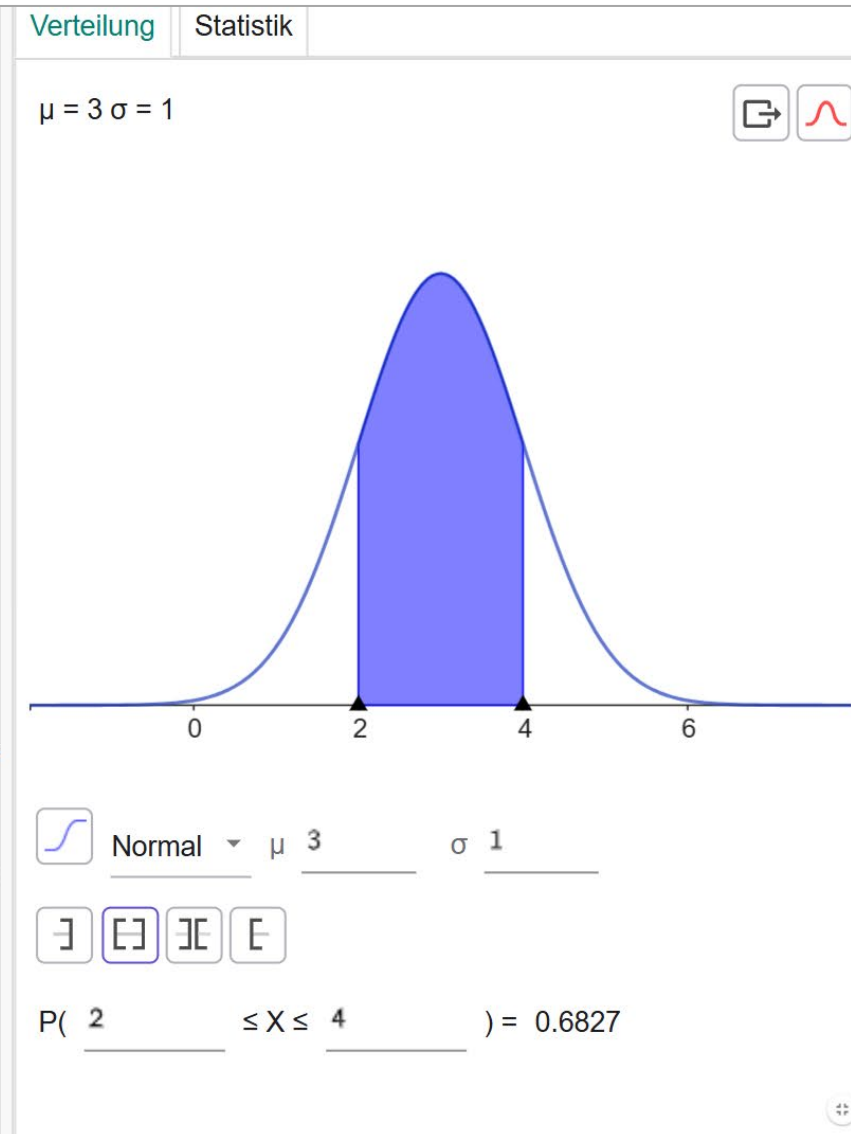
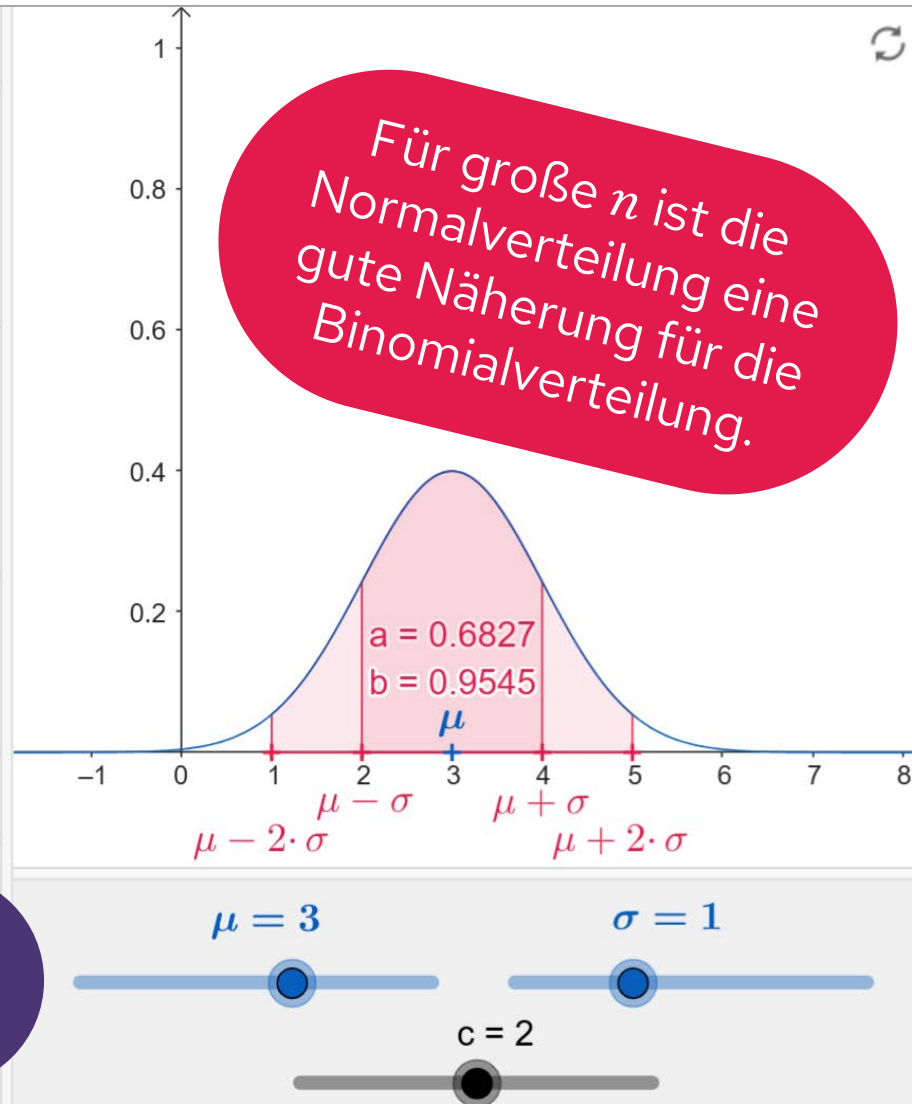
$a = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} NV(x) dx$

$= 0.6827$

$b = \int_{\mu-c\sigma}^{\mu+c\sigma} NV(x) dx$

$= 0.9545$

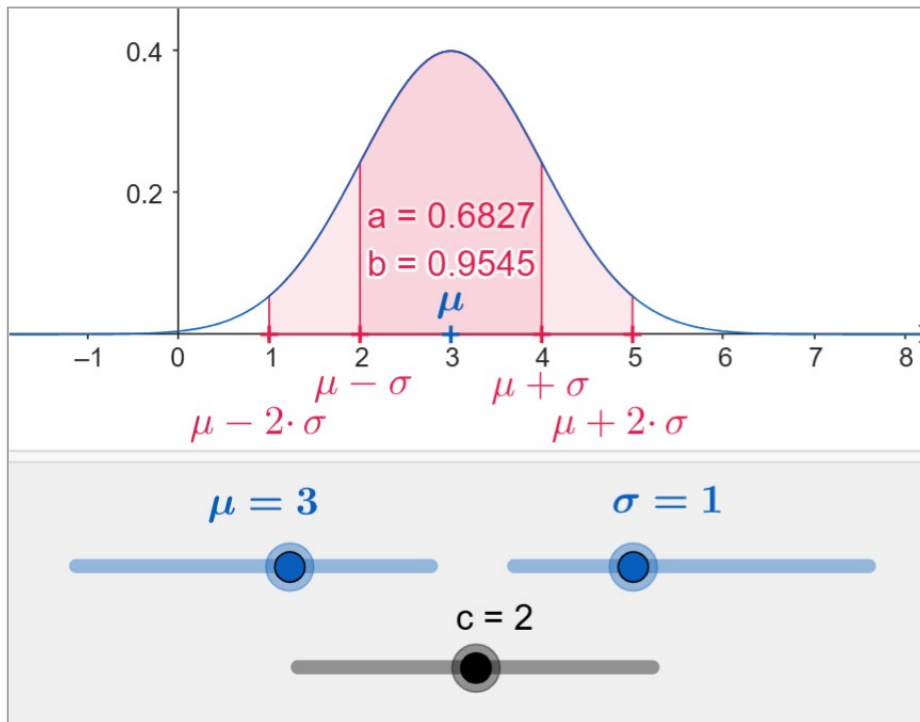
Aufgabe: Erkunden Sie Eigenschaften der Normalverteilung anhand der GeoGebra-Datei.



Sigma-Regeln (empirisch bestimmt)

Hier wird folgende Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von c untersucht:

$$P(\mu - c \cdot \sigma \leq X \leq \mu + c \cdot \sigma) \\ = \int_{\mu - c \cdot \sigma}^{\mu + c \cdot \sigma} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dx$$



Sigma-Regeln: Ist X eine normalverteilte Zufallsgröße, mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ so gilt:

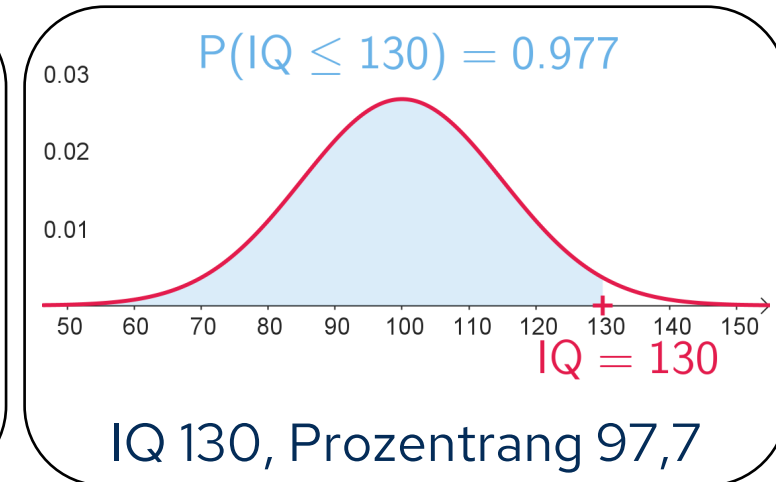
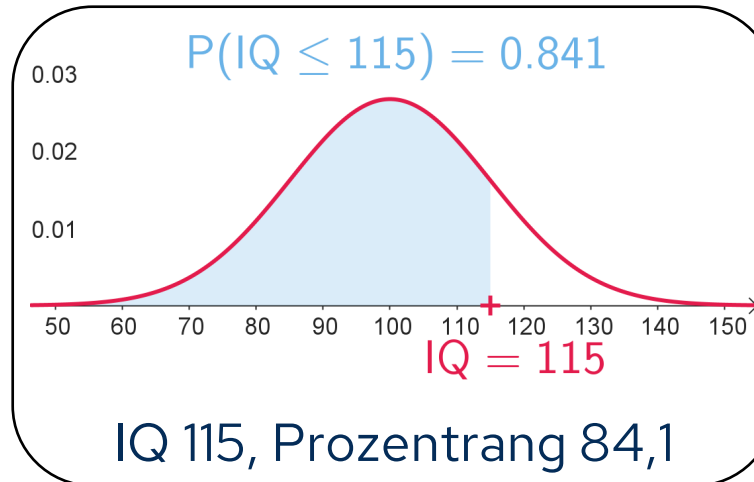
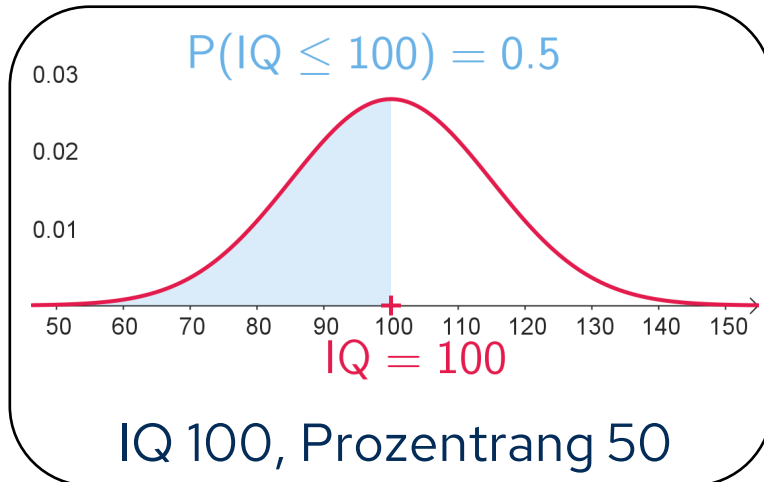
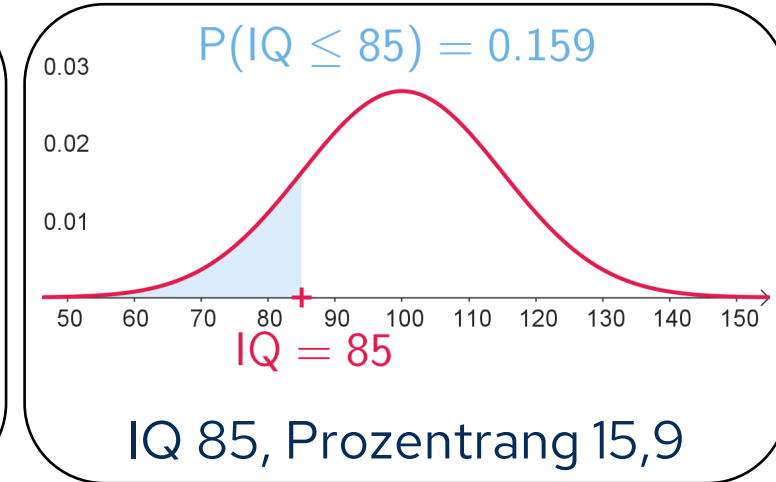
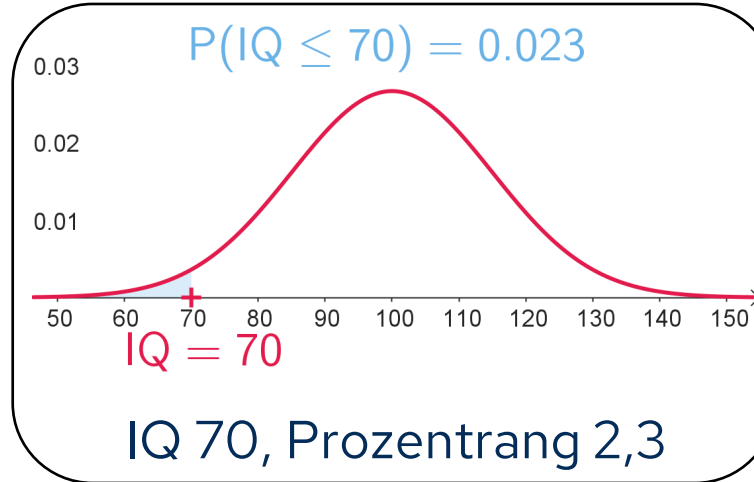
- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68,3 \%$
- $P(\mu - 1,64 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1,64 \cdot \sigma) \approx 90,0 \%$
- $P(\mu - 1,96 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1,96 \cdot \sigma) \approx 95,0 \%$
- $P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 95,4 \%$
- $P(\mu - 2,58 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2,58 \cdot \sigma) \approx 99,0 \%$
- $P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 99,7 \%$

Bemerkung

Die Laplace-Bedingung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} > 3$ muss erfüllt sein, damit man die Binomialverteilung durch die Normalverteilung annähern kann. In diesem Fall gelten die Sigma-Regeln näherungsweise auch für die Binomialverteilung.

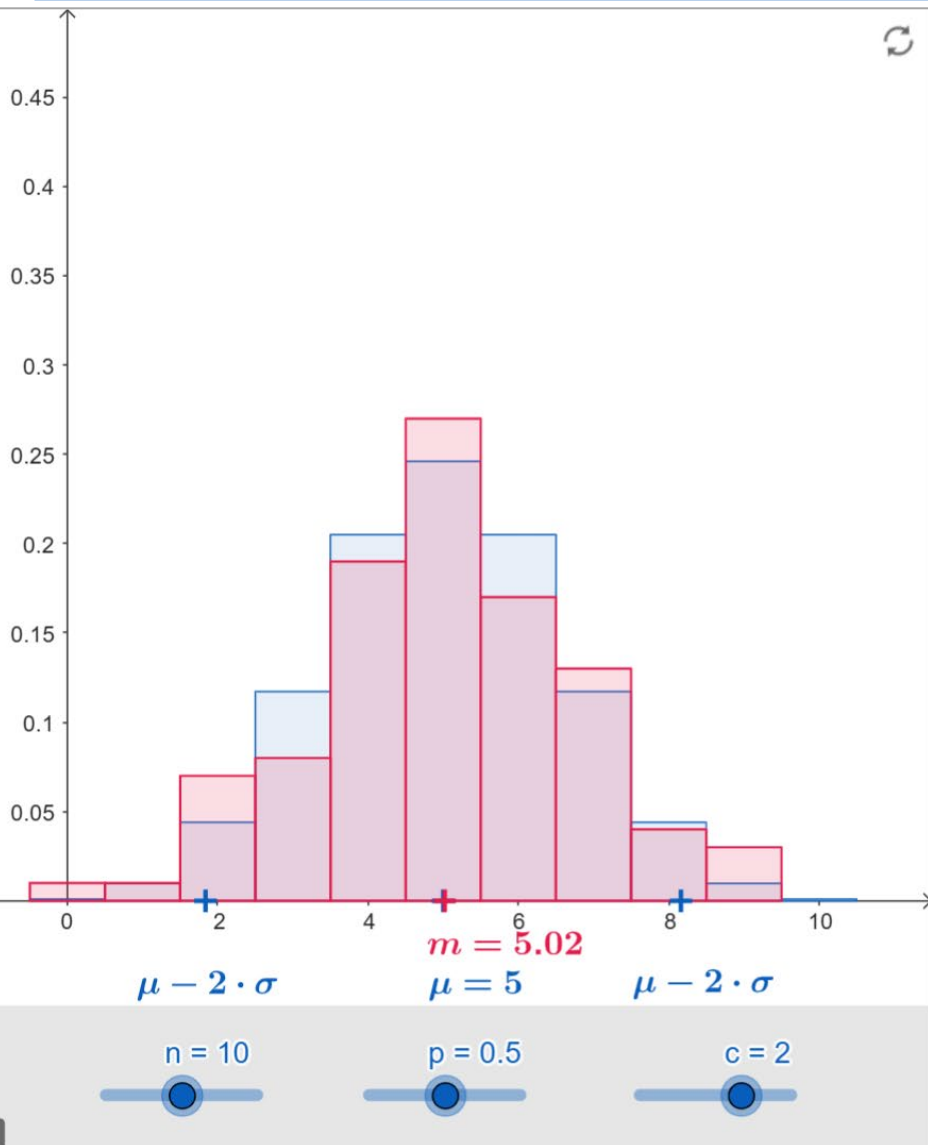
Exkurs: Intelligenztests

Bei Intelligenztests, die eine IQ-Norm verwenden, wird anhand der Verteilung der Testergebnisse einer großen Stichprobe der Normwert unter **Annahme einer Normalverteilung der Intelligenz** ermittelt und in eine Skala mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ und der Standardabweichung $\sigma = 15$ umgerechnet.

