Didaktik der Stochastik

Modul 12a/b

Jürgen Roth

07.11.2024 juergen-roth.de

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

R TU P
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Didaktik der Stochastik

1. Ziele und Inhalte
2. Beschreibende Statistik
3. Wahrscheinlichkeitsrechnung
4. Beurteilende Statistik

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik"
https://roth.tel/stochastik

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-stochastik

RPTU

2

Didaktik der Stochastik

Beschreibende Statistik

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Beschreibende Statistik

2.1 Grundbegriffe der beschreibenden Statistik

2.2 Erhebung – Daten sammeln

2.3 Graphische Darstellungsformen

2.4 Kennwerte von Datenreihen (Mittelwerte und Streuungsmaße)

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik"
https://roth.tel/stochastik

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2: Beschreibende Statistik

2.1 Grundbegriffe der beschreibenden Statistik

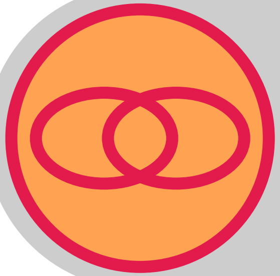
2.2 Erhebung – Daten sammeln

2.3 Graphische Darstellungsformen

2.4 Kennwerte von Datenreihen (Mittelwerte und Streuungsmaße)

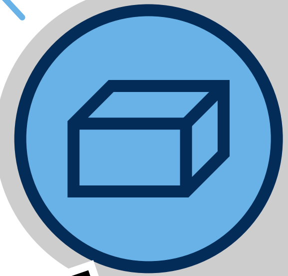
GeoGebra-Buch „Didaktik der Stochastik" https://roth.tel/stochastik

Kernideen im Fokus
bei Grundbegriffen der beschreibenden Statistik



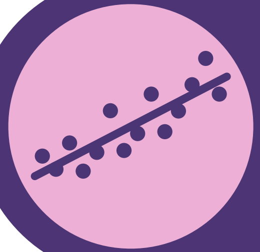
Kernidee
Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken
  (Wenn …, dann …)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit
  ↔ totale Wahrscheinlichkeit



Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit)
  ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung



Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe
  → reduziert Variabilität

Kernidee
Verteilungen

- Struktur erfassen
  (Form, Streuung, Maximum, …)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

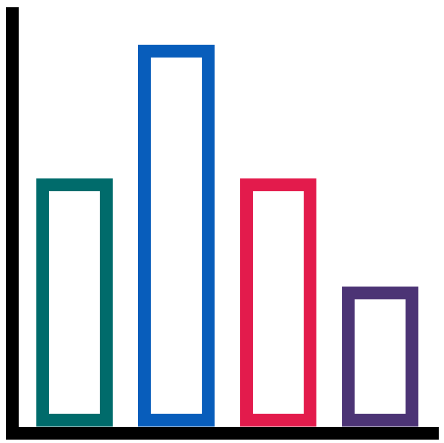
Beschreibende Statistik?!

Beschreibende Statistik

„In der beschreibenden Statistik geht es um

- eine Datenerfassung in Sachsituationen,
- die Datenaufbereitung und
- eine erste vorsichtige Dateninterpretation."

Kütting (1994, S. 21)



Kütting, H. (1994). Beschreibende Statistik im Schulunterricht. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.

Statistische Untersuchung: Phasen

Ziel der Untersuchung festlegen

Zu untersuchende Gegenstände / Personen auswählen

Daten erheben

Daten aufbereiten & darstellen

Daten auswerten & interpretieren

Beschreibende Statistik: Grundbegriffe

Statistische Einheit

Merkmalsträger, Informationsträger (Personen, …)

Identifikations-merkmale
- **Sachlich** (weiblich <18 J.)
- **Räumlich** (in RLP)
- **Zeitlich** (im Jahr 2024)

Statistische Erhebung

Totalerhebung der Grundgesamtheit
(alle weiblichen Personen unter 18 in RLP im Jahr 2024, Volkszählung)

Teilerhebung, Stichprobe
(Mikrozensus)

Merkmal

interessierende Eigenschaft der statistischen Einheit

Erschöpfend?!
(Ausprägung / Modalität „sonstige“)

Merkmals-ausprägung (Modalität)

qualitativ / nominalskaliert

komparativ / ordinalskaliert
(Rangmerkmal)

quantitativ / metrisch skaliert

Beschreibende Statistik: Grundbegriffe
Skalenniveaus

Merkmal	Farbe	Süße	Erntedatum	Masse
	grün	sauer	04.09.	200 g
	rot	mittel	14.09.	150 g
	gelb	süß	08.10.	190 g
	$= \mid \neq$ **Nominalskala**	$> \mid <$ **Ordinalskala**	$+ \mid -$ **Intervallskala**	$\cdot \mid :$ **Verhältnisskala**

Beschreibende Statistik: Grundbegriffe
Skalenniveaus

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Merkmal	qualitativ	komparativ	quantitativ / metrisch	
Skala	**Nominalskala**	**Ordinalskala**	**Intervallskala**	**Verhältnisskala**
Eigenschaften	$x = y$ oder $x \neq y$ feststellbar	Zusätzlich: $x > y$ oder $x < y$ feststellbar	Zusätzlich: $x - y$ und $x + y$ sinnvoll / erlaubt	Zusätzlich: absoluter Nullpunkt existiert $x \cdot y$ und $x : y$ sinnvoll / erlaubt
Skalenwerte dienen zur	Kennzeichnung	Zusätzlich: ■ Darstellung der Ordnung	Zusätzlich: ■ Berechnung von Unterschieden	Zusätzlich: ■ Berechnung von Verhältnissen
Beispiele	■ Geschlecht ■ Staatsangehörigkeit ■ Beruf ■ Autofarbe	■ gar nicht, selten, oft, sehr oft ■ Windstärke nach Beaufort ■ Schulleistung	■ Uhrzeitpunkt ■ Temperatur nach Celsius ■ topografische Höhenlage	■ Alter, Größe ■ Temperatur nach Kelvin ■ Gewicht, Volumen ■ Schuhgröße
Sinnvolle Mittelwerte	■ Modalwert	Zusätzlich: ■ Median	Zusätzlich: ■ arithmetisches Mittel	Zusätzlich: ■ geometrisches Mittel ■ harmonisches Mittel

Absolutskala ⇔ Einheit der Skala zwangsläufig (Anzahl)

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2:
Beschreibende Statistik

2.1 Grundbegriffe der beschreibenden Statistik

2.2 Erhebung – Daten sammeln

2.3 Graphische Darstellungsformen

2.4 Kennwerte von Datenreihen (Mittelwerte und Streuungsmaße)

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik"
https://roth.tel/stochastik

Kernideen im Fokus
bei Erhebung – Daten sammeln

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kernidee Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken (Wenn …, dann …)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit) ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

Kernidee Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe → reduziert Variabilität

Kernidee Verteilungen

- Struktur erfassen (Form, Streuung, Maximum, …)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