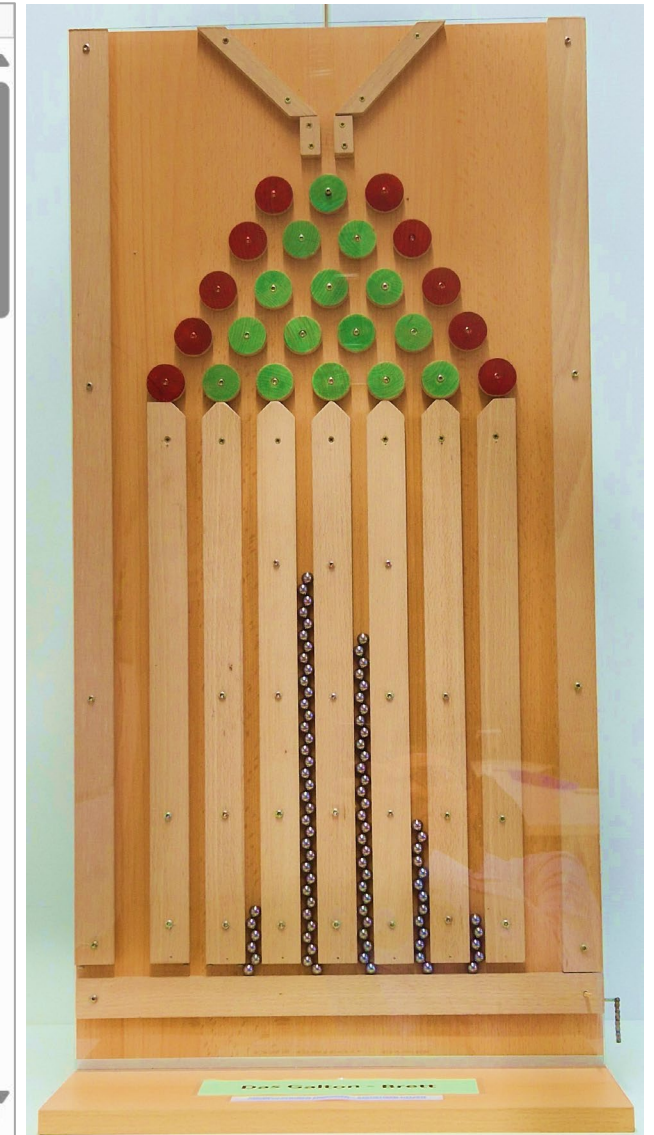


Binomialverteilung

Vergleich Modell ↔ Wirklichkeit



	A	B	C	D
1		Anzahl der Kugeln		
2		100		
3				
4	k	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	B(n,p)
5	0	1	0.01	0
6	1	1	0.01	0.01
7	2	7	0.07	0.04
8	3	8	0.08	0.12
9	4	19	0.19	0.21
10	5	27	0.27	0.25
11	6	17	0.17	0.21
12	7	13	0.13	0.12
13	8	4	0.04	0.04
14	9	3	0.03	0.01
15	10	0	0	0
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				



R

TU
P
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Kapitel 4:

Beurteilende Statistik

- 4.1 Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung
- 4.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion
- 4.3 Prognose- und Konfidenzintervall**
- 4.4 Hypothesentest
- 4.5 Ausgewählte Unterrichtsvorschläge

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-stochastik

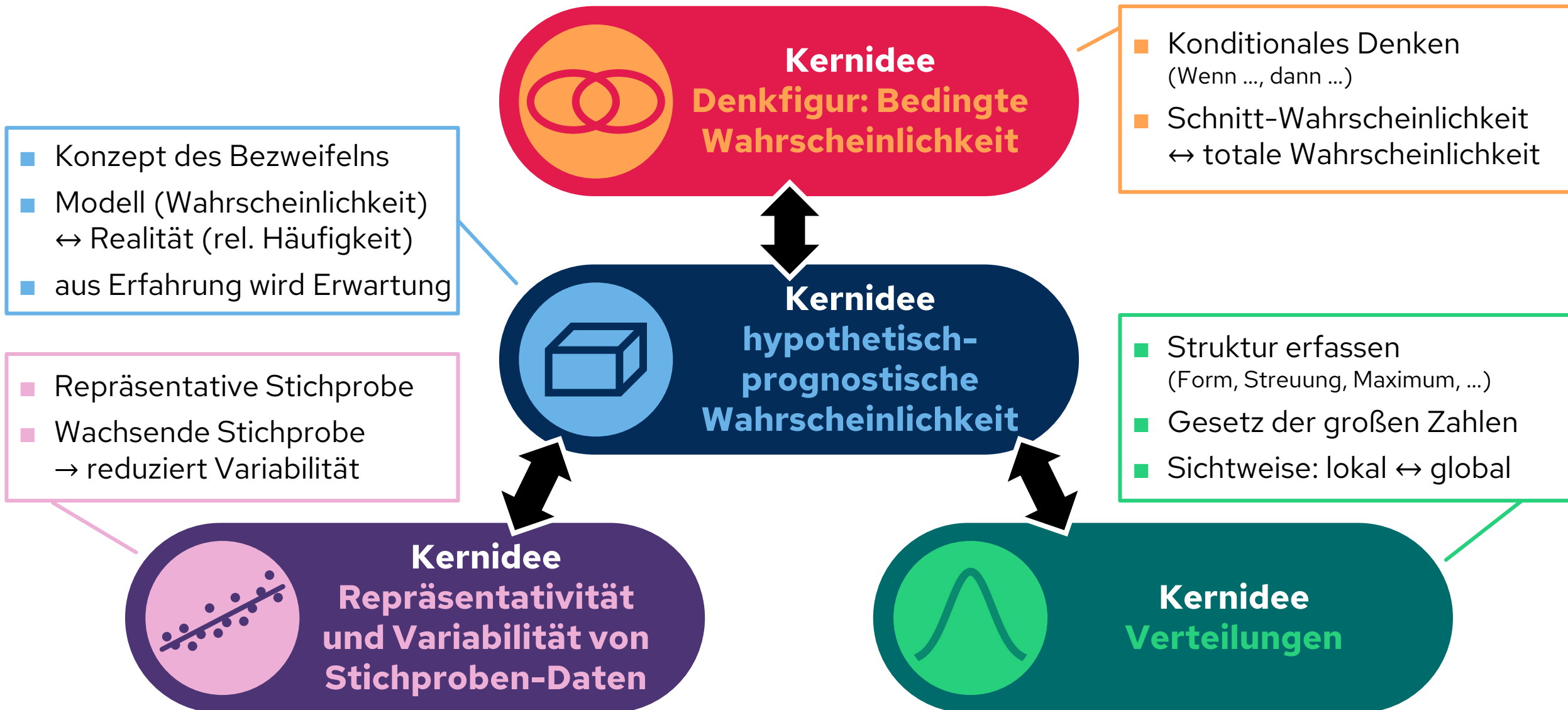
RPTU



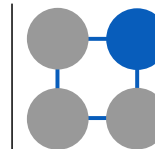
GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
<https://roth.tel/stochastik>

Kernideen im Fokus

bei Prognose- und Konfidenzintervall



	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
14.	Den Begriff "Konfidenzintervall" und das Verfahren zur Bestimmung eines Konfidenzintervalls für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit verstehen (5.07e)	
15.	Den Zusammenhang zwischen dem Stichprobenumfang und der Länge des Konfidenzintervalls verstehen (5.06g, 5.07e)	
16.	Sachaufgaben zu Konfidenzintervallen lösen und die Ergebnisse interpretieren (5.07e)	



	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1.	Verstehen, wie man Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise mit Hilfe der Gaußschen Integralfunktion Φ (Standard-Normalverteilung) bestimmt (5.09e, 5.10e)	Die Möglichkeit der Approximation soll anschaulich, z.B. anhand von Histogrammen, einsichtig gemacht werden. Hierfür empfiehlt sich der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms. Die Bestimmung der Näherungswerte erfolgt mit Hilfe von Tabellen oder Rechnern.
2.	Den Begriff "Konfidenzintervall" verstehen und wissen, wie man ein Konfidenzintervall für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit bestimmt (5.07e).08e)	Zentrales Anliegen des Wahlpflichtgebiets "Schätzen von Wahrscheinlichkeiten" ist es, dass die SuS das Verfahren zur Bestimmung von Konfidenzintervallen verstehen und zum Lösen von Sachproblemen aus unterschiedlichen Bereichen anwenden. Dabei erfährt der Wahrscheinlichkeitsbegriff eine Erweiterung und Vertiefung. Als Voraussetzung wird eine Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise zu ermitteln, bereitgestellt.
3.	Den Zusammenhang zwischen dem Stichprobenumfang und der Länge des Konfidenzintervalls verstehen (5.06g, 5.07e)	
4.	Sachaufgaben zu Konfidenzintervallen lösen und die Ergebnisse interpretieren (5.06g, 5.07e)	

Prognoseintervall

- Ein 95%-Prognoseintervall zu einer **Trefferwahrscheinlichkeit p** ist ein Intervall, in das die zufällige **Trefferanzahl X** bzw. die zufällige **relative Trefferhäufigkeit $h = \frac{X}{n}$** bei einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Wahrscheinlichkeit 95% fällt.
- Mit einem **Prognoseintervall** schließt man vom Modell (der Wahrscheinlichkeit p) auf die Wirklichkeit (die relative Häufigkeit h).

Modell (p) $\rightarrow$ Wirklichkeit (h)

Bernoulli-Kette

Wenn n gleichartige, voneinander unabhängige Bernoulli-Experimente hintereinander ausgeführt werden, dann nennt man das eine **Bernoulli-Kette** der Länge n .

Konfidenzintervall

- Das Konfidenzintervall zu einer **relativen Häufigkeit h** enthält alle Wahrscheinlichkeiten p , die nach Beobachtung von h nicht bezweifelt werden müssen.
- Das Konfidenzintervall enthält also alle Wahrscheinlichkeiten p , in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.
- Mit einem **Konfidenzintervall** schließt man von der Wirklichkeit (der relativen Häufigkeit h) auf das Modell (die Wahrscheinlichkeit p).

Wirklichkeit (h) $\rightarrow$ Modell (p)

Satz: $\sqrt{n}$ -Gesetz der absoluten Häufigkeit

Prognoseintervall einer binomialverteilten Zufallsvariable „absolute Trefferhäufigkeit“ X

Bei einer Binomialverteilung mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ liegt die Trefferanzahl X mit ca. 95% Sicherheit im 2σ -Prognoseintervall.

$$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] = [n \cdot p - 2\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}; n \cdot p + 2\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}] \stackrel{*}{\subseteq} [n \cdot p - \sqrt{n}; n \cdot p + \sqrt{n}]$$

Satz: $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz der relativen Häufigkeit

Prognoseintervall einer binomialverteilten Zufallsvariable „relative Trefferhäufigkeit“ $h = \frac{X}{n}$

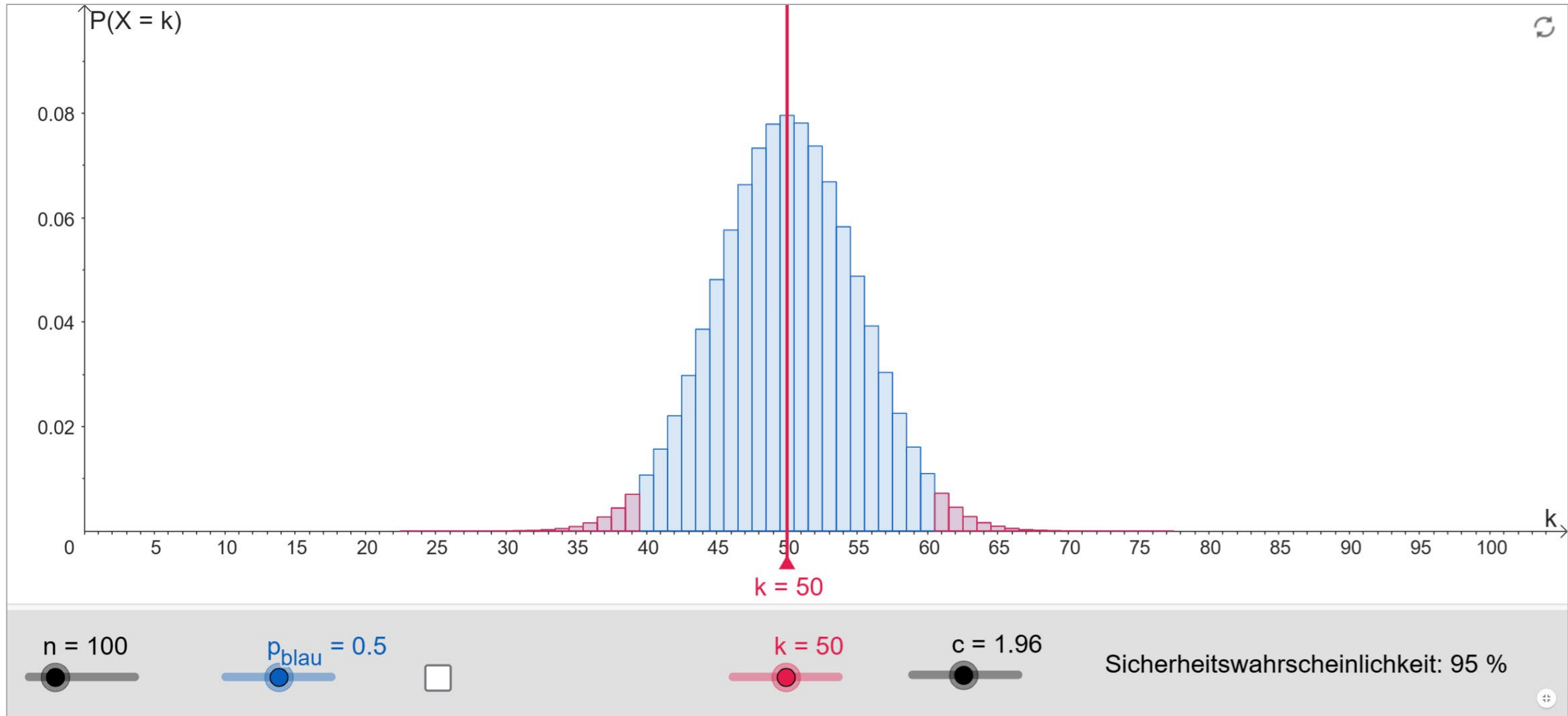
Bei gegebener Trefferwahrscheinlichkeit p einer Binomialverteilung liegt die relative Trefferhäufigkeit $h = \frac{X}{n}$ mit ca. 95% Sicherheit im Prognoseintervall.

$$\left[\frac{\mu}{n} - 2 \frac{\sigma}{n}, \frac{\mu}{n} + 2 \frac{\sigma}{n} \right] = \left[p - 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1 - p)}}{\sqrt{n}}; p + 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1 - p)}}{\sqrt{n}} \right] \stackrel{*}{\subseteq} \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

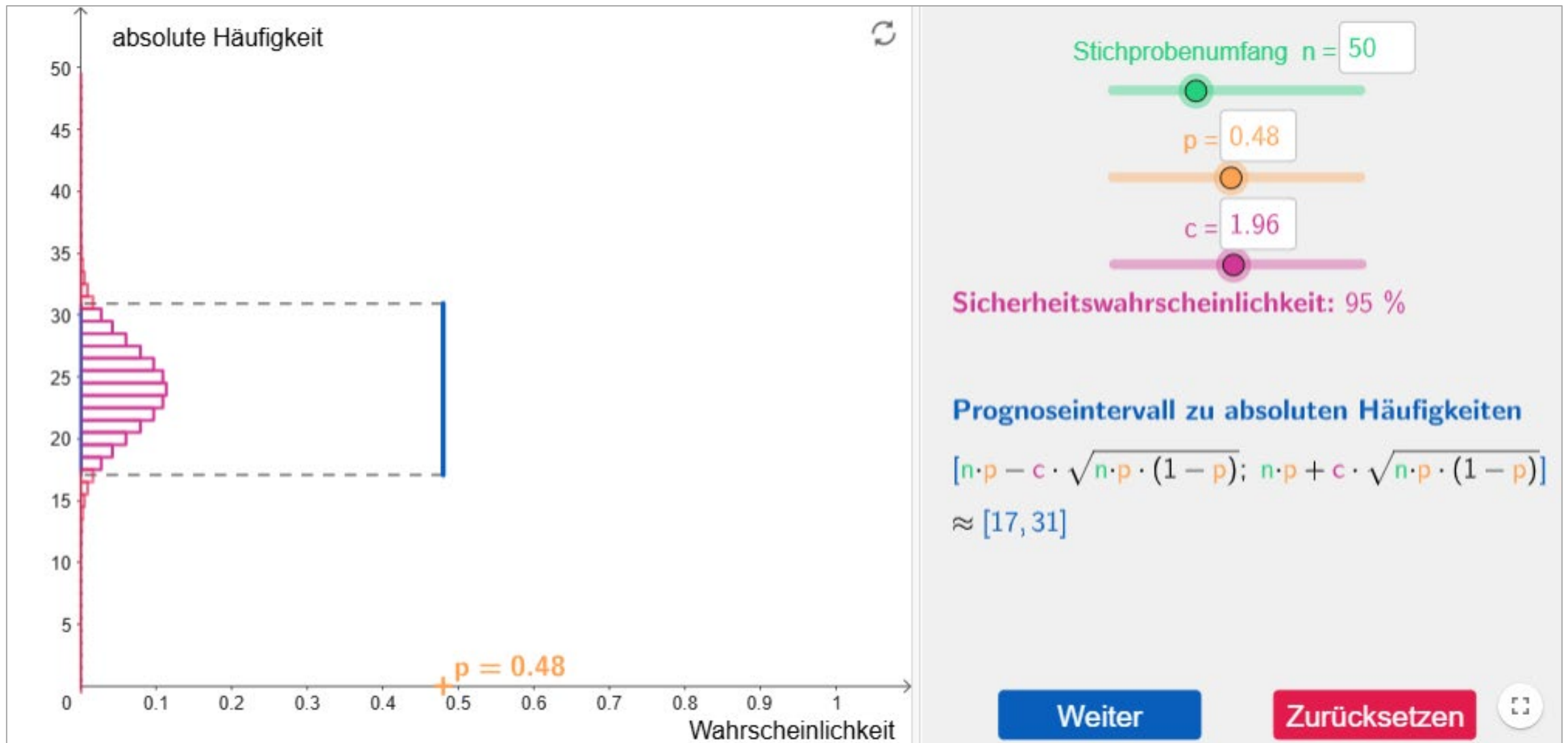
Die Länge des Prognoseintervalls nimmt umgekehrt proportional mit der Wurzel aus der Länge n der Bernoulli-Kette ab. Sie halbiert sich, wenn man n vervierfacht.