Ziel der Erhebung

R P TU | Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

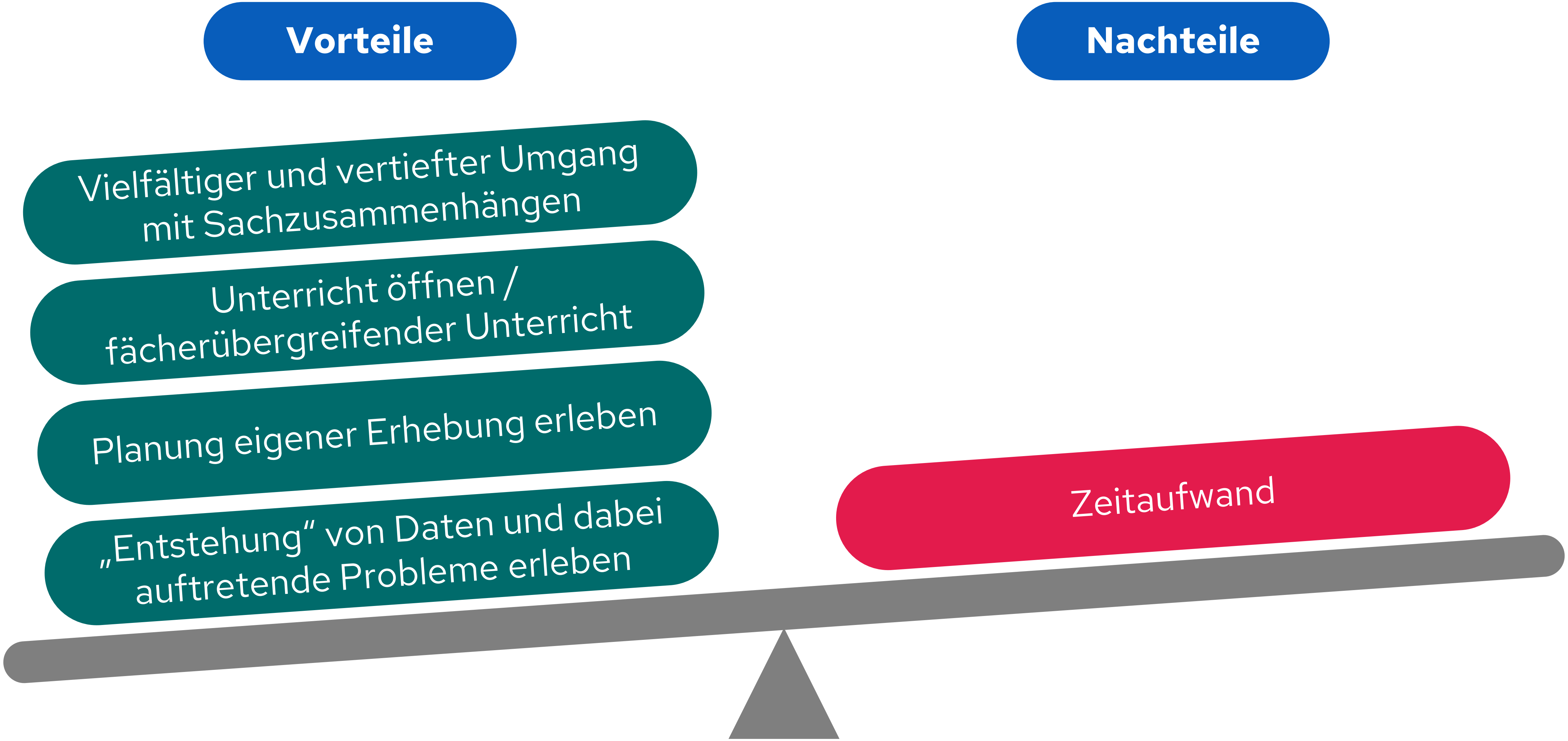
Klassische beschreibende Statistik

- **Zielgerichtet:** Ergebnis wird antizipiert; Verteilung der Daten vorhersehbar
- **Ziel:** Hypothesen prüfen
- **Beispiel:** Erhebung zur Beziehung von Körper- und Schuhgröße von Schüler/inne/n

Explorative Datenanalyse

- **Erforschend:** Keine Vorüberlegungen zu mögl. Ergebnissen
- **Ziel:** Hypothesen generieren, neue Einsichten in einen Sachkontext gewinnen
- **Beispiel:** Erhebung zum Freizeitverhalten von Schüler/inne/n

Eigene Erhebung



Wichtig für die Güte der Erhebung

Identifikationsmerkmale festlegen

- sächlich (Was? / Wer?)
- räumlich (Wo?)
- zeitlich (Wann?)

1

Skala bestimmen

- Nominalskala
- Ordinalskala
- Metrische Skala

2

Probleme antizipieren

- Geeignete Fragestellung?
- Alle wesentlichen Merkmale & Ausprägungen erhoben?
- Stichprobe repräsentativ?
- Merkmalsausprägungen messbar?

3

Mögliche Zugänge zu Fragen und Problemen bei Erhebungen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Eigene Erhebung

- Planen
- Durchführen

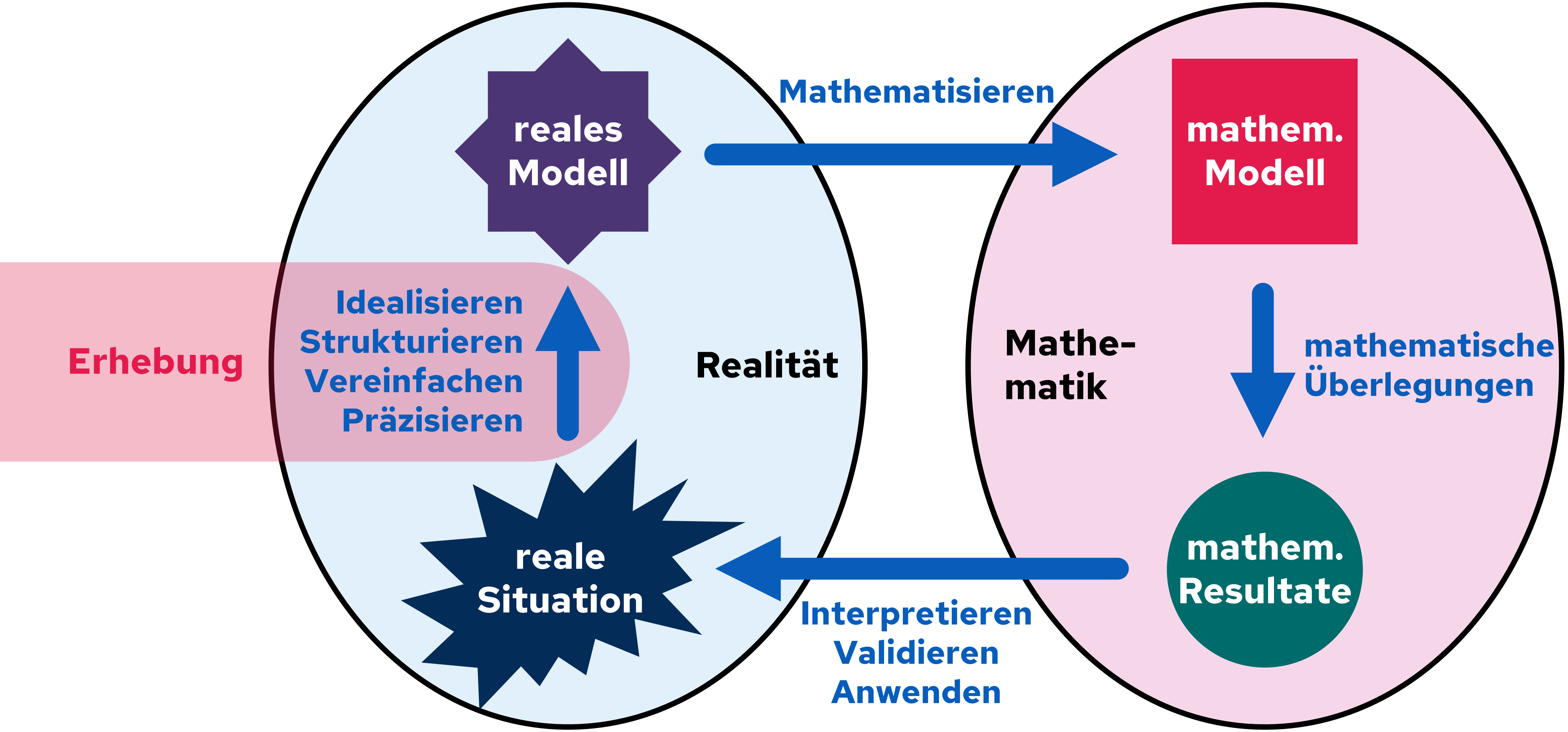
Fremderhebung analysieren

- Voraussetzung: Erhebungsdefinitionen zugänglich
- z. B. Diskussion extremer Stichproben bei ungenau definierten Merkmalen

Rekonstruktion einer Statistik

- Erhebungsdefinitionen nicht zugänglich
- Rekonstruktion: Von gegebenen Daten auf die Originaldaten rückschließen.

Erhebung im Modellierungskreislauf



Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 275.

Erhebung

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Statistische Masse:
Schülerinnen und Schüler
eine Klasse

Statistische Einheit:
Schüler/in

Merkmal:
Note in einer Klassenarbeit

Merkmalsausprägungen:
1 bis 6

Note	Anzahl
1	1
2	9
3	7
4	6
5	3
6	1

Notendurchschnitt:
3,15

Statistische Erhebung in einem Schulbuch

Aufstellung eines Fragebogens

Beim Aufstellen eines Fragebogens sollte man Folgendes beachten:

1. Festlegen des Themas: Was will ich abfragen, wozu befragen?
2. Aufstellen einer Gliederung, Unterpunkte festlegen.
Verständliche Fragen und Begriffe verwenden
3. Festlegen der Antwortmöglichkeiten: z. B. ja – nein; dafür – dagegen – keine Meinung; gefällt mir – gefällt mir nicht; ist für mich bedeutend – ist nicht bedeutend; stimme ich zu – lehne ich ab.
Auch eine Wertung mit einer Notenskala wie in der Schule ist möglich. Oder Abstufungen: immer – häufig – selten – nie sind möglich.
4. Festlegen der äußeren Form: Felder zum Ankreuzen oder Ausfüllen.
Wichtig ist Übersichtlichkeit zur leichteren Auswertung.

Durchführung der Befragung

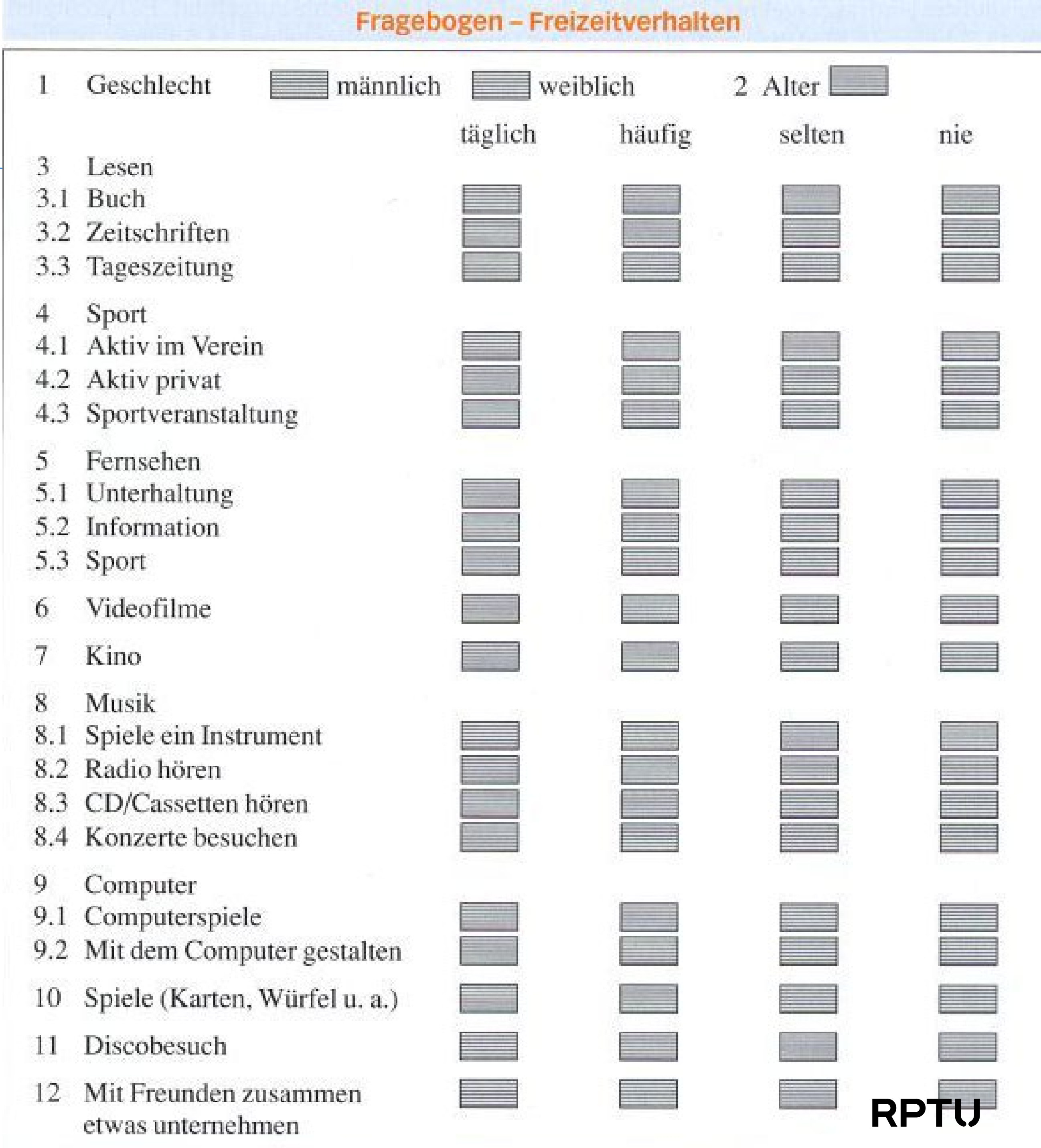
Zunächst ist festzulegen, wie viele bzw. welche Personen befragt werden (= Grundgesamtheit).
Die Befragung kann auf zwei Arten erfolgen:

1. Jeder erhält den Fragebogen und füllt ihn selbstständig aus. Das garantiert weitgehende Anonymität. Der Beantworter steht nicht unter dem zeitlichen Druck des Fragenden.

2. Der Fragende füllt den Bogen nach den Angaben des Befragten aus.
Dadurch ist die Anonymität nicht mehr gewährleistet. Es besteht deshalb die Gefahr, dass der Befragte aus verschiedenen Gründen Angaben macht, die nicht seiner wirklichen Meinung entsprechen. Dadurch wird das Ergebnis der Befragung verfälscht.