dividieren
durch n

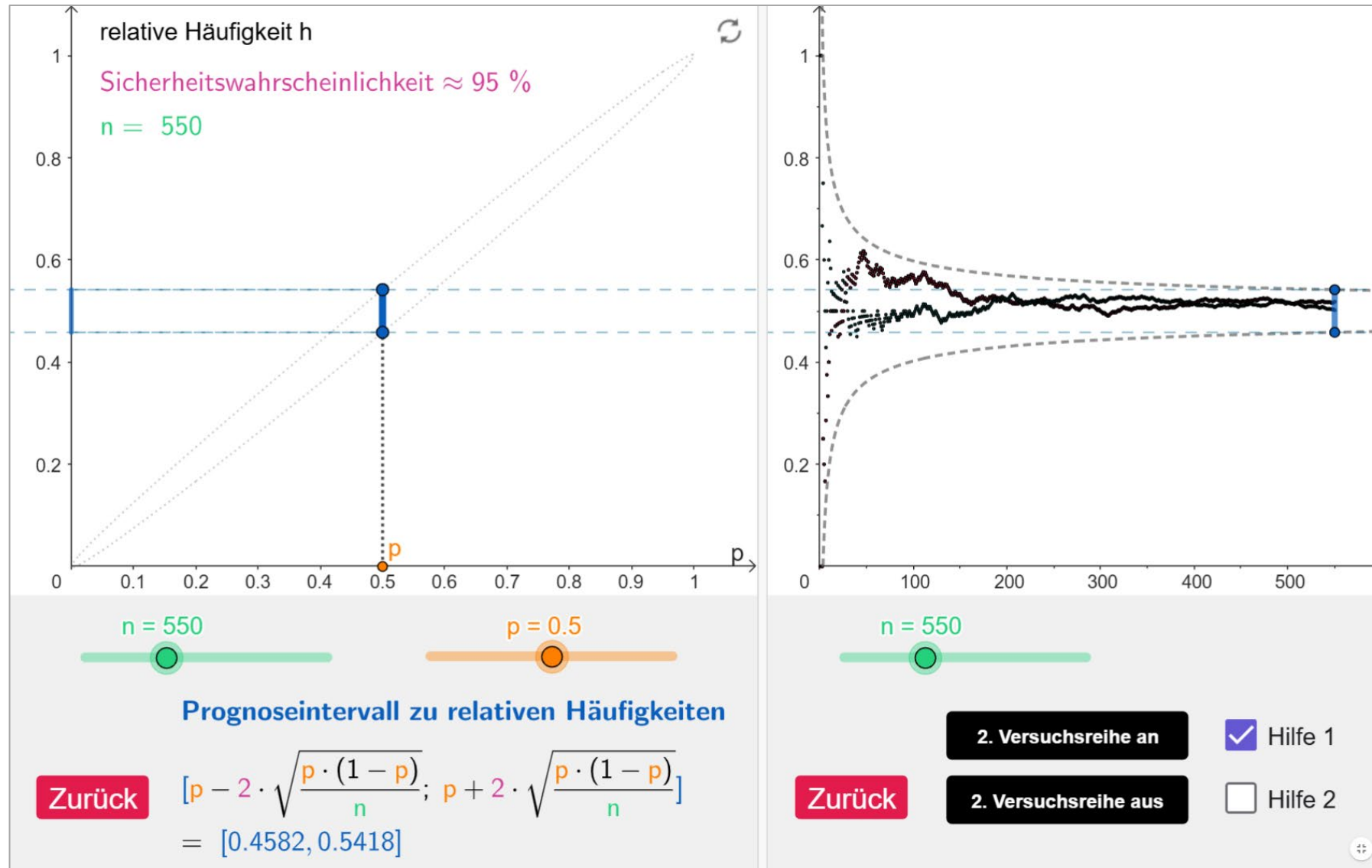
Prognoseintervall

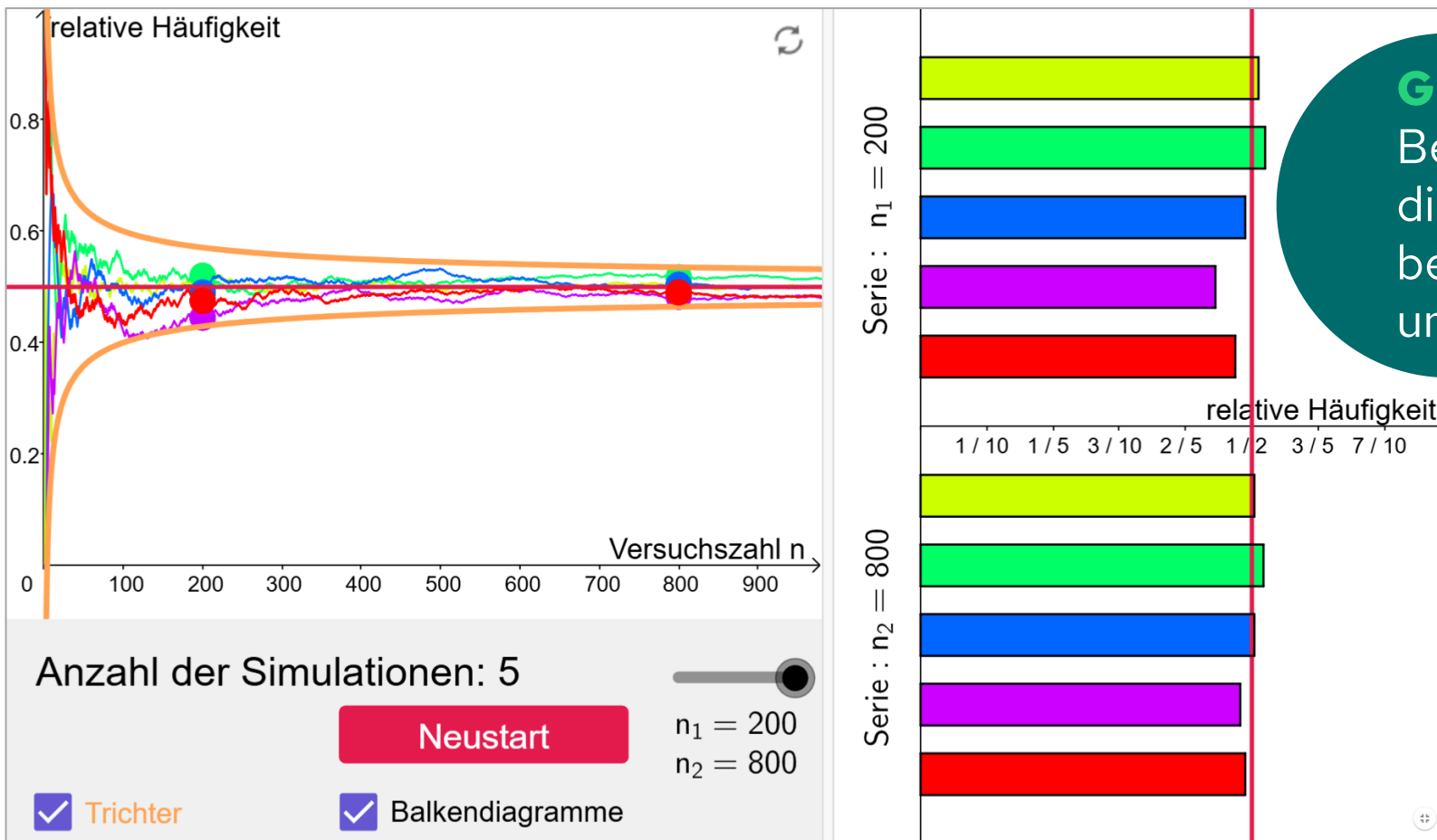


Ellipsendiagramm verstehen



Ellipsendiagramm – Prognoseintervall





Gesetz der großen Zahlen

Bei Zufallsexperimenten pendeln sich die relativen Häufigkeiten für Ereignisse bei ausreichend großem n immer wieder um in etwa die gleiche Zahl ein.

Einen ausgearbeiteten Unterrichtsvorschlag findet man in der MatheWelt „Zufällige Schwankungen untersuchen“ von Biehler et al. (2022).

Ellipsendiagramm – Prognoseintervall

$$\begin{aligned} f_{\text{plus}}(x) &= x + c \cdot \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \\ &= x + 2 \cdot \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{100}} \\ f_{\text{minus}}(x) &= x - c \cdot \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \\ &= x - 2 \cdot \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{100}} \end{aligned}$$

Prognoseintervall

$$\left[p - 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

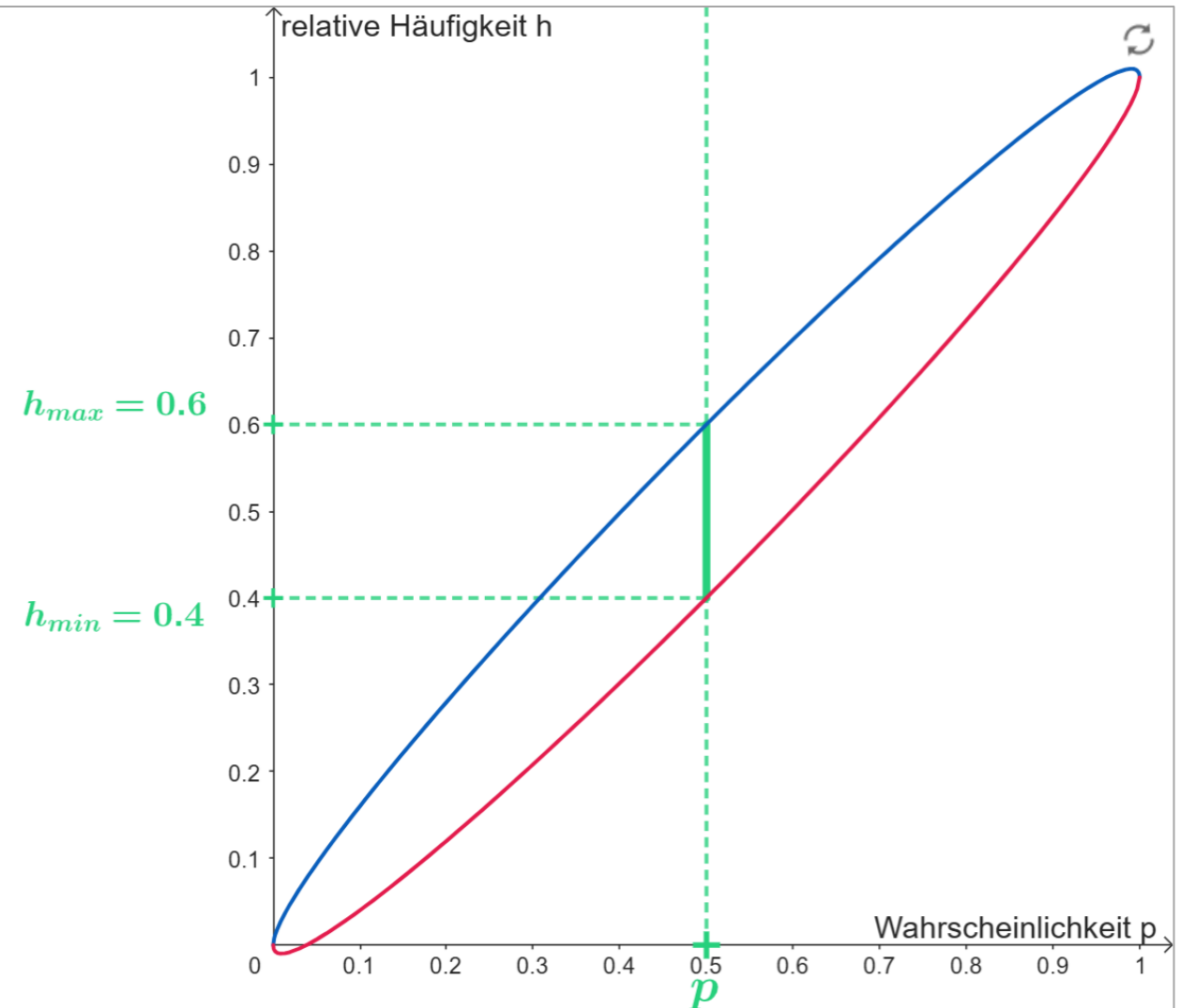
☒ Prognoseintervall

☐ Konfidenzintervall

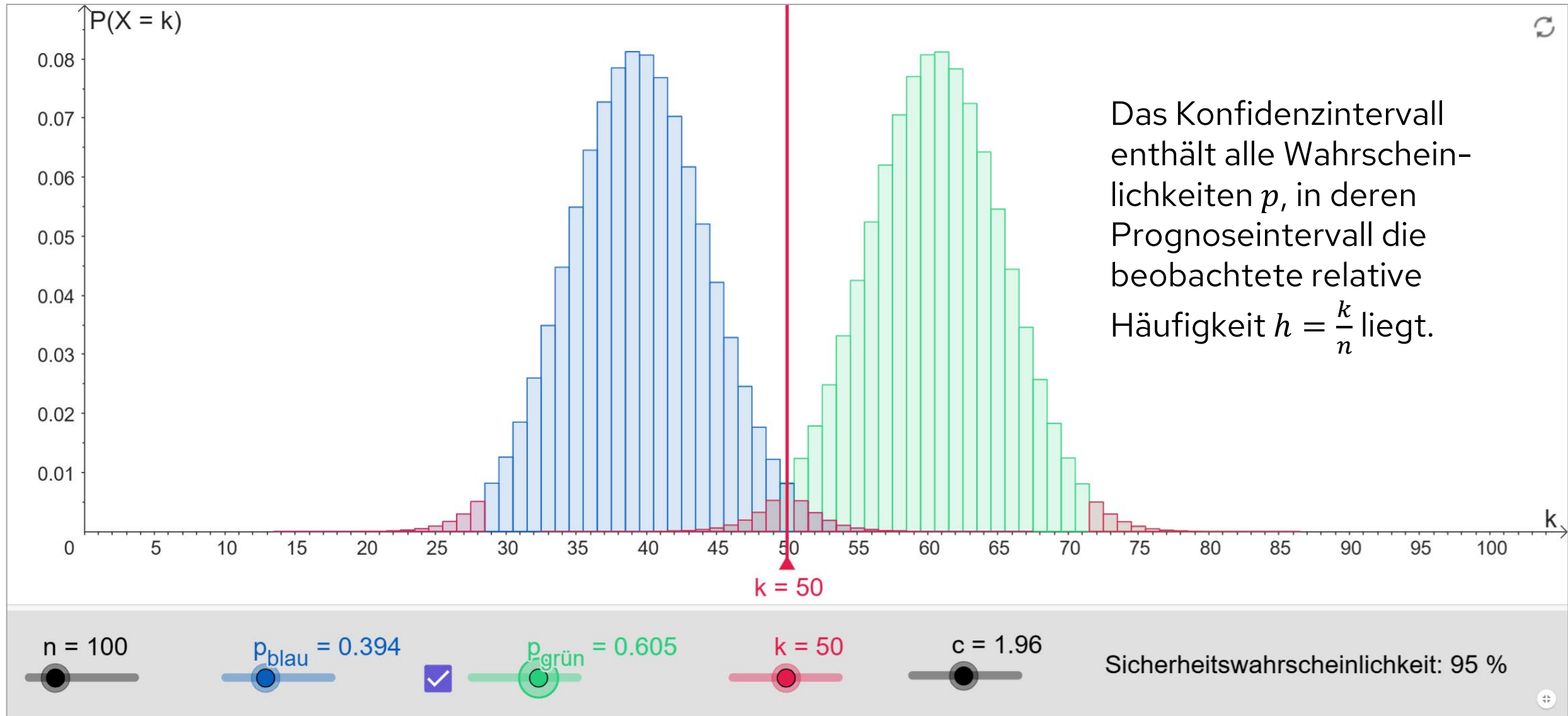
c = 2

n = 100

Bemerkung: Ersetzt man in den Termen der Intervallgrenzen 2 durch c, so lassen sich – entsprechend Folie 52 – auch andere Sicherheitswahrscheinlichkeiten realisieren.

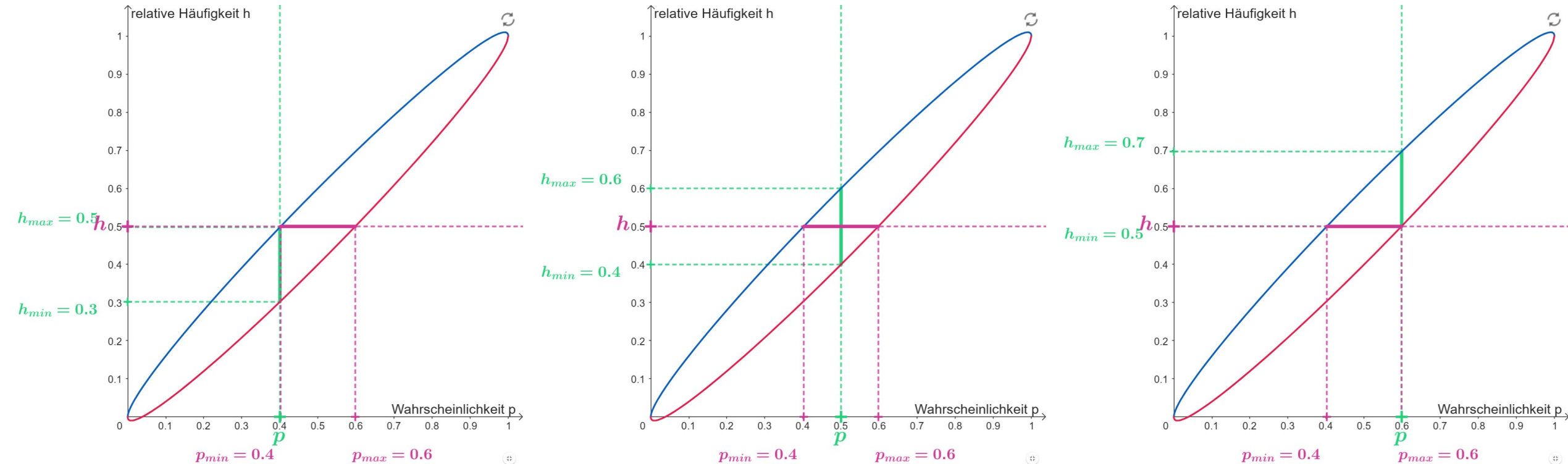


Konfidenzintervall



Ellipsendiagramm – Konfidenzintervall¹

Aufgabe: Welche Wahrscheinlichkeiten p müssen bei Beobachtung einer relativen Häufigkeit von $h = 0,5$ bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% bezweifelt werden?



Ergebnis: Es sollten alle Wahrscheinlichkeiten p bezweifelt werden, in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h nicht liegt. → Das Konfidenzintervall enthält alle Wahrscheinlichkeiten p , in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Ellipsendiagramm – Konfidenzintervall¹

Grenzen des Konfidenzintervalls bestimmen

- Ablesen am Ellipsendiagramm (vgl. Folie 67) oder
- (numerisches) Lösen folgender Gleichungen (*) und (**)
(Die rechten Seiten sind die Terme für die Grenzen des Prognoseintervalls.)