Leppig (Hrsg.) (2007). Lernstufen Mathematik M9, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 190

Statistische Erhebung in einem Schulbuch



Fragebogen – Freizeitverhalten

1 Geschlecht ☐ männlich ☐ weiblich 2 Alter ☐

		täglich	häufig	selten	nie
3	Lesen				
3.1	Buch	☐	☐	☐	☐
3.2	Zeitschriften	☐	☐	☐	☐
3.3	Tageszeitung	☐	☐	☐	☐
4	Sport				
4.1	Aktiv im Verein	☐	☐	☐	☐
4.2	Aktiv privat	☐	☐	☐	☐
4.3	Sportveranstaltung	☐	☐	☐	☐
5	Fernsehen				
5.1	Unterhaltung	☐	☐	☐	☐
5.2	Information	☐	☐	☐	☐
5.3	Sport	☐	☐	☐	☐
6	Videofilme	☐	☐	☐	☐
7	Kino	☐	☐	☐	☐
8	Musik				
8.1	Spiele ein Instrument	☐	☐	☐	☐
8.2	Radio hören	☐	☐	☐	☐
8.3	CD/Cassetten hören	☐	☐	☐	☐
8.4	Konzerte besuchen	☐	☐	☐	☐
9	Computer				
9.1	Computerspiele	☐	☐	☐	☐
9.2	Mit dem Computer gestalten	☐	☐	☐	☐
10	Spiele (Karten, Würfel u. a.)	☐	☐	☐	☐
11	Discobesuch	☐	☐	☐	☐
12	Mit Freunden zusammen etwas unternehmen	☐	☐	☐	☐

Leppig (Hrsg.) (2007). Lernstufen Mathematik M9, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 190

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2:
Beschreibende Statistik

2.1 Grundbegriffe der beschreibenden Statistik

2.2 Erhebung – Daten sammeln

2.3 Graphische Darstellungsformen

2.4 Kennwerte von Datenreihen (Mittelwerte und Streuungsmaße)

GeoGebra-Buch
„Didaktik der Stochastik“
https://roth.tel/stochastik

Kernideen im Fokus
bei Graphische Darstellungsformen

- Konditionales Denken
  (Wenn ..., dann ...)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit
  ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee
Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit)
  ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe
  → reduziert Variabilität

- Struktur erfassen
  (Form, Streuung, Maximum, ...)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

Kernidee
Verteilungen

Graphische Darstellungsformen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

- Urliste 1
- Tabelle 2
- Stängel-Blatt-Diagramm 3
- Balken- / Säulendiagramm 4
- Block- / Streifendiagramm 5
- Kreis- / Tortendiagramm 6
- 7 Piktogramm
- 8 Streudiagramm (Punktwolke, Scatterplot)
- 9 Liniendiagramm / (Zacken-)Kurven
- 10 Boxplot
- 11 Histogramm
- „Misstrauensregeln" für Diagramme

2.3.1 Urliste

Urliste

Beispiel
Klassensprecherwahl

2.3.2 Tabelle

Tabelle

Beispiel
Klassensprecherwahl

Kandidat/in	Strichliste	(absolute) Häufigkeit
Anna	𝍸 I	6
Martin	𝍸 IIII	9
Lena	𝍸 II	7
Tim	IIII	4

Tabelle

RPTU | Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Religionszugehörigkeit in Deutschland am 31.12.2022

Religionszugehörigkeit	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Anteil in %
Römische Katholiken	20 937 600	0,2482	24,82
EKD-Evangelische	19 100 000	0,2264	22,64
Konfessionsgebundene Muslime	3 090 000	0,0366	3,66
Andere Religionen (*)	4 290 000	0,0509	5,09
Konfessionsfreie / ohne Religion	36 941 300	0,4379	43,79
Summe (Bevölkerung)	84 358 900	1,0000	100,00

(*) Sonstige Christen 3,3 % (Orthodoxe Kirchen 2,2 %, Sonstige christliche Gemeinschaften 1,1 %, u.a. Freikirchen, Neuapostolische Kirche, Zeugen Jehovas, Mennoniten) sowie Aleviten 0,8 %, Buddhisten 0,2 %, Juden 0,1 %, Hindus 0,1 %, Jesiden 0,1 %, weitere 0,4 %

 Quelle: https://fowid.de/meldung/religionszugehoerigkeiten-2022

2.3.3 Stängel-Blatt-Diagramm

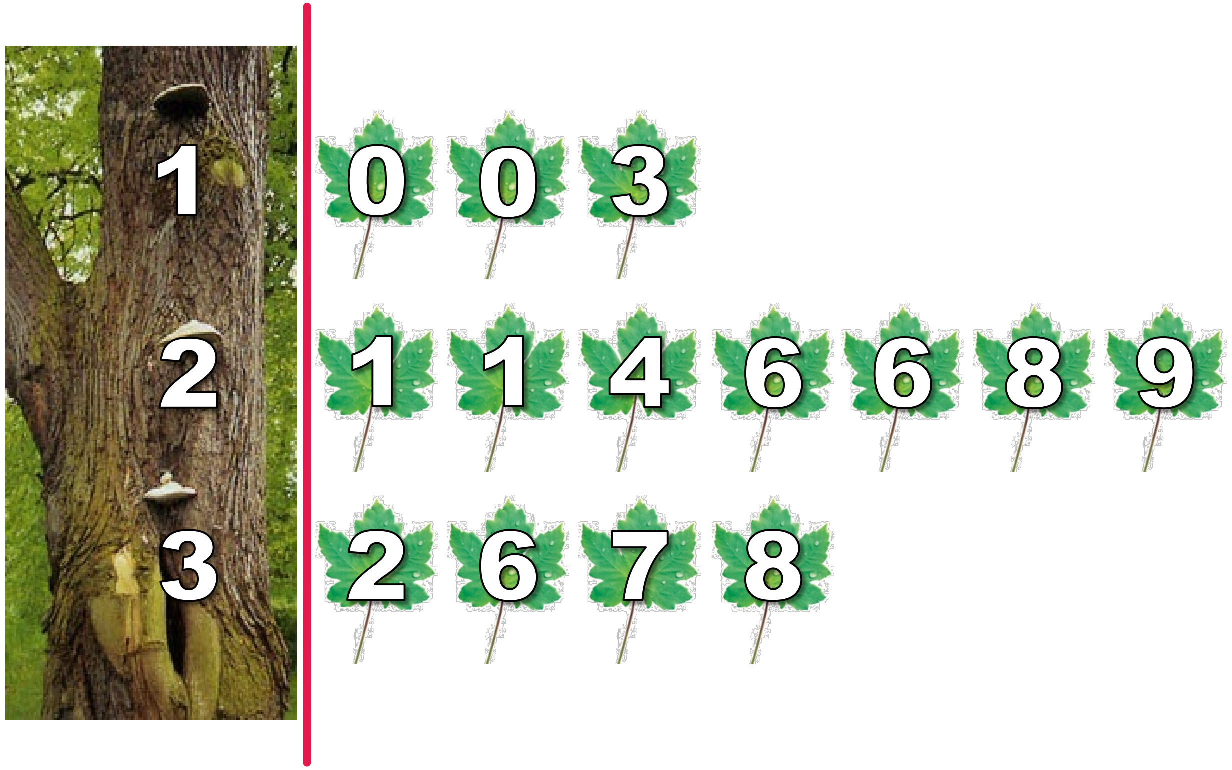
Stängel-Blatt-Diagramm
auch Stamm-Blatt-Diagramm