- Linke Grenze:
$$h = p + 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}} \quad (*)$$

- Rechte Grenze:
$$h = p - 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}} \quad (**)$$

Konfidenzintervall (exaktes Wilson-Intervall)

$$\left[\frac{h + \frac{2}{n} - 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{h \cdot (1-h)}{n}}}{\frac{4}{n} + 1}; \frac{h + \frac{2}{n} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{h \cdot (1-h)}{n}}}{\frac{4}{n} + 1} \right]$$

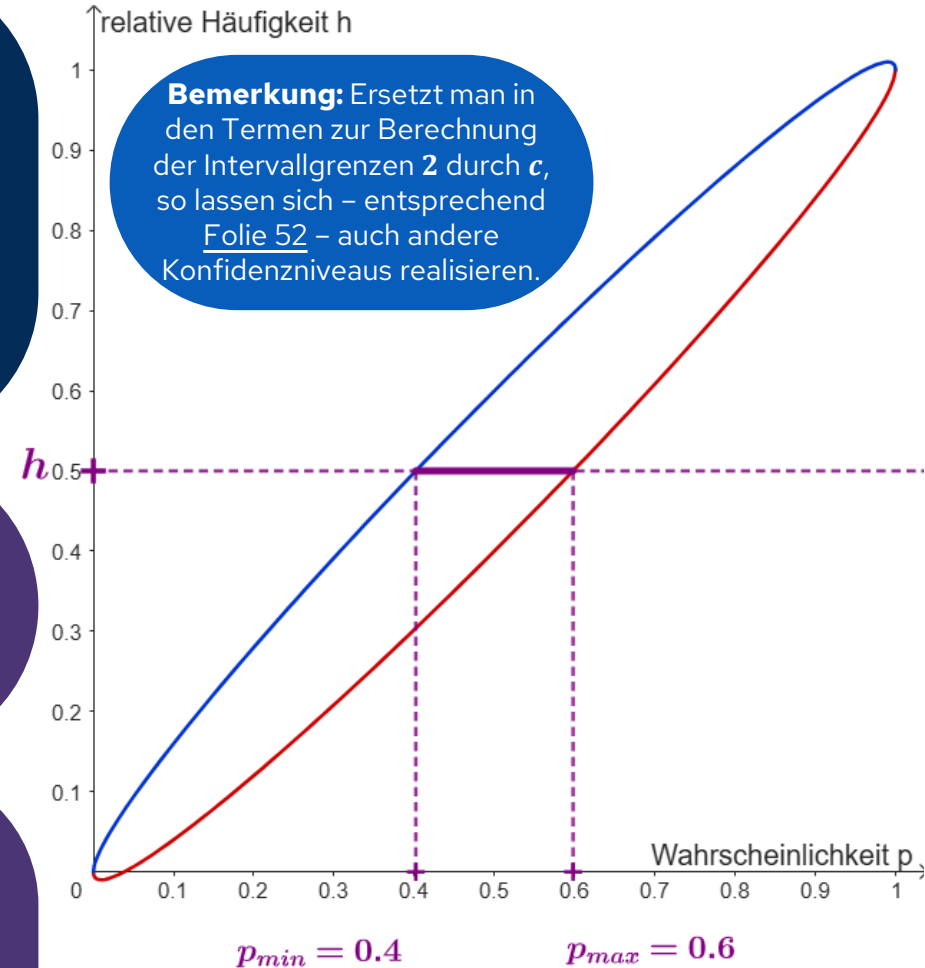
Erhältlich nach
Umformen von (*)
und (**) sowie Lösen
quadratischer Gleichungen (ggf. CAS)

Konfidenzintervall (Näherung für große n)

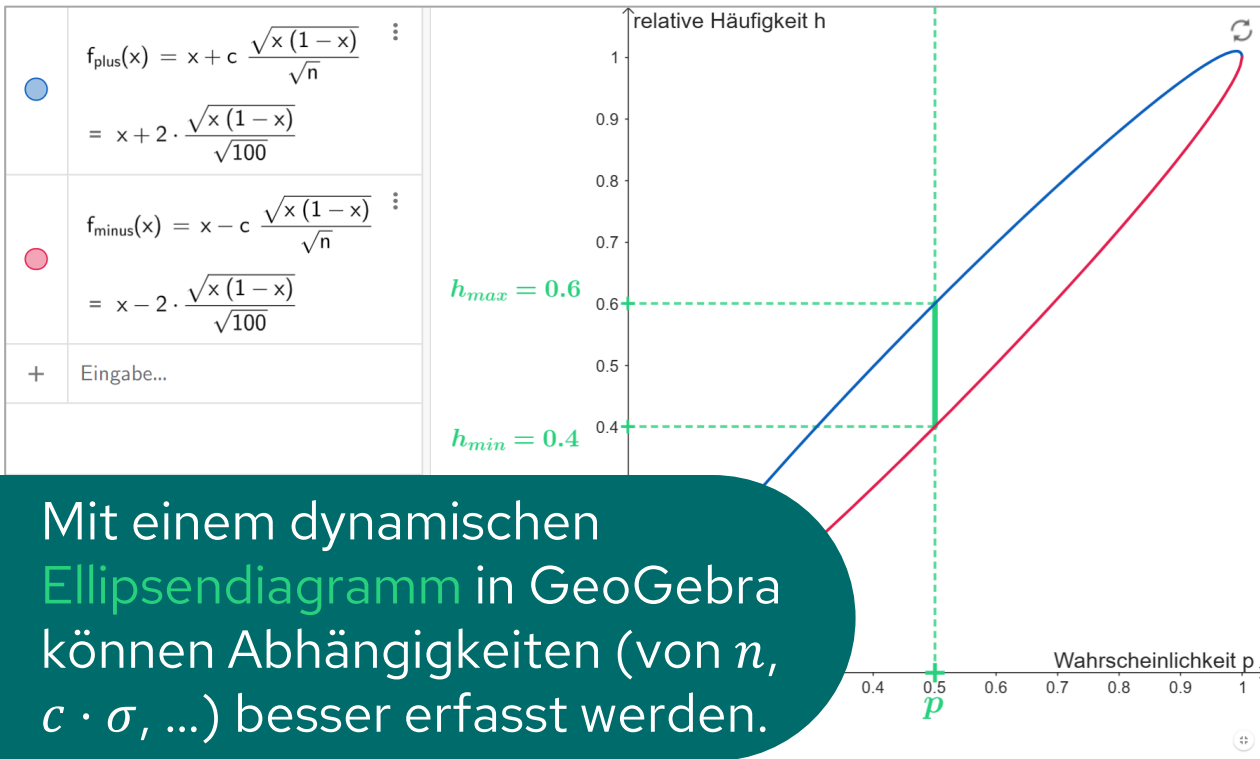
$$\left[h - 2 \cdot \frac{\sqrt{h \cdot (1-h)}}{\sqrt{n}}; h + 2 \cdot \frac{\sqrt{h \cdot (1-h)}}{\sqrt{n}} \right] \subseteq \left[h - \frac{1}{\sqrt{n}}; h + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Näherung: Wald-Intervall

Faustformel
für Überschläge



Prognoseintervall Ellipsendiagramm ↔ Tabellendarstellung



k \ p	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26
0	0,0003	0,0002	9E-05	5E-05	3E-05	1E-05	8E-06	4E-06	2E-06	1E-06	6E-07	3E-07
1	0,0029	0,0017	0,001	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	6E-05	3E-05	2E-05	1E-05	5E-06
2	0,0142	0,009	0,0056	0,0035	0,0021	0,0013	0,0008	0,0005	0,0003	0,0002	9E-05	5E-05
3	0,046	0,0312	0,0208	0,0137	0,0088	0,0057	0,0036	0,0022	0,0014	0,0008	0,0005	0,0003
4	0,1121	0,0808	0,0572	0,0399	0,0274	0,0185	0,0123	0,0081	0,0052	0,0033	0,0021	0,0013
5	0,2194	0,1677	0,1259	0,0929	0,0673	0,048	0,0337	0,0233	0,0159	0,0107	0,007	0,0046
6	0,3613	0,2919	0,2314	0,1801	0,1376	0,1034	0,0764	0,0555	0,0397	0,028	0,0194	0,0132
7	0,5188	0,4406	0,3672	0,3004	0,2413	0,1904	0,1477	0,1126	0,0844	0,0623	0,0453	0,0324
8	0,6681	0,5929	0,5168	0,4424	0,372	0,3073	0,2495	0,1991	0,1563	0,1206	0,0916	0,0684
9	0,7911	0,7282	0,6597	0,5878	0,5151	0,4437	0,3759	0,313	0,2564	0,2066	0,1637	0,1276
10	0,8801	0,8339	0,7797	0,7187	0,6527	0,5836	0,5136	0,4448	0,379	0,3178	0,2622	0,2129
11	0,9372	0,9071	0,8691	0,8232	0,77	0,7107	0,6467	0,5799	0,5122	0,4456	0,3816	0,3218
12	0,9699	0,9525	0,9286	0,8978	0,8595	0,8139	0,7617	0,7037	0,6415	0,5767	0,511	0,4461
13	0,9868	0,9777	0,9643	0,9456	0,9209	0,8894	0,851	0,8058	0,7544	0,6977	0,637	0,5739
14	0,9947	0,9904	0,9836	0,9734	0,9589	0,9393	0,9138	0,8819	0,8435	0,7987	0,7481	0,6925
15	0,9981	0,9962	0,993	0,988	0,9803	0,9692	0,9538	0,9335	0,9074	0,8753	0,8369	0,7925
16	0,9993	0,9986	0,9973	0,995	0,9913	0,9856	0,9771	0,9653	0,9492	0,9282	0,9017	0,8694
17	1	1	0,999	0,9981	0,9964	0,9937	0,9895	0,9832	0,9741	0,9616	0,9449	0,9234
18	1	1	1	0,9993	0,9987	0,9975	0,9955	0,9925	0,9878	0,9809	0,9713	0,9582
19	1	1	1	1	1	0,9991	0,9982	0,9969	0,9946	0,9912	0,9861	0,9788

Verknüpfung zur algebraischen Darstellung der Intervalle beim Ellipsendiagramm deutlicher.

Ablesen von Tabellen ist auch unreflektiert und unverstanden möglich. → Eher problematisch.

Aktuelle Werkzeugkompetenz ist der Umgang mit digitalen Werkzeugen wie z. B. GeoGebra.

Papier-Tabellen ablesen keine aktuell relevante Werkzeug-Kompetenz mehr (nur noch historisch).

Prognoseintervall

- Prognoseintervalle enthalten relative Häufigkeiten.
- Prognoseintervalle sind symmetrisch zur Wahrscheinlichkeit p .
- Im Prognoseintervall zu einer bekannten Wahrscheinlichkeit p liegt die relative Häufigkeit h mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma = 95\%$.
- Man nennt $\gamma = 95\%$ **Sicherheitswahrscheinlichkeit**.
- Die Länge von Prognoseintervallen halbiert sich bei Vervierfachung des Versuchsumfangs.

Konfidenzintervall

- Konfidenzintervalle enthalten Wahrscheinlichkeiten.
- Wilson-Konfidenzintervalle sind nur für $h = 0,5$ symmetrisch zur relativen Häufigkeit h . Wald-Konfidenzintervalle sind stets symmetrische zu h .
- Das (zufallsabhängige) Konfidenzintervall zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h überdeckt die unbekannte (feste) Wahrscheinlichkeit p mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma = 95\%$.
- Man nennt $\gamma = 95\%$ **Konfidenzniveau** (oder **Vertrauenswahrscheinlichkeit**).
- Bei Vervierfachung des Versuchsumfangs halbieren sich Wilson-Konfidenzintervalle annähernd, Wald-Konfidenzintervalle genau.

Prognoseintervall $\leftrightarrow$ Konfidenzintervall

Prognoseintervall

Situation

Aufgrund empirischer Untersuchungen oder theoretischer Überlegungen bekannte Trefferwahrscheinlichkeit p in der Grundgesamtheit.

Ziel

Aussage darüber, welche absoluten Trefferanzahlen X bzw. relativen Trefferhäufigkeit h in einer Stichprobe mit der Trefferwahrscheinlichkeit p „verträglich“ sind.

Bekannt:
Trefferwahrscheinlichkeit p
in der
Grundgesamtheit

Modell (p)



Gesucht:
Prognoseintervall
Trefferanzahlen X
/ -häufigkeiten h
mit denen in einer
Stichprobe
zu rechnen ist.

Wirklichkeit (h)

Konfidenzintervall

Situation

In einer Stichprobe mit dem Umfang n tritt die Merkmalsausprägung mit der relativen Häufigkeit h auf.

Ziel

Aussage über die unbekannte Wahrscheinlichkeit p für das Eintreffen des Merkmals in der Grundgesamtheit.

Bekannt:
Relative Häufigkeit h
in der
Stichprobe

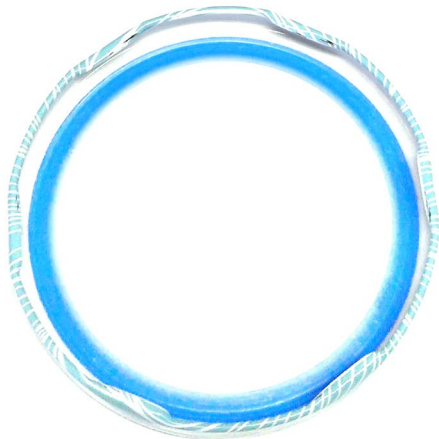
Wirklichkeit (h)



Gesucht:
Konfidenzintervall
Wahrscheinlichkeiten p
in der
Grundgesamtheit
die zu h passen.

Modell (p)

Stichprobe und Konfidenzintervall



R

TU
P
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Kapitel 4:

Beurteilende Statistik

- 4.1 Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung
- 4.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion
- 4.3 Prognose- und Konfidenzintervall
- 4.4 Hypothesentest**
- 4.5 Ausgewählte Unterrichtsvorschläge

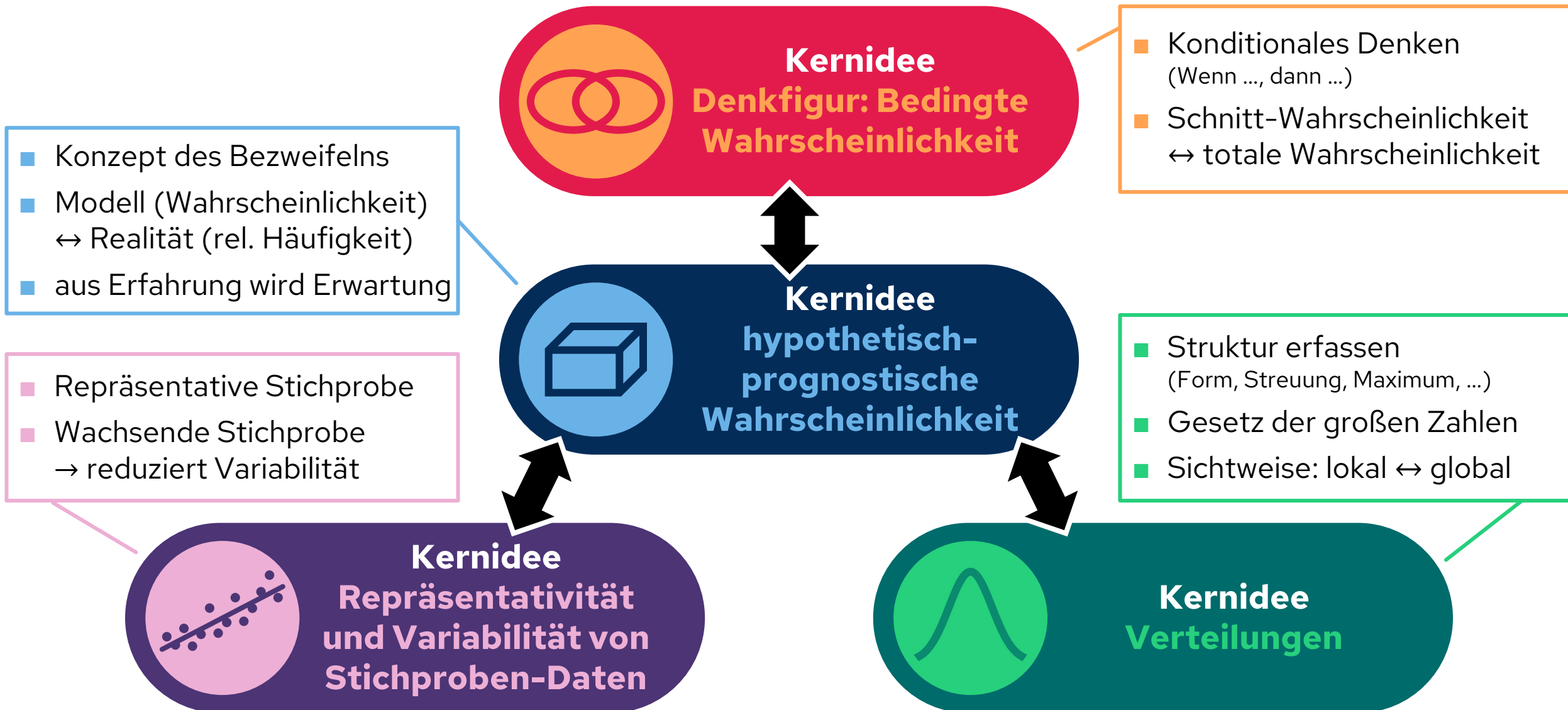


GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
<https://roth.tel/stochastik>

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-stochastik

RPTU

Kernideen im Fokus beim Hypothesentest



	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
17.	Die Struktur des Hypothesentests verstehen (5.08e)	
18.	Sachaufgaben zum Testen von Hypothesen lösen und die Ergebnisse interpretieren (5.08e)	Die Sachprobleme werden so vorgegeben, dass sie durch Binomialverteilungen modelliert werden können. Gegebenenfalls werden die Binomialverteilungen durch die Normalverteilung approximiert. Besondere Bedeutung kommt der Interpretation des Ergebnisses eines Hypothesentests zu. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler auch die Grenzen des Verfahrens erkennen. Zumindest einmal sollen die Schülerinnen und Schüler zu einem offen formulierten Sachproblem einen Hypothesentest entwerfen, gesuchte Größen berechnen und die Konsequenzen der Ergebnisse für den Sachverhalt erörtern. Im Leistungskurs soll dies weitgehend selbstständig in Gruppen- oder Partnerarbeit erfolgen.

Lehrplan RLP: Grundkurs

Wahlpflichtgebiet B2: Testen von Hypothesen

	Ziele / Inhalte (Sach- & Methodenkompetenz)	Hinweise zur Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1.	Das Vorgehen beim Testen von Hypothesen verstehen (5.08e)	Zentrales Anliegen des Wahlpflichtgebiets "Testen von Hypothesen" ist es, dass die Schüler/innen das Verfahren verstehen & zum Lösen von Sachproblemen aus unterschiedlichen Bereichen anwenden. Im Zusammenhang mit der Diskussion von Fehlerwahrscheinlichkeiten erfährt der Wahrscheinlichkeitsbegriff eine Erweiterung & Vertiefung.
2.	Verstehen, welche Fehlentscheidungen beim Hypothesentest auftreten können & wissen, wie man die Wahrscheinlichkeiten dafür ermittelt (5.08e)	
3.	Sachaufgaben zum Testen von Hypothesen lösen und die Ergebnisse interpretieren (5.08e)	Die Sachprobleme werden so vorgegeben, dass sie durch Binomialverteilungen modelliert werden können. Besondere Bedeutung kommt der Interpretation des Ergebnisses eines Hypothesentests zu. Dabei sollen die Schüler/innen auch die Grenzen des Verfahrens erkennen. Zumindest einmal sollen die Schüler/innen zu einem offen formulierten Sachproblem einen Hypothesentest entwerfen, gesuchte Größen berechnen und die Konsequenzen der Ergebnisse für den Sachverhalt erörtern. Die im Grundkurs hierfür angemessene Unterrichtsform ist in der Regel das Unterrichtsgespräch oder die angeleitete Gruppenarbeit.

Warum Hypothesentest im MU?

Klassischer Hypothesentest

Typische Methode der beurteilenden Statistik

Ziel mathematischer Bildung

Verständigen und reflektierten Umgang mit gängigen Methoden fördern

Problem

Testen von Hypothesen wird häufig als unverstandenes Schema abgearbeitet

Gegenmaßnahme

Stärkung des inhaltlich-anschaulichen Verstehens und Argumentierens

Probleme beim Hypothesentest

- Das Konzept ist anspruchsvoll
- Es werden schwierige Begriffe benötigt.
 - bedingte Wahrscheinlichkeit
 - Fehler 1. Art und 2. Art
 - Binomialverteilung, -koeffizient
 - ...
- Angemessene Interpretation der Ablehnungs- bzw. Entscheidungsbereiche selbst für Experten problematisch
- Realitätsbezug macht die Problemsituation eher komplexer also durchsichtiger
- Algebraisch auf Schulniveau berechenbare Fälle sind sehr beschränkt
→ **Binomialverteilung** oder **Black-Box-Formeln**



Chancen beim Hypothesentest

- Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden produktiv zusammengeführt.
 - Wiederholen, in Beziehung setzen und anwenden
 - **oder** aus Beurteilungssituationen herleiten
- Arbeitsweise von empirisch arbeitenden Wissenschaftlern exemplarisch erfahrbar:
 - Aufstellen von Hypothesen
 - Erproben im Experiment
 - Verwerfen bzw. vorläufiges Akzeptieren nach rationalen Kriterien

Ziel: Tragfähige Grundvorstellungen zum Hypothesentest aufbauen



Aufbau tragfähiger, inhaltlicher Begriffsvorstellungen

- Entschleunigung der Begriffsbildung
- Arbeiten mit vorläufigen Begriffen
- hohe Schüleraktivität
- Kein rezeptartiges Arbeiten!