Urliste

~~32~~, ~~21~~, ~~28~~, ~~10~~, ~~26~~, ~~36~~, ~~21~~, ~~29~~, ~~24~~, ~~38~~, ~~10~~, ~~37~~, ~~13~~, ~~26~~

Stängel-Blatt-Diagramm

1	0 0 3
2	1 1 4 6 6 8 9
3	2 6 7 8



Klasseneinteilung!

https://www.geogebra.org/m/wfmygqha

Stängel-Blatt-Diagramm
auch Stamm-Blatt-Diagramm

RPTU
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Urliste

~~32~~, ~~21~~, ~~28~~, ~~10~~, ~~26~~, ~~36~~, ~~21~~,
~~29~~, ~~24~~, ~~38~~, ~~10~~, ~~37~~, ~~13~~, ~~26~~

Stängel-Blatt-Diagramm

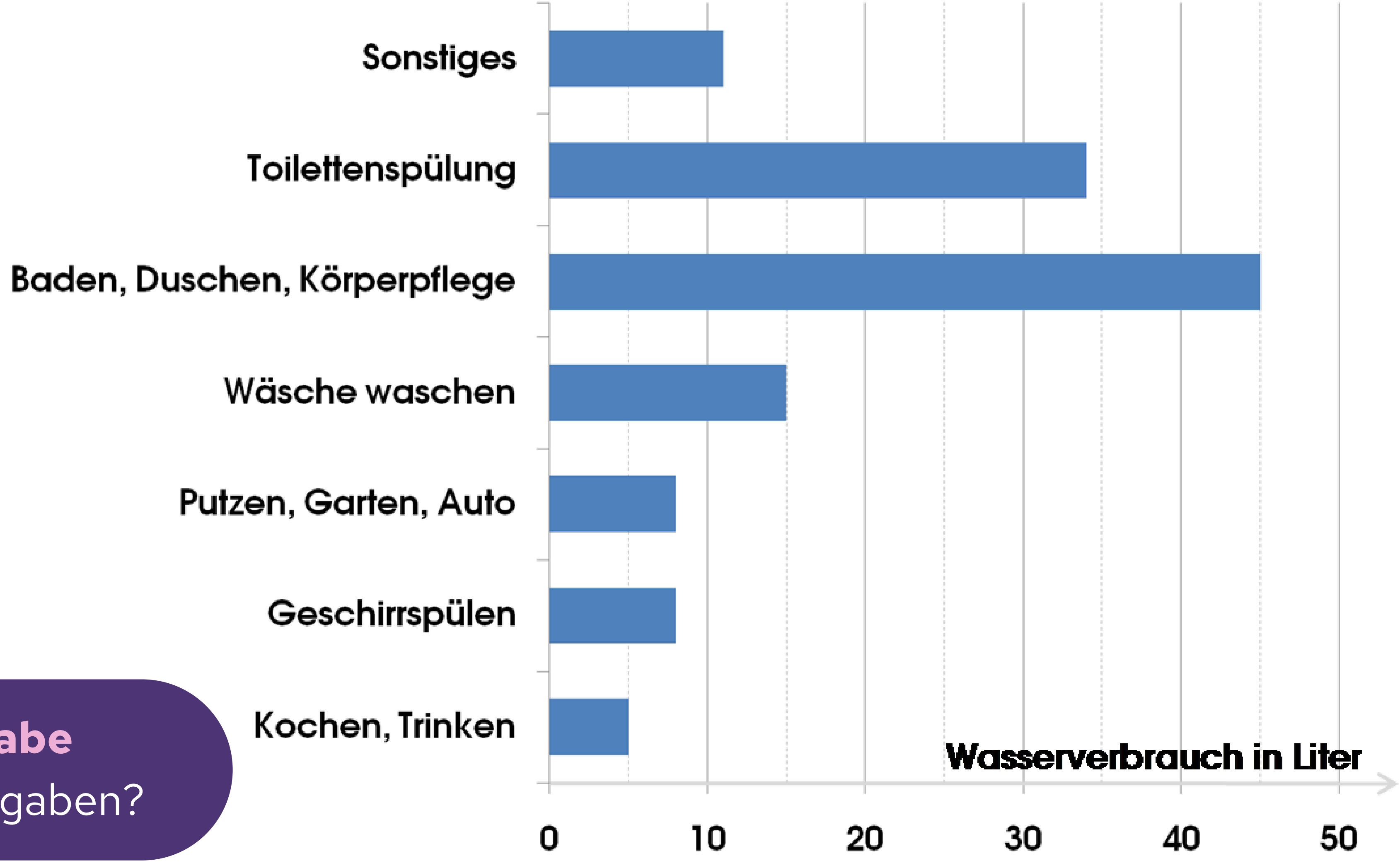
Übergang zum Balkendiagramm

https://www.geogebra.org/m/ekzjfhmg

2.3.4 Balken- / Säulendiagramm

Balkendiagramm

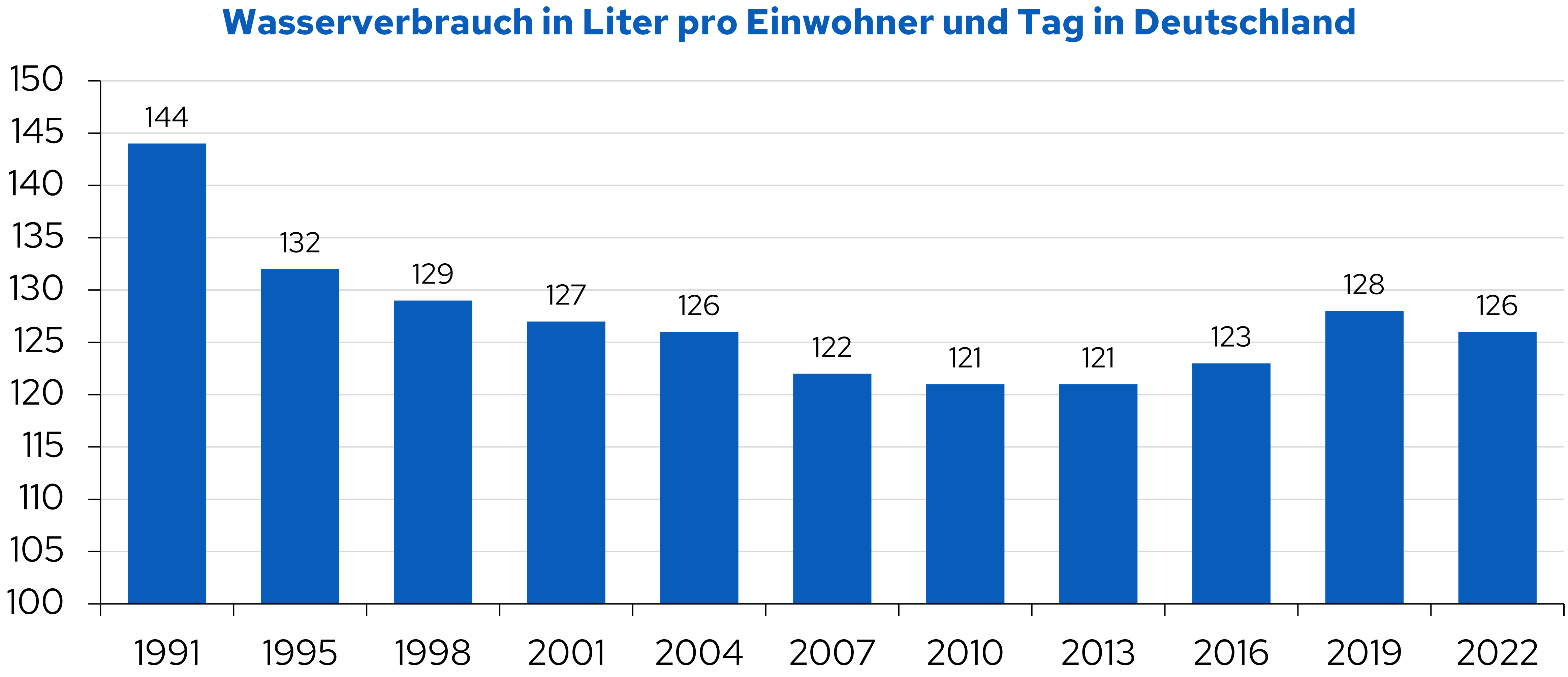
Wasserverbrauch in Liter pro Einwohner und Tag in Deutschland