Schwerpunkt: Inhaltlich-anschauliches Arbeiten

Formale, symbolische und algebraischer Elemente sehr dosiert verwenden!

Computerwerkzeuge

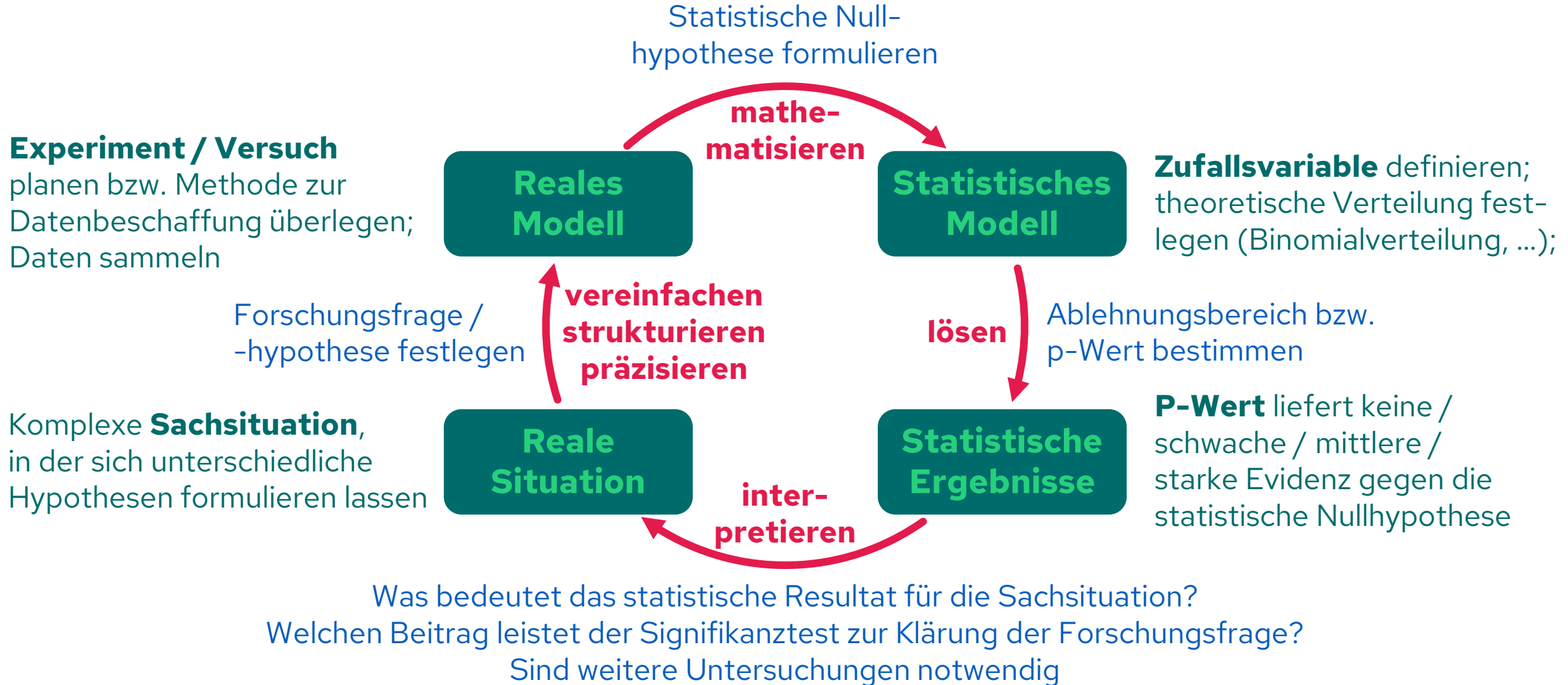
- Heuristisch und explorativ nutzen
- Umsetzung obiger Prinzipien



Schüler-
vorstellungen
und -erfahrungen
zum Zufall mit
Hypothesentests
überprüfen!

Schritt	Fachliche Beschreibung (Rückschauperspektive der „fertigen Mathematik“)	Inhaltlich-anschauliches Argumentieren aus Sicht der Schüler	Erwartete Schülertätigkeit bei der Erarbeitung eines Verfahrens
(1)	Hypothese H aufstellen und Versuchsausgang A beobachten (H oft Gegenteil der Vermutung)	Du behauptest der Würfel sei in Ordnung? Ich habe aber 6-mal die 6 gewürfelt.	Zu untersuchende Situation und konkurrierende Annahmen festlegen. Ausgang bestimmen.
(2)	Man fragt: Wenn H richtig ist, wie wahrscheinlich ist dann A ?	Wenn der Würfel in Ordnung wäre, wäre das zwar möglich, aber extrem unwahrscheinlich.	Berechnung oder Simulation einer erwarteten Verteilung, Beurteilung der möglichen Ausgänge nach der Wahrscheinlichkeit
(3)	Man nimmt unwahrscheinliche Ausgänge A zum Anlass, die Hypothese H zu verwerfen.	Also glaube ich dir nicht! Natürlich könnte ich mich irren und du hast doch Recht. Das ist aber extrem unwahrscheinlich.	Kriterien für eine Ablehnungs- entscheidung bestimmen; Beurteilung der Situation aus Sicht der getroffenen Annahmen

Modellierungsschritte beim Testen von Hypothesen



Vorgehensweise

- (1) Forschungsfrage formulieren und überprüfbar machen
- (2) Experiment planen und durchführen
- (3) Untersuchungsfrage aufstellen
- (4) Vermutete Zusammenhänge deskriptiv untersuchen
- (5) Empirische Verteilung simulieren
- (6) Empirische Verteilung darstellen
- (7) Kontrollierendes Verfahren zur Beurteilung erarbeiten



Genetische Erarbeitung

Das Verfahren des Hypothesentestens wird aus einer Problemsituation von Lernenden aktiv entwickelt.

Die dem Hypothesentesten zugrunde liegenden Argumentationsfiguren bilden den roten Faden der Schülererkundungen.

Nullhypothese: Einseitig ↔ Zweiseitig

Bemerkung: Ziele der Beteiligten sind nicht klar: Wollen z. B. Jugendschützer beruhigt schlafen, wünschen sie sich niedrige Messwerte unterhalb des Prognoseintervalls zu $p_0 = 0,05$, wollen sie erfolgreich klagen, wünschen sie sich Messwerte oberhalb des Prognoseintervalls.

Aufgabe

Eine Fabrik erzeugt Getränke mit einem Alkoholgehalt von 5 %. Dabei treten beim Alkoholgehalt Schwankungen auf. Die Hypothese H_0 , dass der Alkoholgehalt gleich dem Sollwert $p_0 = 0,05$ ist, soll anhand einer Stichprobe überprüft werden.

Aufgrund der Interessenlage der Personen, die die Untersuchung vornehmen, sind drei Fälle zu unterscheiden:

Die Überprüfung wird durchgeführt durch eine

- a) **Eichkommission**, die an einer Abweichung vom Sollwert $p_0 = 0,05$ sowohl nach unten als auch nach oben interessiert ist,
- b) **Verbraucherorganisation**, die daran interessiert ist, dass tatsächlich die 5 % Alkohol in den Flaschen sind. Sie stellt misstrauisch die Frage, ob der wahre Alkoholgehalt kleiner als der Sollwert ist,
- c) **Jugendschutzkommission**, die befürchtet, dass zu viel Alkohol in den Flaschen ist, um die Konsumenten möglichst schnell alkoholabhängig zu machen. Sie stellt ebenfalls misstrauisch die Frage, ob der wahre Alkoholgehalt größer als der Sollwert ist.

Die Interessenslagen führen zu folgenden Testverfahren:

- | | |
|---|------------|
| a) $H_0: p = p_0$
gegen
$H_1: p \neq p_0$ | zweiseitig |
| b) $H_0: p \leq p_0$
gegen
$H_1: p > p_0$ | einseitig |
| c) $H_0: p \geq p_0$
gegen
$H_1: p < p_0$ | einseitig |

Bemerkung: H_0 nennt man Nullhypothese,
 H_1 nennt man Alternativhypothese.

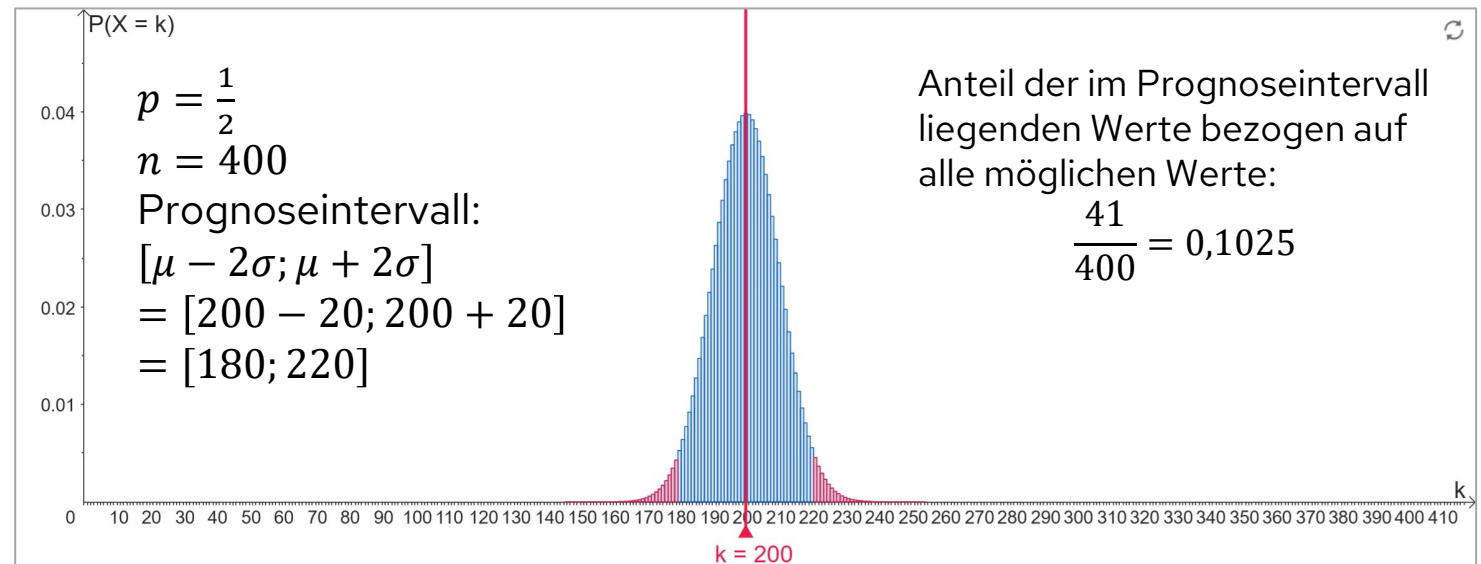
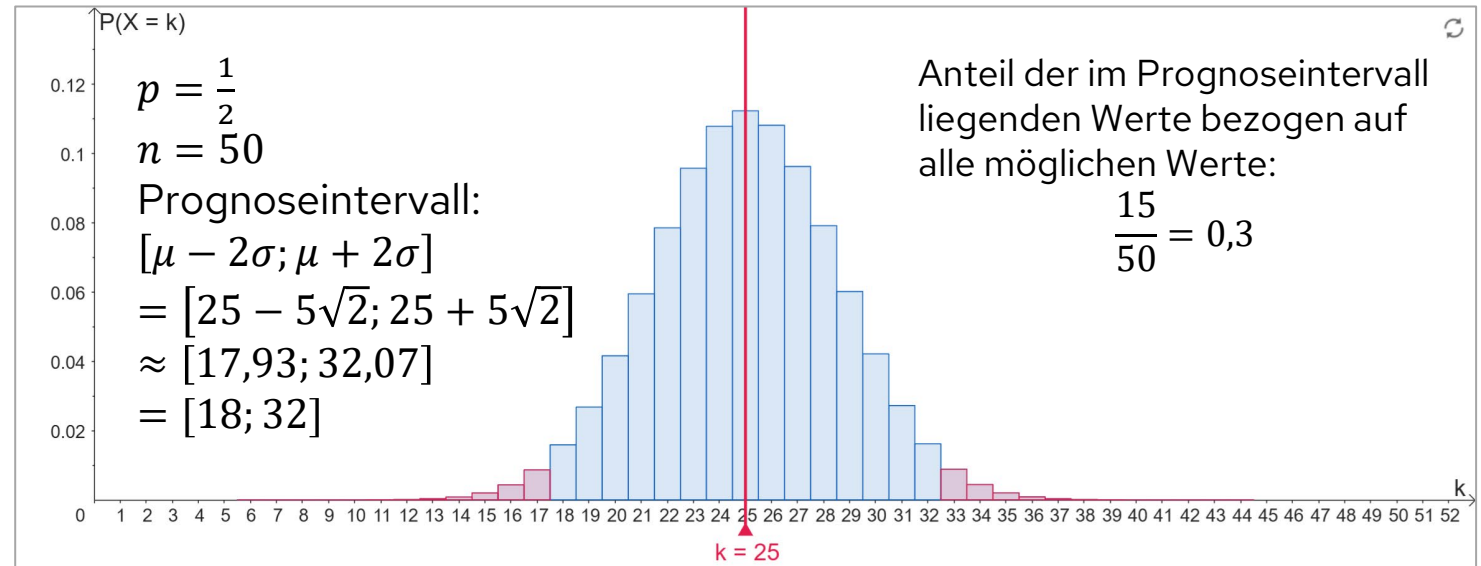
Signifikanztest: Einseitig ↔ Zweiseitig

Der Einfluss des Stichprobenumfangs n

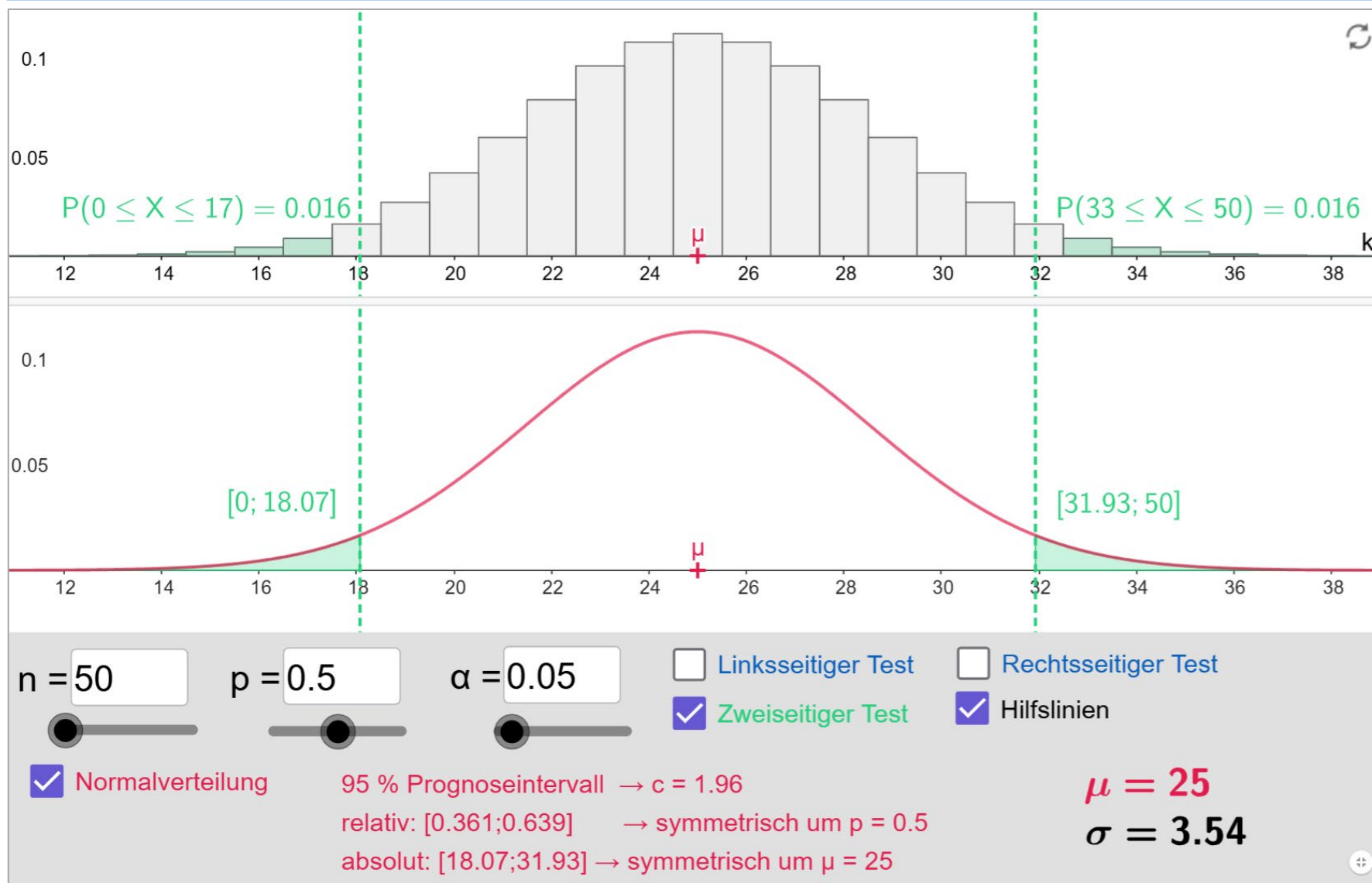
Bemerkungen: Bei einseitigen Tests ist zur Entschlüsselung von Standpunkten und Interessenlagen der zweiseitige Blick sehr hilfreich.

Der zweiseitige Blick auf einseitige Signifikanztests lässt den Einfluss des Stichprobenumfangs n hervortreten:

- Wenn n sehr groß ist, wird das Prognoseintervall sehr klein, d.h. der Anteil der im Prognoseintervall liegenden Werte bezogen auf alle möglichen Werte wird sehr klein.
- Wenn dann die Beobachtung ein wenig außerhalb des Prognoseintervalls liegt, sind die Abweichungen trotz statistischer Signifikanz inhaltlich in der Regel irrelevant.



Signifikanztest: Einseitig ↔ Zweiseitig



<https://geogebra.org/m/fpduh95y>

Einseitige Hypothesentests: Welche Seite soll es sein?

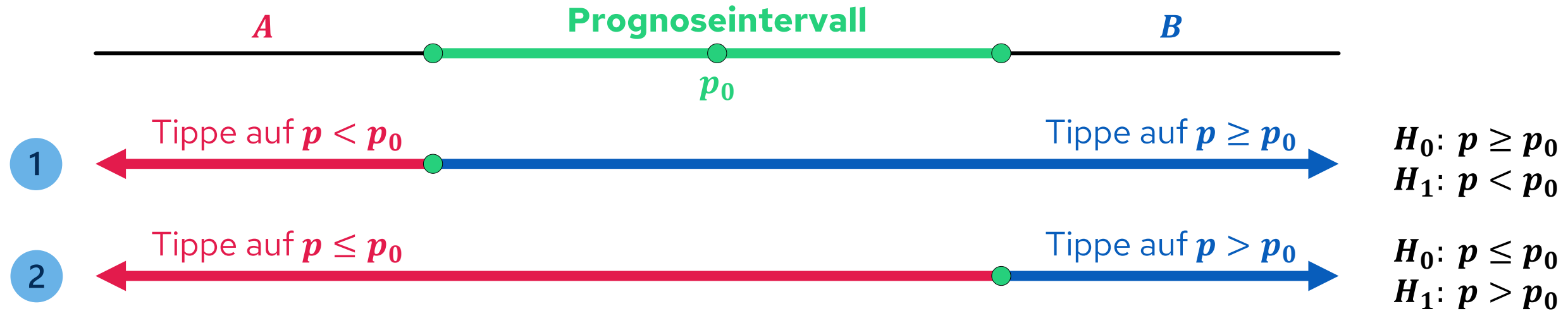
Einseitige Hypothesentests

Beim einseitigen Testen muss man sich unter Berücksichtigung der Kosten von Fehlentscheidungen für eines der Modelle **A**: $p \leq p_0$ oder **B**: $p \geq p_0$ entscheiden.