Präsenzaufgabe

Fehlen hier Angaben?

Säulendiagramm



https://www.destatis.de/DE/Themen/Gesellschaft-Umwelt/Umwelt/Wasserwirtschaft/Tabellen/ww-01-wasserabgabe1991-2022.html

Balken-/Säulendiagramm: Erarbeitung

Situation

Nach einem Memory-Spiel wollen vier Schüler/innen wissen, wer von ihnen gewonnen hat.

 Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin, 4*, 40-44.

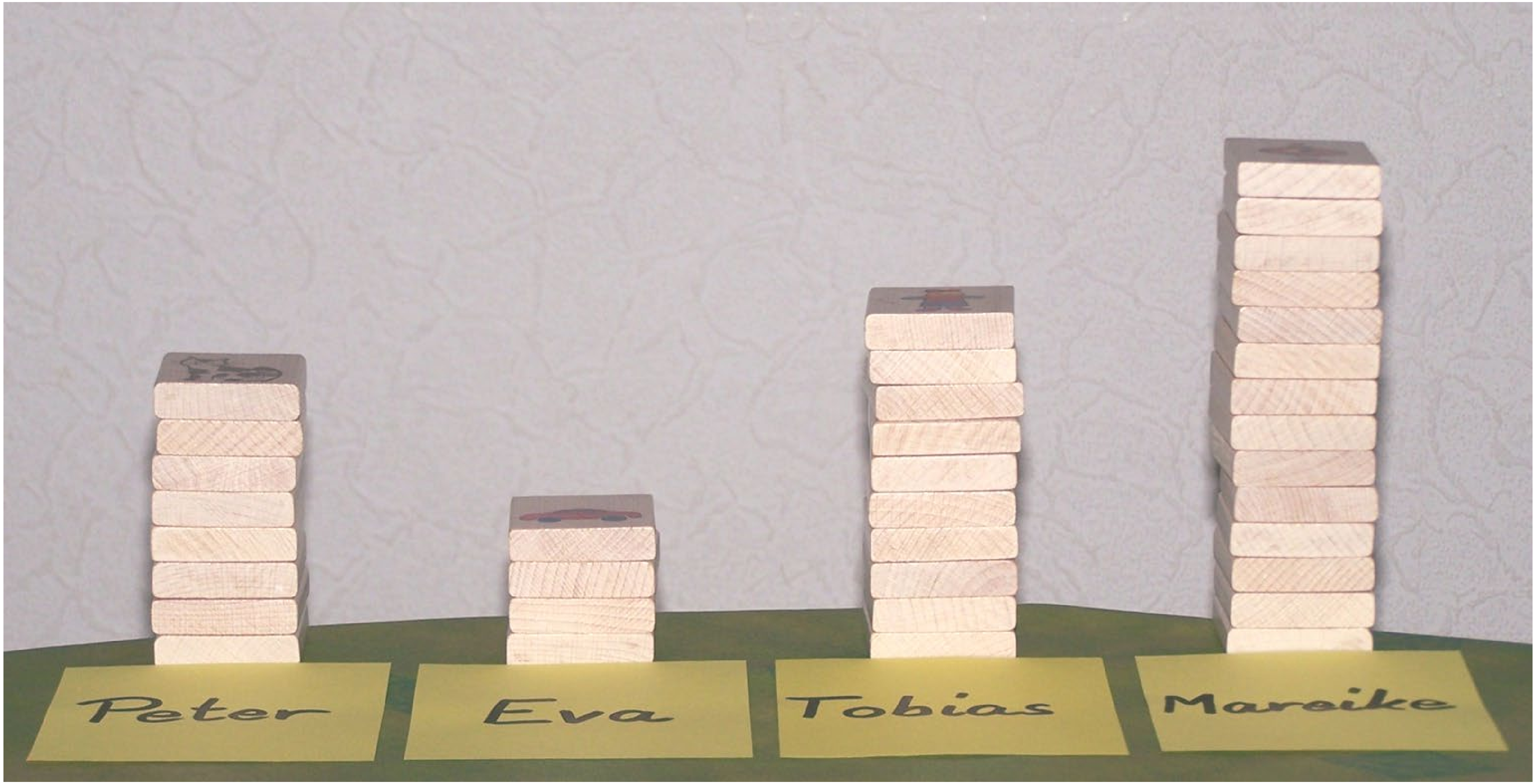
Säulendiagramm: Erarbeitung

Situation

Nach einem Memory-Spiel wollen vier Schüler/innen wissen, wer von ihnen gewonnen hat.