- Wenn das fälschliche Verwerfen von **B** mehr Kosten verursacht als das fälschliche Verwerfen von **A**, setzt man im Zweifel (wenn h im Prognoseintervall von p_0 liegt) auf **B**.
 - **B** wird zur konservativen Hypothese H_0 , von der man erst dann Abstand nimmt, wenn h sehr weit links liegt.
 - **Statistiker sagen:** Man testet linksseitig **B**, also $H_0: p \geq p_0$, gegen $H_1: p < p_0$.
- Wenn das fälschliche Verwerfen von **A** mehr Kosten verursacht als das fälschliche Verwerfen von **B**, setzt man im Zweifel (wenn h im Prognoseintervall von p_0 liegt) auf **A**.
 - **A** wird zur konservativen Hypothese H_0 , von der man erst dann Abstand nimmt, wenn h sehr weit rechts liegt.
 - **Statistiker sagen:** Man testet rechtsseitig **A**, also $H_0: p \leq p_0$ gegen $H_1: p > p_0$.

Bemerkung: H_0 nennt man Nullhypothese, H_1 nennt man Alternativhypothese.

Einseitige Hypothesentests: Welche Seite soll es sein?



Obere Zeile 1: Sollte ein falscher Tipp auf A (also das fälschliche Verwerfen von B) mehr Verlust bringen (negativere Konsequenzen haben) als ein falscher Tipp auf B , wird man mit dem Tippen auf A vorsichtig sein und im Zweifel bei $B: p \geq p_0$ bleiben, also nicht nur, wenn h oberhalb, sondern auch, wenn h im Prognoseintervall von p_0 liegt. Statistisch gesprochen wird B dann zur Nullhypothese H_0 und das Verfahren zum linksseitigen Test $H_0: p \geq p_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1: p < p_0$.

Untere Zeile 2: Wenn der falsche Tipp auf B (also das fälschliche Verwerfen von A) negativere Konsequenzen hat als der falsche Tipp auf A , bleibt man, wenn h im Prognoseintervall von p_0 liegt, bei $A: p \leq p_0$. A wird zur Nullhypothese H_0 . Man testet rechtsseitig $H_0: p \leq p_0$ gegen $H_1: p > p_0$.

Nullhypothese

„Die verlorenen Mädchen von Gorleben“

Biostatistik-Studie

In einer Studie beschreibt der Biostatistiker Hagen Scherb eine statistisch signifikante Abweichung im Geschlechterverhältnis Neugeborener rund um das Atommüll-Zwischenlager in Gorleben.

Er untersuchte den Anteil der Jungen bzw. Mädchengeburten nach dem Beginn der Einlagerung von Atommüll im Jahr 1996 in das Zwischenlager, das 2 km südlich von Gorleben liegt.

Scherb und seine Kollegen werten „die verlorenen Mädchen von Gorleben“ als Nachweis dafür, dass eine Strahlenbelastung stattgefunden hat. (Scherb et al. 2012)

Aufgabe

Untersuchen Sie, ob das Geschlechterverhältnis rund um Gorleben im Vergleich zu Deutschland tatsächlich statistisch signifikant verschoben ist. Nutzen Sie dazu folgende im Jahr 2011 vom Niedersächsischen Landesgesundheitsamt (NLGA) veröffentlichten Daten zu den Geburten in sämtlichen Gemeinden im 35 km-Umkreis um das Atommüll-Zwischenlager in Gorleben:

	1991-1995	1996-2009	Summe
Jungen	3477	10040	13517
Mädchen	3421	9169	12590
Summe	6898	19209	26107

Nullhypothese

„Die verlorenen Mädchen von Gorleben“

Passende Nullhypothese

Die Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt im 35 km-Umkreis um das Atom-müll-Zwischenlager Gorleben ist nach der Einlagerung des Atommülls gleich der Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt in Deutschland im selben Zeitraum:

$$H_0: P(\text{Jungengeburt}) = 0,513$$

Bemerkung

Die Zahl 0,513 ergibt sich als arithmetisches Mittel der Anteile für eine Jungengeburt in Deutschland in den Jahren 1996 bis 2009.

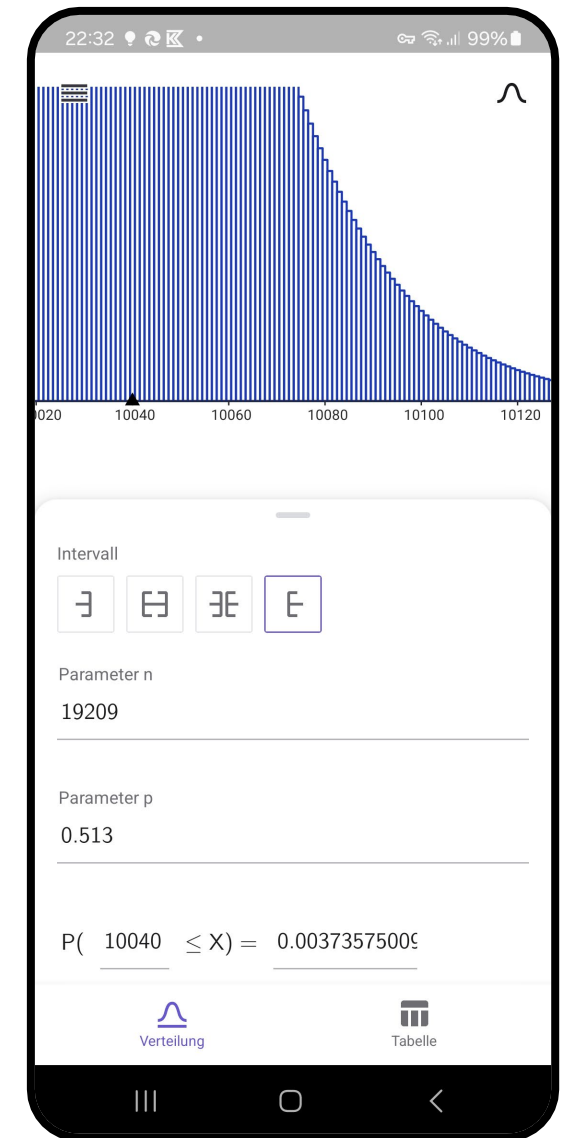
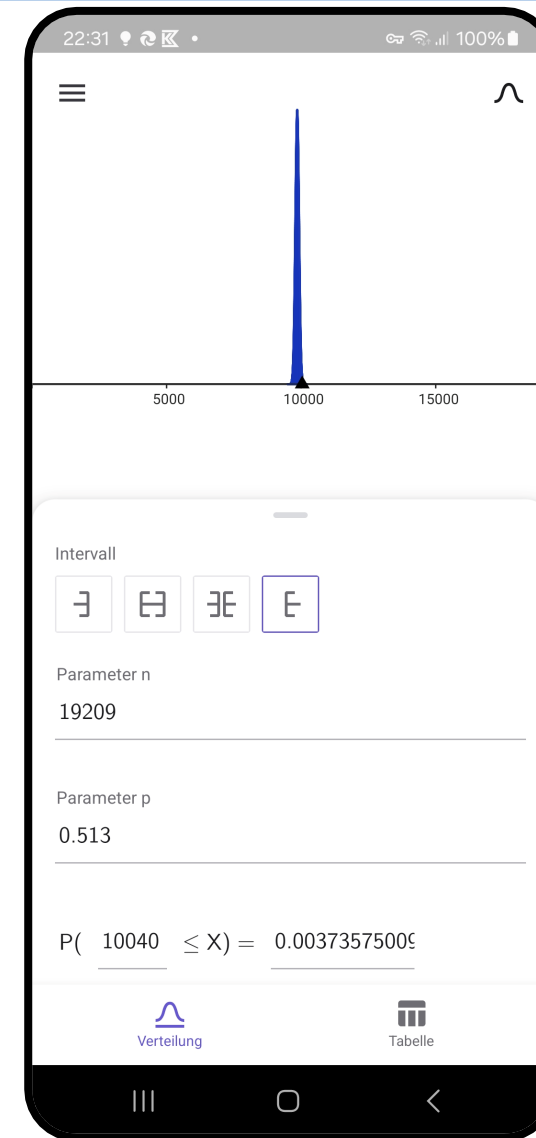
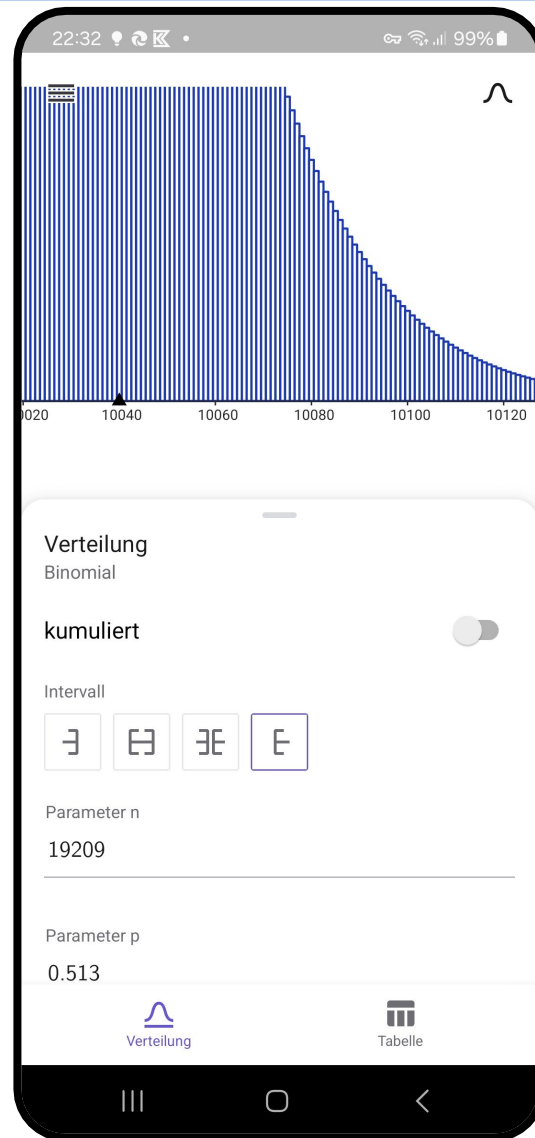
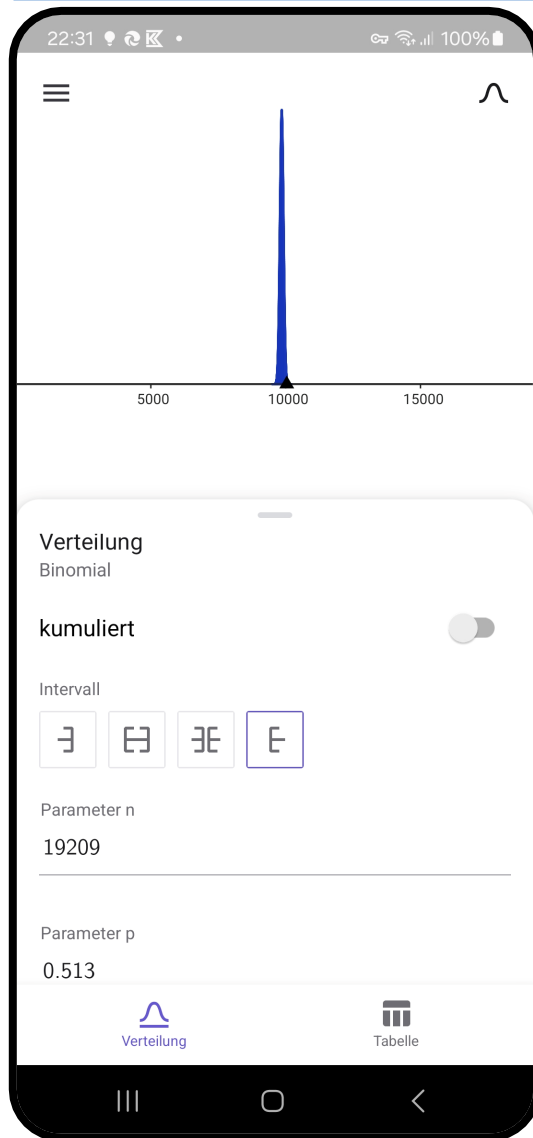
Ergebnis

Der P -Wert – also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 19209 Geburten im Zeitraum von 1996 bis 2009 10040 oder mehr Jungen geboren wurden, unter der Annahme, dass die Nullhypothese H_0 gilt – lässt sich mit Hilfe der Binomialverteilung $B(n; p) = B(19209; 0,513)$ für die Zufallsvariable $X = \text{„Anzahl der geborenen Jungen“}$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} &P(X \geq 10040 \text{ unter der Annahme, dass } H_0 \text{ gilt}) \\ &= \sum_{k=10040}^{19209} \binom{19209}{k} \cdot 0,513^k \cdot (1 - 0,513)^{19209-k} \\ &\approx 0,0037 \end{aligned}$$

Nullhypothese

„Die verlorenen Mädchen von Gorleben“



Nullhypothese

„Die verlorenen Mädchen von Gorleben“

Kriterien zum Aufstellen von Nullhypothesen

- Es lohnt sich, die Nullhypothese zu untersuchen.
- Die Nullhypothese kann mit den vorliegenden Daten untersucht werden.
- Die Intention ist klar: Es geht um die Bewertung von Daten bzw. Stichprobenergebnissen.
- Die interessierende Population wird benannt.
- Die interessierenden Merkmale/Zufallsgrößen werden benannt und es sind entsprechende Daten verfügbar.

Statistische Nullhypothese

Die Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt ist nach der Einlagerung des Atom-
mülls in Gorleben gleich der Wahrscheinlich-
keit für eine Jungengeburt in Deutschland
im selben Zeitraum.



Substanzielle Nullhypothese

Der höhere Anteil an Jungengeburten hängt
mit der Nähe zum Atom-
müll-Zwischenlager
zusammen.

Nullhypothese

„Die verlorenen Mädchen von Gorleben“

„Nullhypothesen“ von Studierenden

- (1) „Der höhere Anteil an Jungengeburten hängt nicht mit der Nähe zum Atommüllzwischenlager zusammen.“
- (2) „Es werden nicht signifikant mehr Mädchen als Jungen geboren.“
- (3) „Die niedrige Mädchengeburtenrate liegt nicht an der Strahlung des radioaktiven Materials, sondern ist Zufall.“
- (4) „Es werden mehr Mädchen als Jungen geboren.“
- (5) „In Gorleben werden weniger Mädchen geboren.“
- (6) „Im Umkreis von Gorleben werden im Vergleich zu Deutschland weniger Mädchen geboren.“
- (7) „Es werden genauso viele Jungen geboren wie Mädchen.“

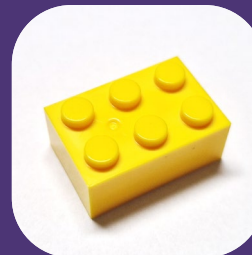
Bemerkung

Die Studierenden-Formulierungen der Nullhypothesen erfüllen die Kriterien zum Aufstellen von Nullhypothesen auf der vorherigen Folie oft nicht:

- Die Hypothesen (1) und (3) kann man mit den vorliegenden Daten nicht untersuchen.
- Bei den Hypothesen (4) bis (7) werden die interessierenden Merkmale falsch benannt.
- Nur bei Hypothese (6) wird die interessierende Population explizit angegeben ...

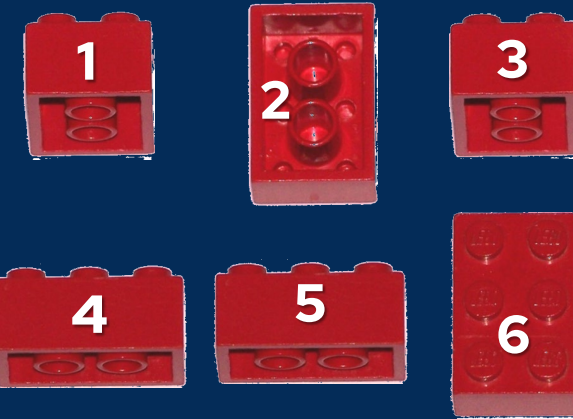
Hypothesentest: Würfeln mit Lego-Stein oder Klemmbaustein

Situation: Frau Müller ist Mathematiklehrerin und möchte die Würfelversuche mit dem Lego-Bau-stein in Ihrem aktuellen Mathematik-Grundkurs durchführen. Ihre bisherigen Erfahrungen mit echten roten Lego-Steinen zeigen, dass die Häufigkeitsverteilungen für die verschiedenen Seiten bei allen näherungsweise gleich sind. Ihr aktueller Grundkurs ist sehr groß und die bisher verwendeten Legosteine reichen nicht für alle Schülerinnen und Schüler. Zum Glück hat sie in Größe, Gewicht & Form den Lego-Steinen vergleichbare andere gelbe Klemmbausteine zuhause. Sie fragt sich, ob sie diese einfach neben den Lego-Steinen verwenden kann, oder ob sie andere Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augenzahlen aufweisen.



LEGO-Stein

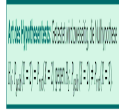
Aus langen Versuchsreihen geschätzte Wahrscheinlichkeitsverteilung für die roten Lego-Steine:



Augen- zahl x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,007	0,500	0,007	0,086	0,086	0,314

Aufgabe: Entwerfen Sie eine Zufallsstichprobe und einen zugehörigen Hypothesentest, mit dem Sie die Frage von Frau Müller klären können und führen Sie den Hypothesentest anschließend durch.

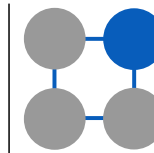
Hypothesentest: Würfeln mit Lego-Stein oder Klemmbaustein



R

TU

P



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Schritt	Fachliche Beschreibung (Rückschauerspektive der „fertigen Mathematik“)	Umsetzung am Beispiel Würfeln mit Lego-Stein oder Klemmbaustein
(1)	Hypothese H aufstellen	Mögliche Nullhypothese: Das Auftreten der Augenzahl 2 ist beim gelben Klemmbaustein genauso wahrscheinlich wie beim roten Lego-Stein.
(2)	Hypothetische Verteilung realisieren	Hypothetische Verteilung: Passt die Verteilung des Lego-Würfels für den Klemmbaustein?
(3)	Art des Hypothesentests festlegen (zweiseitig, einseitig (welche Seite))	Art des Hypothesentests: Getestet wird zweiseitig, die Nullhypothese $H_0: P_{gelb}(X = 2) = P_{rot}(X = 2)$ gegen $H_1: P_{gelb}(X = 2) \neq P_{rot}(X = 2)$.
(4)	Signifikanzniveau festlegen	Signifikanzniveau ($SN = 99,9\%$): Frau Müller will die Nullhypothese nur verwerfen, wenn die Stichprobe deutlich vom Erwartungswert abweicht.
(5)	Zufallsstichprobe festlegen (n) und durchführen	Zufallsstichprobe: 200-mal mit dem gelben Klemmbaustein würfeln und die Anzahl der dabei auftretenden Augenzahlen 2 festhalten.
(6)	Bei unwahrscheinlichen Ausgängen wird die Hypothese H verworfen.	Ergebnisse, die nicht im Prognoseintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 99,9% liegen, führen zum Verwerfen der Nullhypothese .