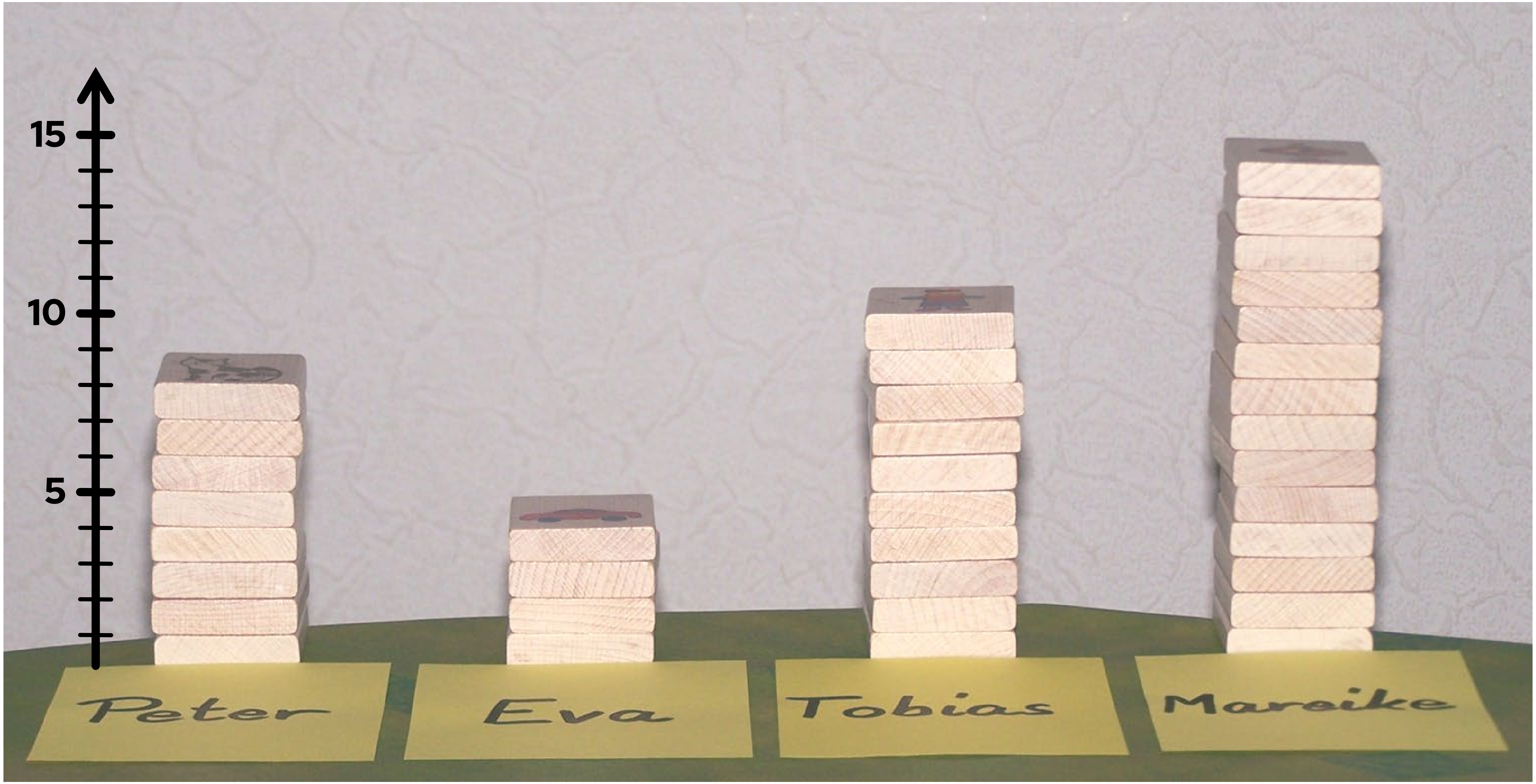
Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin, 4*, 40-44.

Säulendiagramm: Erarbeitung



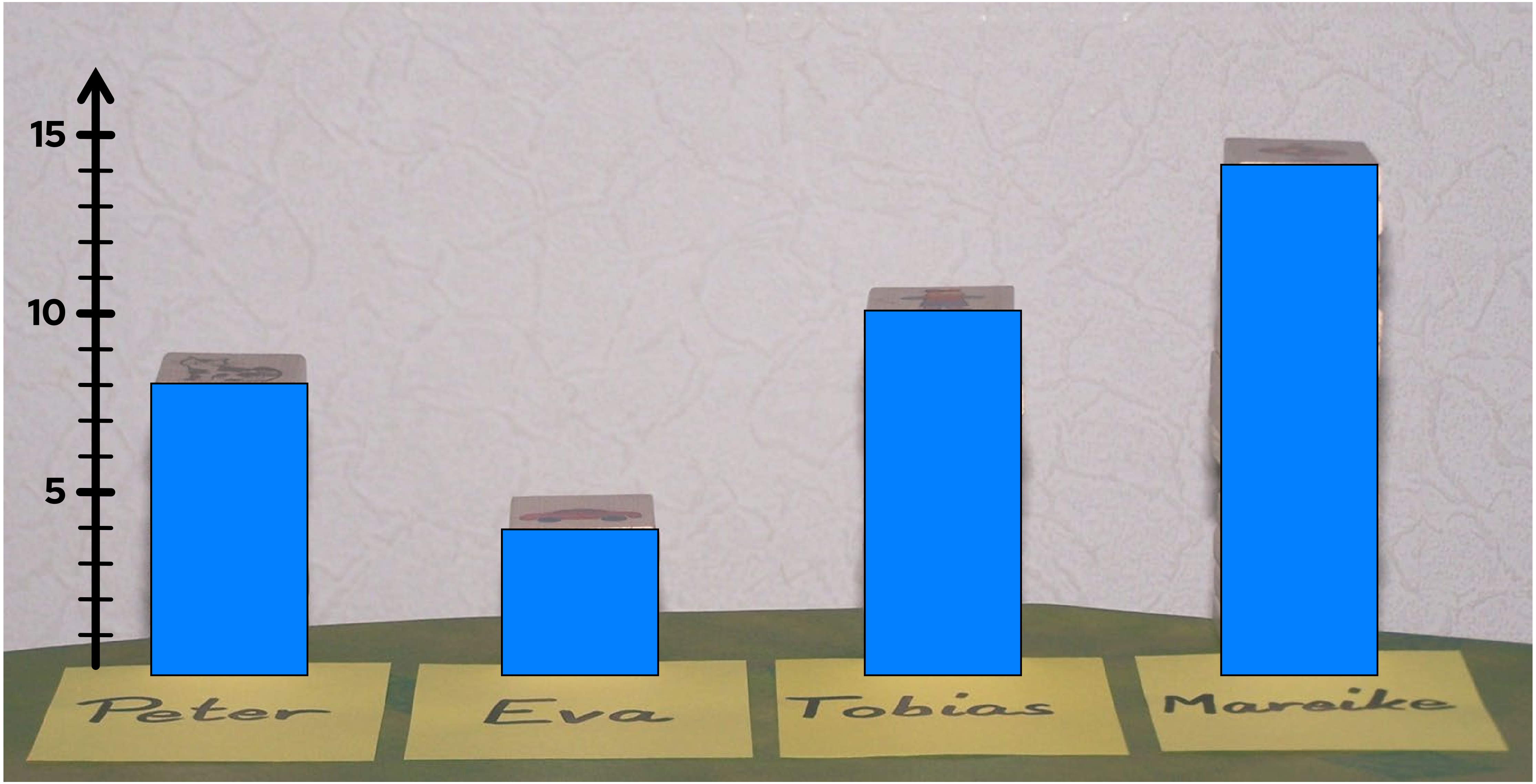
 Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin, 4*, 40-44.