Würfel mit einem LEGO-Stein



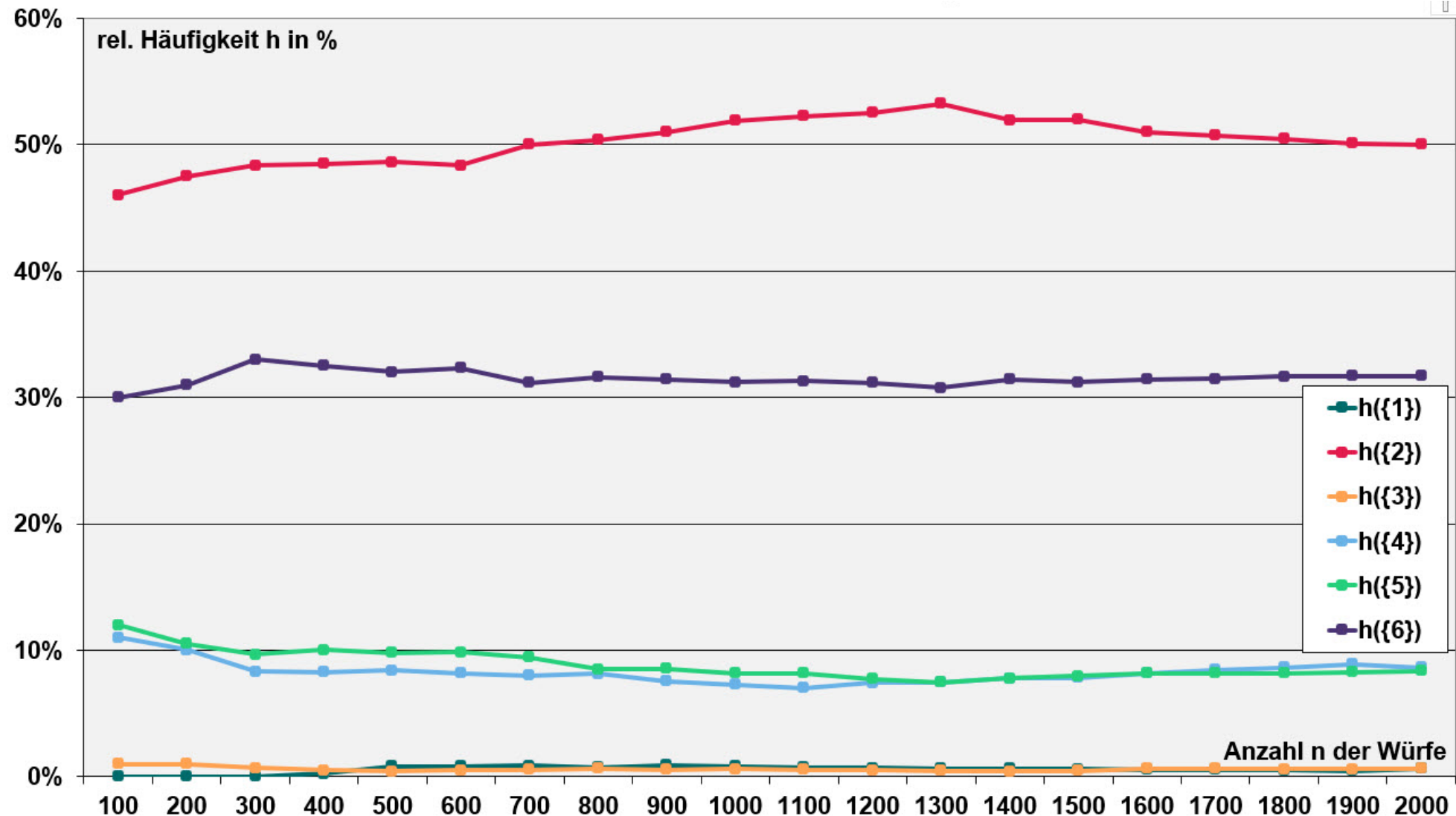
	1 			2 			3 			4 			5 			6 		
n	H({1})	kH({1})	h({1})	H({2})	kH({2})	h({2})	H({3})	kH({3})	h({3})	H({4})	kH({4})	h({4})	H({5})	kH({5})	h({5})	H({6})	kH({6})	h({6})
100	0	0	0,0%	46	46	46,0%	1	1	1,0%	11	11	11,0%	12	12	12,0%	30	30	30,0%
200	0	0	0,0%	49	95	47,5%	1	2	1,0%	9	20	10,0%	9	21	10,5%	32	62	31,0%
300	0	0	0,0%	50	145	48,3%	0	2	0,7%	5	25	8,3%	8	29	9,7%	37	99	33,0%
400	1	1	0,3%	49	194	48,5%	0	2	0,5%	8	33	8,3%	11	40	10,0%	31	130	32,5%
500	3	4	0,8%	49	243	48,6%	0	2	0,4%	9	42	8,4%	9	49	9,8%	30	160	32,0%
600	1	5	0,8%	47	290	48,3%	1	3	0,5%	7	49	8,2%	10	59	9,8%	34	194	32,3%
700	1	6	0,9%	60	350	50,0%	1	4	0,6%	7	56	8,0%	7	66	9,4%	24	218	31,1%
800	0	6	0,8%	53	403	50,4%	1	5	0,6%	9	65	8,1%	2	68	8,5%	35	253	31,6%
900	2	8	0,9%	56	459	51,0%	0	5	0,6%	3	68	7,6%	9	77	8,6%	30	283	31,4%
1000	0	8	0,8%	60	519	51,9%	1	6	0,6%	5	73	7,3%	5	82	8,2%	29	312	31,2%
1100	0	8	0,7%	56	575	52,3%	0	6	0,5%	4	77	7,0%	8	90	8,2%	32	344	31,3%
1200	0	8	0,7%	55	630	52,5%	0	6	0,5%	12	89	7,4%	3	93	7,8%	30	374	31,2%
1300	0	8	0,6%	62	692	53,2%	0	6	0,5%	8	97	7,5%	4	97	7,5%	26	400	30,8%
1400	1	9	0,6%	35	727	51,9%	0	6	0,4%	12	109	7,8%	12	109	7,8%	40	440	31,4%
1500	0	9	0,6%	53	780	52,0%	1	7	0,5%	8	117	7,8%	10	119	7,9%	28	468	31,2%
1600	0	9	0,6%	36	816	51,0%	3	10	0,6%	14	131	8,2%	12	131	8,2%	35	503	31,4%
1700	0	9	0,5%	46	862	50,7%	1	11	0,6%	13	144	8,5%	8	139	8,2%	32	535	31,5%
1800	0	9	0,5%	46	908	50,4%	0	11	0,6%	11	155	8,6%	8	147	8,2%	35	570	31,7%
1900	0	9	0,5%	44	952	50,1%	0	11	0,6%	14	169	8,9%	10	157	8,3%	32	602	31,7%
2000	4	13	0,7%	48	1000	50,0%	2	13	0,7%	4	173	8,7%	10	167	8,4%	32	634	31,7%

H: absolute Häufigkeit

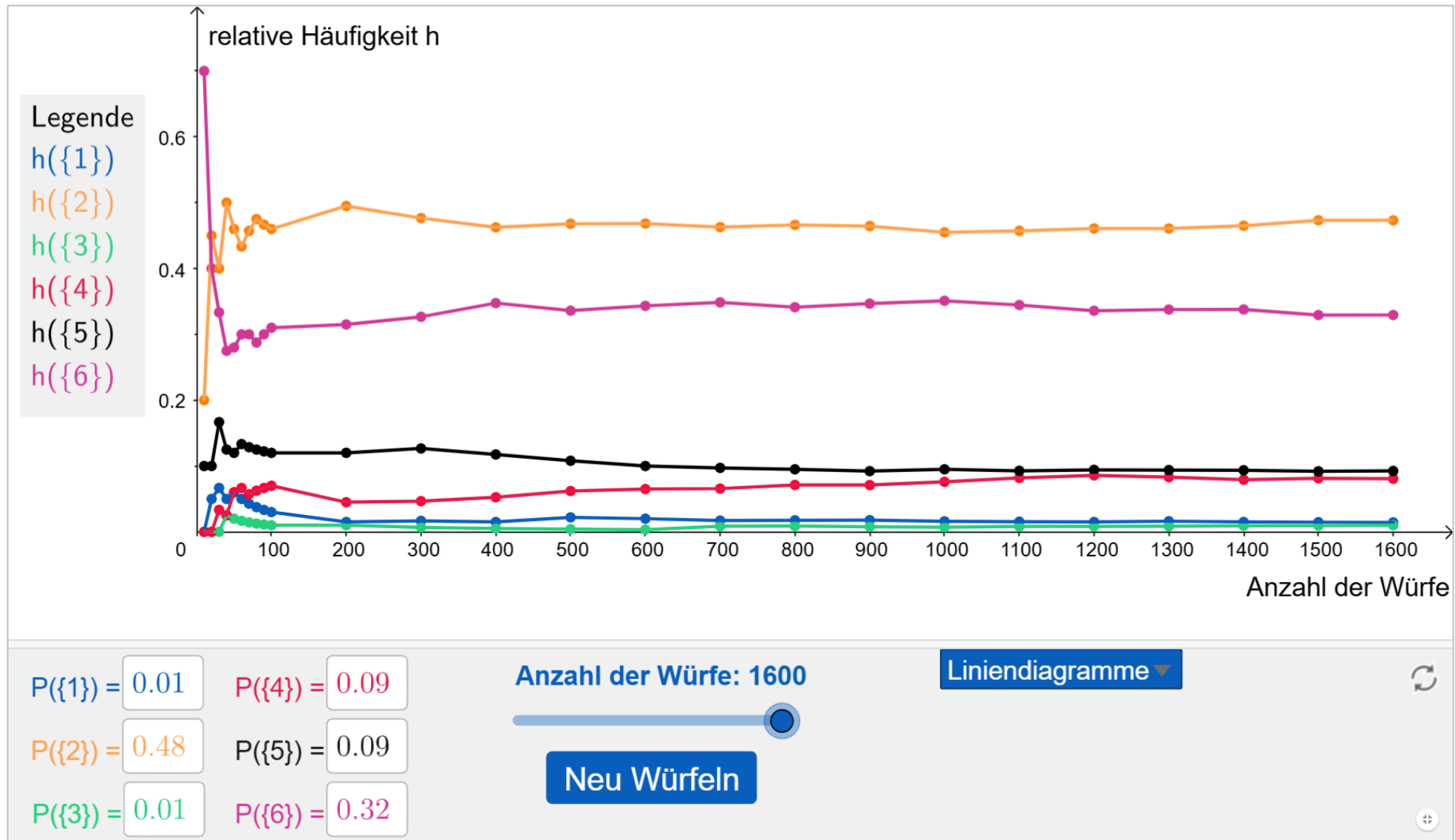
kH: kumulierte absolute Häufigkeit

h: relative Häufigkeit

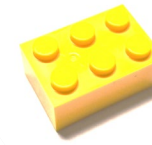
Würfel mit einem LEGO-Stein



Würfel mit einem LEGO-Stein



Würfel mit einem Klemmbaustein



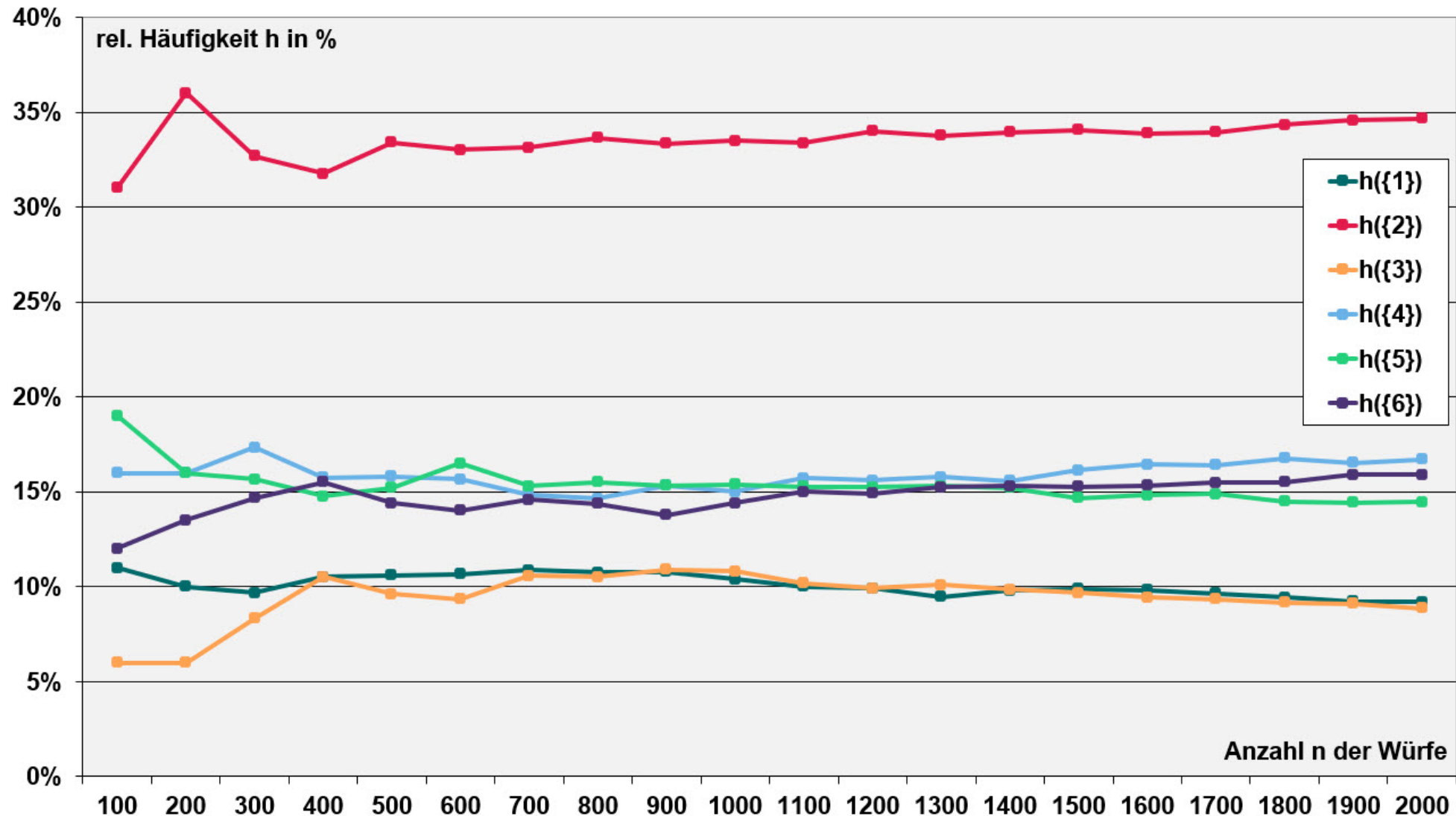
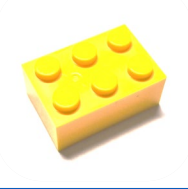
	1			2			3			4			5			6		
n	H({1})	kH({1})	h({1})	H({2})	kH({2})	h({2})	H({3})	kH({3})	h({3})	H({4})	kH({4})	h({4})	H({5})	kH({5})	h({5})	H({6})	kH({6})	h({6})
100	12	12	12,0%	31	31	31,0%	6	6	6,0%	17	17	17,0%	21	21	21,0%	13	13	13,0%
200	9	21	10,5%	41	72	36,0%	6	12	6,0%	16	33	16,5%	13	34	17,0%	15	28	14,0%
300	9	30	10,0%	26	98	32,7%	13	25	8,3%	20	53	17,7%	15	49	16,3%	17	45	15,0%
400	13	43	10,8%	29	127	31,8%	17	42	10,5%	11	64	16,0%	12	61	15,3%	18	63	15,8%
500	11	54	10,8%	40	167	33,4%	6	48	9,6%	16	80	16,0%	17	78	15,6%	10	73	14,6%
600	11	65	10,8%	31	198	33,0%	8	56	9,3%	15	95	15,8%	23	101	16,8%	12	85	14,2%
700	12	77	11,0%	34	232	33,1%	18	74	10,6%	10	105	15,0%	8	109	15,6%	18	103	14,7%
800	10	87	10,9%	37	269	33,6%	10	84	10,5%	13	118	14,8%	17	126	15,8%	13	116	14,5%
900	11	98	10,9%	31	300	33,3%	14	98	10,9%	21	139	15,4%	14	140	15,6%	9	125	13,9%
1000	7	105	10,5%	35	335	33,5%	10	108	10,8%	12	151	15,1%	16	156	15,6%	20	145	14,5%
1100	6	111	10,1%	32	367	33,4%	4	112	10,2%	23	174	15,8%	14	170	15,5%	21	166	15,1%
1200	9	120	10,0%	41	408	34,0%	7	119	9,9%	14	188	15,7%	15	185	15,4%	14	180	15,0%
1300	4	124	9,5%	31	439	33,8%	12	131	10,1%	18	206	15,8%	16	201	15,5%	19	199	15,3%
1400	14	138	9,9%	36	475	33,9%	7	138	9,9%	13	219	15,6%	14	215	15,4%	16	215	15,4%
1500	11	149	9,9%	36	511	34,1%	7	145	9,7%	24	243	16,2%	7	222	14,8%	15	230	15,3%
1600	9	158	9,9%	31	542	33,9%	6	151	9,4%	21	264	16,5%	17	239	14,9%	16	246	15,4%
1700	7	165	9,7%	35	577	33,9%	8	159	9,4%	16	280	16,5%	16	255	15,0%	18	264	15,5%
1800	6	171	9,5%	41	618	34,3%	6	165	9,2%	23	303	16,8%	8	263	14,6%	16	280	15,6%
1900	5	176	9,3%	39	657	34,6%	8	173	9,1%	12	315	16,6%	13	276	14,5%	23	303	15,9%
2000	9	185	9,3%	36	693	34,7%	4	177	8,9%	20	335	16,8%	15	291	14,6%	16	319	16,0%

H: absolute Häufigkeit

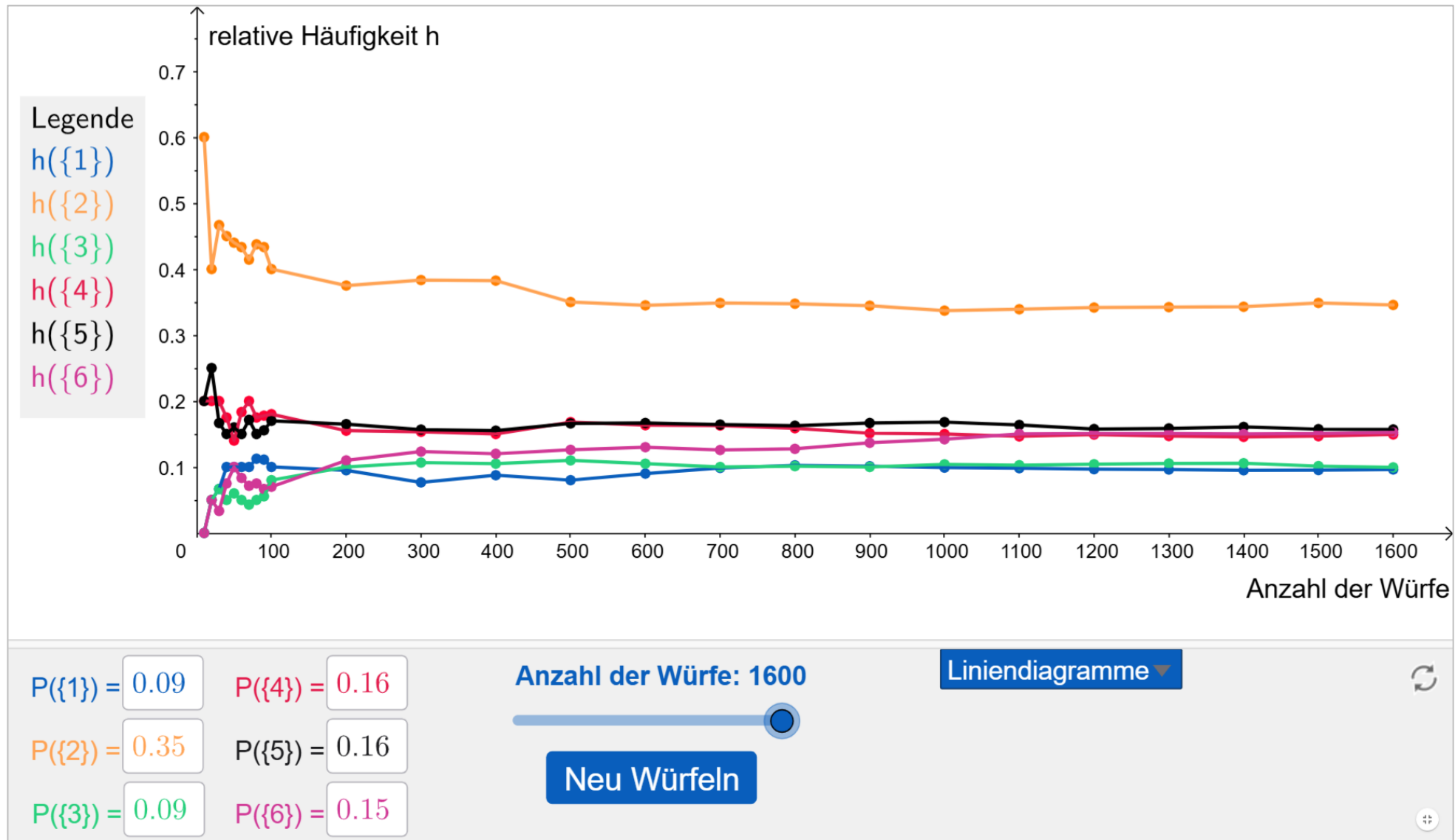
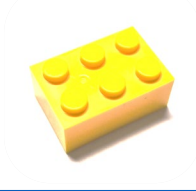
kH: kumulierte absolute Häufigkeit

h: relative Häufigkeit

Würfel mit einem Klemmbaustein

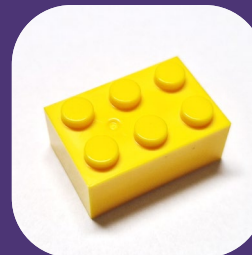


Würfel mit einem Klemmbaustein



Hypothesentest: Würfeln mit Lego-Stein oder Klemmbaustein

Situation: Frau Müller ist Mathematiklehrerin und möchte die Würfelversuche mit dem Lego-Bau-stein in Ihrem aktuellen Mathematik-Grundkurs durchführen. Ihre bisherigen Erfahrungen mit echten roten Lego-Steinen zeigen, dass die Häufigkeitsverteilungen für die verschiedenen Seiten bei allen näherungsweise gleich sind. Ihr aktueller Grundkurs ist sehr groß und die bisher verwendeten Legosteine reichen nicht für alle Schülerinnen und Schüler. Zum Glück hat sie in Größe, Gewicht & Form den Lego-Steinen vergleichbare andere gelbe Klemmbausteine zuhause. Sie fragt sich, ob sie diese einfach neben den Lego-Steinen verwenden kann, oder ob sie andere Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augenzahlen aufweisen.



LEGO-Stein

Aus langen Versuchsreihen geschätzte Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Lego-Steine:

Augen- zahl x	1 	2 	3 	4 	5 	6 
$P(X = x)$	0,007	0,500	0,007	0,086	0,086	0,314

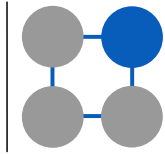
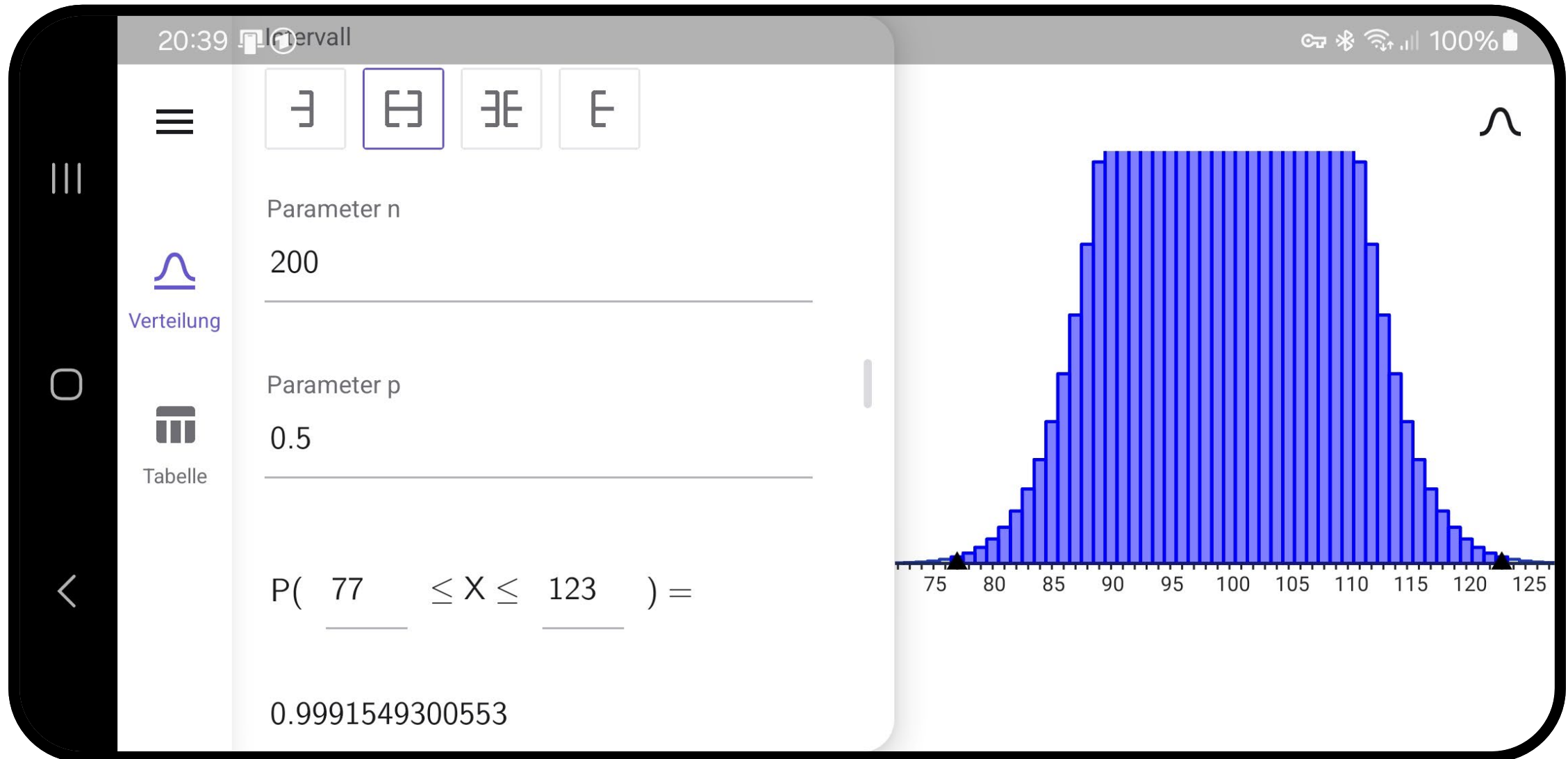
Ergebnis der Zufallsstichprobe

Häufigkeitsverteilung nach $n = 200$
Würfen mit dem Klemmbaustein:

Augen- zahl x	1 	2 	3 	4 	5 	6 
$H(X = x)$	21	72	12	33	34	28

Hypothesentest: Würfeln mit Lego-Stein oder Klemmbaustein

R

TU
PDidaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Exkurs: Fehler 1. Art und Fehler 2. Art

		Realität	
		H_0 richtig	H_0 falsch
Test	H_0 richtig	✓	✗ Fehler 2. Art (β -Fehler)
	H_0 falsch	✗ Fehler 1. Art (α -Fehler)	✓

Wird die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt, so bezeichnet man dies als **Fehler erster Art**.

Das **Signifikanzniveau** ist der Wert, den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art nicht überschreiten soll.



Wird die Nullhypothese irrtümlich nicht abgelehnt, so bezeichnet man dies als **Fehler zweiter Art**.

Aufgaben zur Erarbeitung der Ideen zu den Fehlern 1. und 2. Art: **Ω-mathe**

Was bedeutet „signifikant“?

<https://de.wikipedia.org/wiki/P-Wert> 

Aufgabe

Mit einem Testverfahren wird überprüft, ob der zwischen zwei Stichproben gefundene Unterschied signifikant ist.

Es stellt sich heraus, dass der Unterschied auf dem 1%-Niveau signifikant ist.

Welche der folgenden Aussagen lassen sich aus dieser Tatsache folgern? (Es können dabei einzelne, alle oder auch keine der Aussagen zutreffen.)

- (1) Es ist eindeutig bewiesen, dass die Nullhypothese falsch ist.
- (2) Die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens der Nullhypothese ist gefunden worden.
- (3) Es ist eindeutig bewiesen, dass die Alternativhypothese wahr ist.
- (4) Man kann nun die Wahrscheinlichkeit ableiten, dass die Alternativhypothese richtig ist.
- (5) Entscheidet man sich nun, die Nullhypothese zu verwerfen, dann kennt man jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Entscheidung falsch ist.
- (6) Wenn man das Experiment sehr oft wiederholen würde, würde man in 99% der Fälle ein signifikantes Ergebnis bekommen.

Alle diese Aussagen sind falsch!

Der Begriff „Signifikanz“ bezieht sich auf „eine Welt“, in der H_0 gültig ist:

Man betrachtet die **Wahrscheinlichkeit des Stichprobenergebnisses oder noch extremerer Ergebnisse unter der Annahme, H_0 sei richtig.**

Diese „bedingte“ Wahrscheinlichkeit wird **P-Wert** genannt.

Ein Testergebnis ist genau dann auf dem 1%-Niveau signifikant, wenn der zum Testergebnis gehörige P-Wert kleiner als 1% ist.

Zufällige Ereignisse

(bzw. Situationen, Konstellationen)

- sind selten oder außergewöhnlich
- sind unstrukturiert
- müssen gleichmäßig verteilt sein
- treten unerwartet auf, sind unvorhersehbar
- haben keine Ursache
- lassen sich nicht beeinflussen, nicht verhindern, aber auch nicht erzwingen



R

TU
P
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Kapitel 4:

Beurteilende Statistik

- 4.1 Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung
- 4.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion
- 4.3 Prognose- und Konfidenzintervall
- 4.4 Hypothesentest
- 4.5 Ausgewählte Unterrichtsvorschläge**

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-stochastik

RPTU



GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
<https://roth.tel/stochastik>

Geschmackstests

Rierner, W. & Petzolt, W. (1997). Geschmackstests: Spannende und verbindende Experimente. *Mathematik lehren*, 85, 16-19

Glücksrad auf schiefer Ebene

<http://www.riemer-koeln.de/cmbasic/?gluecksrad> 🌐 Rierner, W. & Vehling, R. (2021). Stochastik erkunden – Ideenreiche Arbeitsblätter mit GeoGebra. Friedrich Verlag, 80-85 🌐

Bleistiftrollen – Beurteilende Statistik im Federmäppchen

<http://www.riemer-koeln.de/cmbasic/?stifte> 🌐 Rierner, W. & Seebach, G. (2011). Bleistiftrollen – Beurteilende Statistik im Federmäppchen. In R. Kaenders, R. Schmidt (Hrsg.). *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen* (S. 69-83). Wiesbaden: Vieweg+Teubner

Zufällige Schwankungen untersuchen

Biehler, R., Griesse, B., Niesporek, R. & Prömmel, A. (2022). Zufällige Schwankungen verstehen. *MatheWelt*, 232.

Zufallssinn

Leuders, T. (2005). Darf das denn wahr sein? – Eine schüleraktive Entdeckung der Grundidee des Hypothesentestens durch Simulation mit Tabellenkalkulation. *PM*, 47(4), 8-16



Wie gut ist der „Zufallssinn“ des Menschen?

- Kann ein Mensch glaubwürdig den Zufall produzieren bzw. simulieren?
- Operationalisierung der Forschungsfrage:
 - Virtuelles Münzwerfen
Aufschreiben einer möglichst echten Reihe von Wurfsergebnissen
 - Virtuelles Würfeln
Aufschreiben einer möglichst echten Reihe von Augenzahlen
 - Virtuelles Ziehen der Lottozahlen
Aufschreiben einer möglichst echten Reihe von Ziehungsergebnissen

Selbststudium



Wie gut ist der „Zufallssinn“ des Menschen?

- Kann ein Mensch glaubwürdig den Zufall produzieren bzw. simulieren?
- Operationalisierung der Forschungsfrage:
 - Virtuelles Münzwerfen
Aufschreiben einer möglichst echten Reihe von Wurfsergebnissen
 - Virtuelles Würfeln
Aufschreiben einer möglichst echten Reihe von Augenzahlen
 - Virtuelles Ziehen der Lottozahlen
Aufschreiben einer möglichst echten Reihe von Ziehungsergebnissen

Selbststudium



„Zufallssinn“ des Menschen!?

Selbststudium

Aufgabe: Stellen Sie sich vor, Sie werfen eine **Münze** zwanzig Mal.
Notieren Sie eine Folge von Ergebnissen **K** (für Kopf) bzw. **Z** (für Zahl),
wie sie wahrscheinlich auftreten werden.



„Zufallssinn“ des Menschen!?

Selbststudium

Aufgabe: Stellen Sie sich vor, Sie würfeln zwanzig Mal mit einem **Würfel**.

Notieren Sie eine Folge von Ergebnissen (**1, 2, 3, 4, 5** bzw. **6**),
wie sie wahrscheinlich auftreten werden.



„Zufallssinn“ des Menschen!?

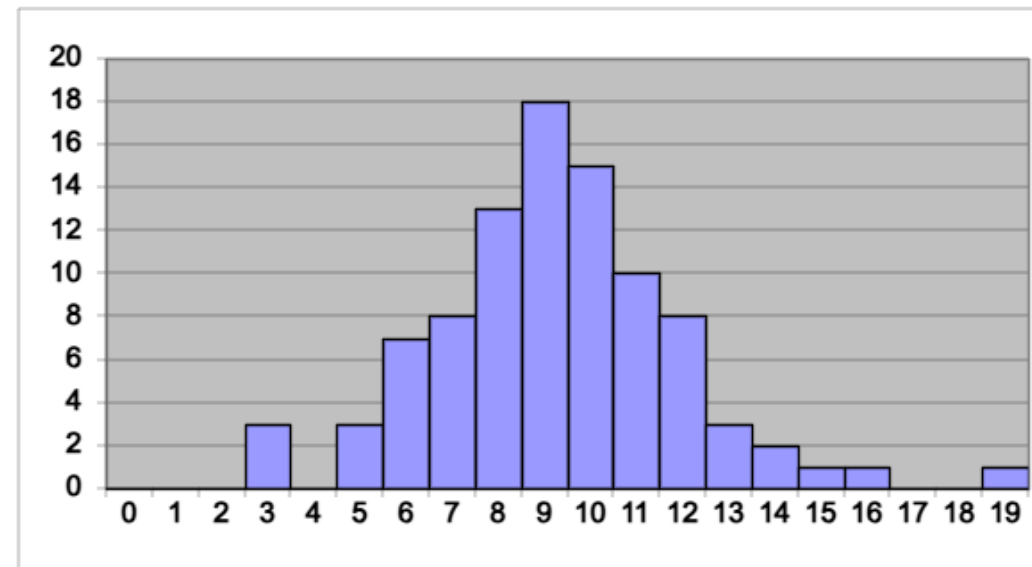
3er-Serien als Indiz

Selbststudium

Aufgabe: Stellen Sie sich vor, Sie würfeln zwanzig Mal mit einem **Würfel**.
Notieren Sie eine Folge von Ergebnissen (1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6),
wie sie wahrscheinlich auftreten werden.



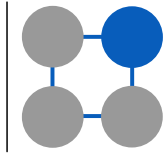
Ausgedachte Würfelwerte	Auswertung: "3er Serien"	3er Serien	9
5 2 3 3 6 3 6 2 4 2 1 5 6 3 2 6 1 3 2 2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	Zähler	17
6 3 3 4 6 2 6 2 3 1 6 1 4 2 1 1 2 1 4 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	Versuch	Nr.
6 6 2 6 2 5 6 6 4 3 6 2 2 5 2 4 6 5 6 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	Anzahl	der 3er Serien
2 2 4 2 4 6 5 1 2 1 6 1 1 3 6 5 4 2 1 2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	1	11
2 3 3 1 6 6 1 1 4 2 3 6 2 5 6 6 5 2 6 2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	2	10
1 6 5 2 5 3 2 6 6 2 1 3 6 3 6 4 3 2 4 6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	3	10
6 1 4 2 6 3 3 5 4 3 6 1 2 5 4 5 2 4 4 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	4	12
2 3 3 1 5 1 1 5 4 2 2 4 4 4 5 5 4 3 6 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	5	10
1 3 6 6 6 4 4 4 5 1 1 6 1 2 5 2 6 1 4 5	0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	6	7
5 1 4 4 2 6 1 5 5 4 6 3 1 1 3 1 4 6 6 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	7	3
2 2 4 5 1 6 2 3 3 1 5 3 1 4 2 4 4 5 4 4	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	8	8
5 4 5 5 5 2 6 6 3 5 1 2 4 4 2 4 1 4 3 2	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	9	5
4 5 3 5 4 5 4 1 4 3 3 4 1 6 6 3 5 6 5 6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	10	7
5 3 3 4 4 2 1 6 3 4 2 4 1 2 4 3 5 5 1 2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	11	10
5 4 3 3 2 6 6 1 2 6 6 5 5 5 3 4 3 1 1 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1	12	10
2 5 3 4 4 2 4 6 6 1 2 6 2 2 5 3 1 3 5 2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	13	5
3 5 1 2 5 1 2 3 4 1 2 3 4 5 2 1 6 4 1 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	14	8
2 2 1 6 4 6 2 5 5 6 4 1 6 6 1 5 1 2 3 5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	15	7
6 6 3 6 6 2 2 4 1 2 3 1 3 3 4 4 3 6 2 5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	16	9
4 3 6 2 2 3 2 4 4 5 5 1 2 1 2 2 6 1 3 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	17	9
3 1 2 1 6 3 1 5 2 1 2 2 1 2 4 6 4 5 2 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	18	7
6 1 1 2 5 5 4 5 3 4 1 1 6 4 6 2 3 3 6 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	19	8
5 1 2 3 2 3 2 2 3 3 3 6 4 1 1 1 2 3 1 5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0	20	9
5 6 1 4 1 2 2 3 1 2 6 5 2 4 4 4 1 3 3 2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0		
5 2 4 3 6 5 2 2 6 5 4 2 2 2 2 1 5 2 1 6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		



„Zufallssinn“ des Menschen!?

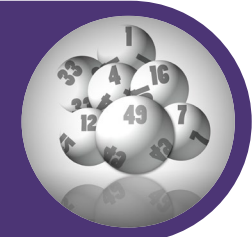
Selbststudium

R
P TU



Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Aufgabe: Stellen Sie sich vor, die Lottomaschine ist defekt.
Sie ziehen zehn Wochen hintereinander ganz zufällig 6 aus 49.
Notieren Sie eine Folge von Lottoergebnissen, wie sie wahrscheinlich auftreten.



1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de



RPTU



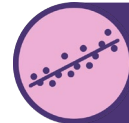
**Kernidee: Hypothetisch-prog-
nostische Wahrscheinlichkeit**



**Kernidee: Denkfigur
Bedingte Wahrscheinlichkeit**



Kernidee: Verteilungen



**Kernidee: Repräsentativität und
Variabilität v. Stichproben-Daten**