Säulendiagramm: Erarbeitung



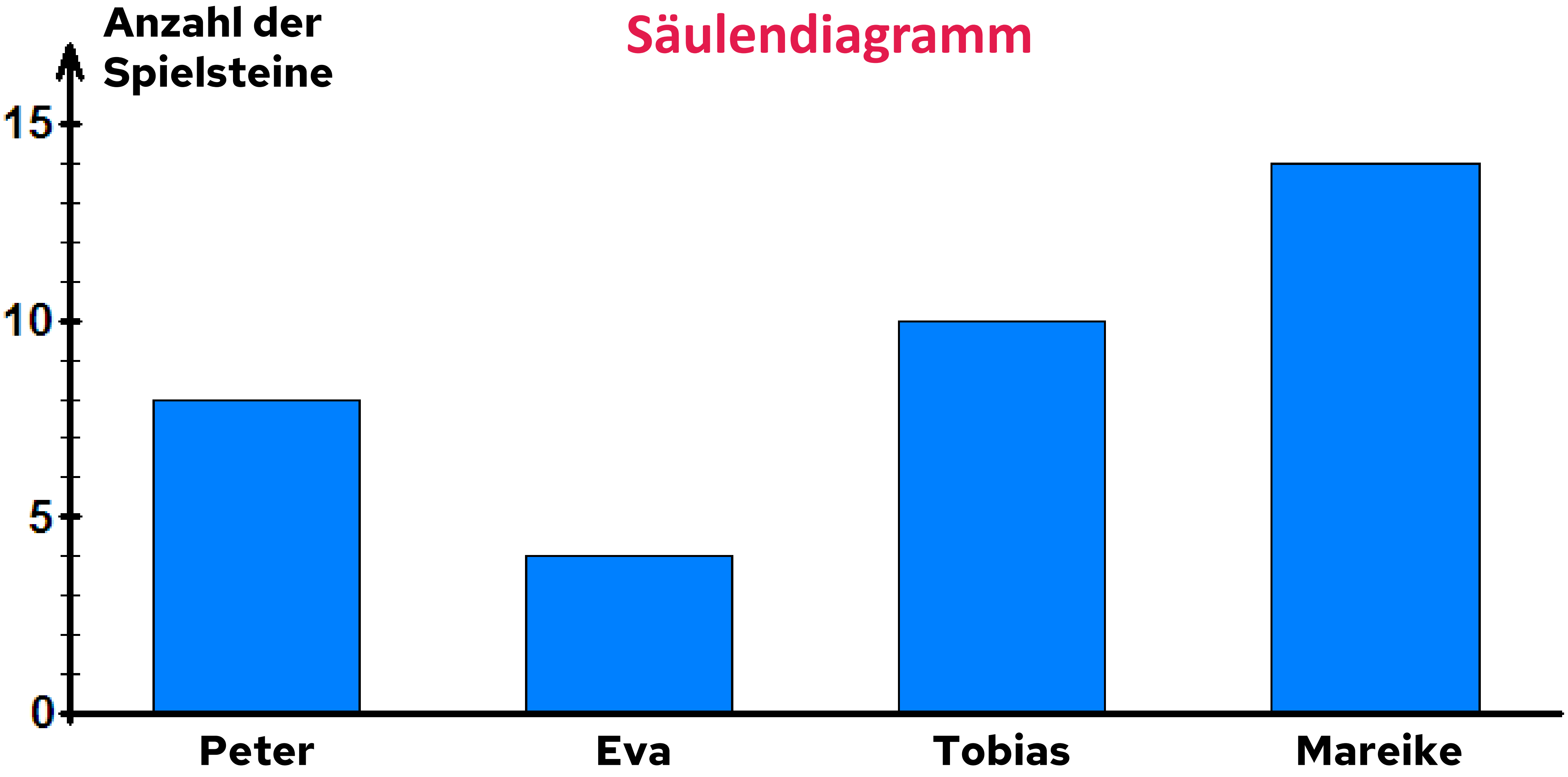
 Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin, 4*, 40-44.

Säulendiagramm: Erarbeitung



Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin, 4*, 40-44.

Säulendiagramm: Erarbeitung



Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin, 4*, 40-44.

Balkendiagramm: Erarbeitung

Situation

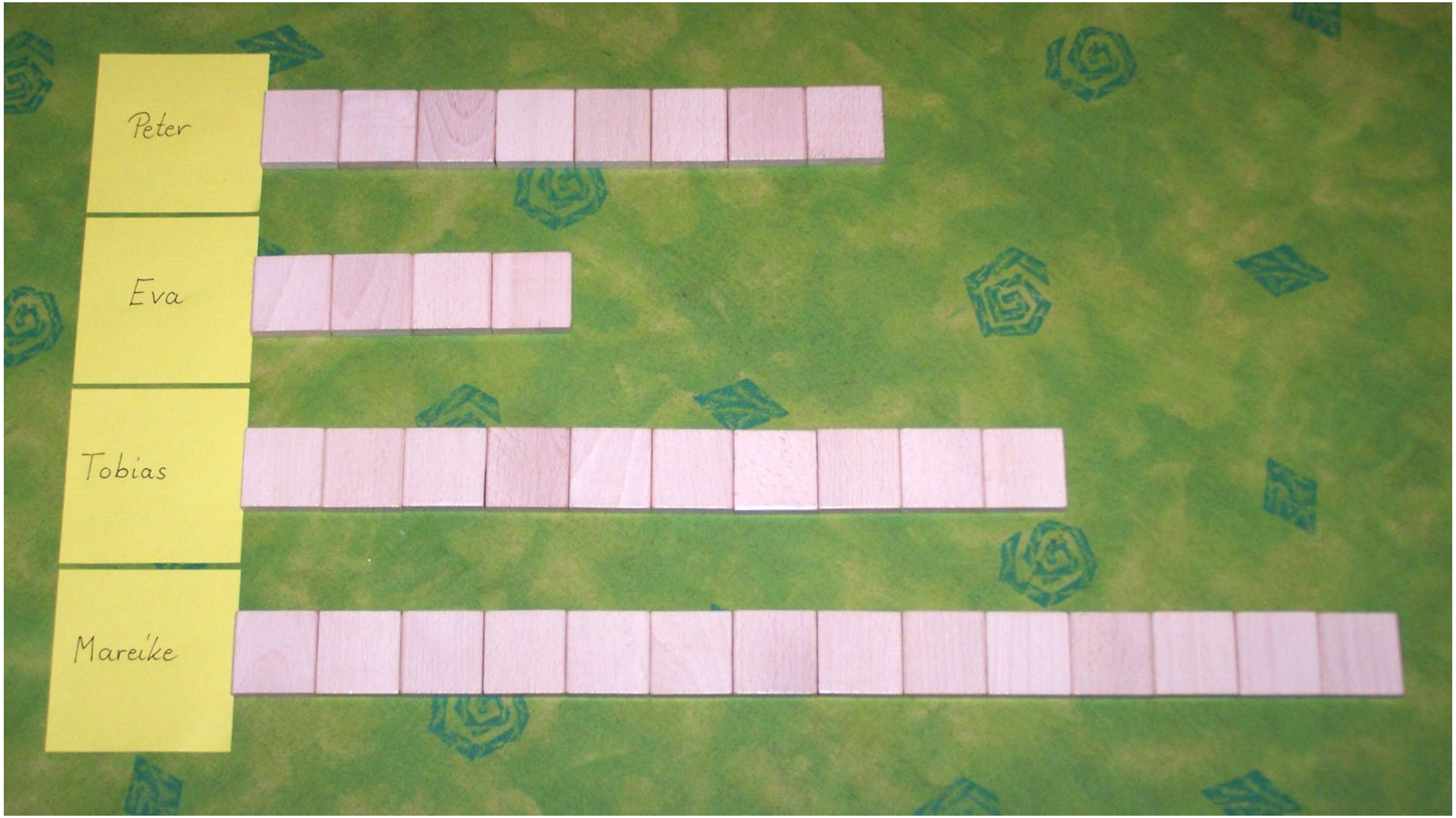
Nach einem Memory-Spiel wollen vier Schüler/innen wissen, wer von ihnen gewonnen hat.

Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin, 4*, 40-44.

Balkendiagramm: Erarbeitung

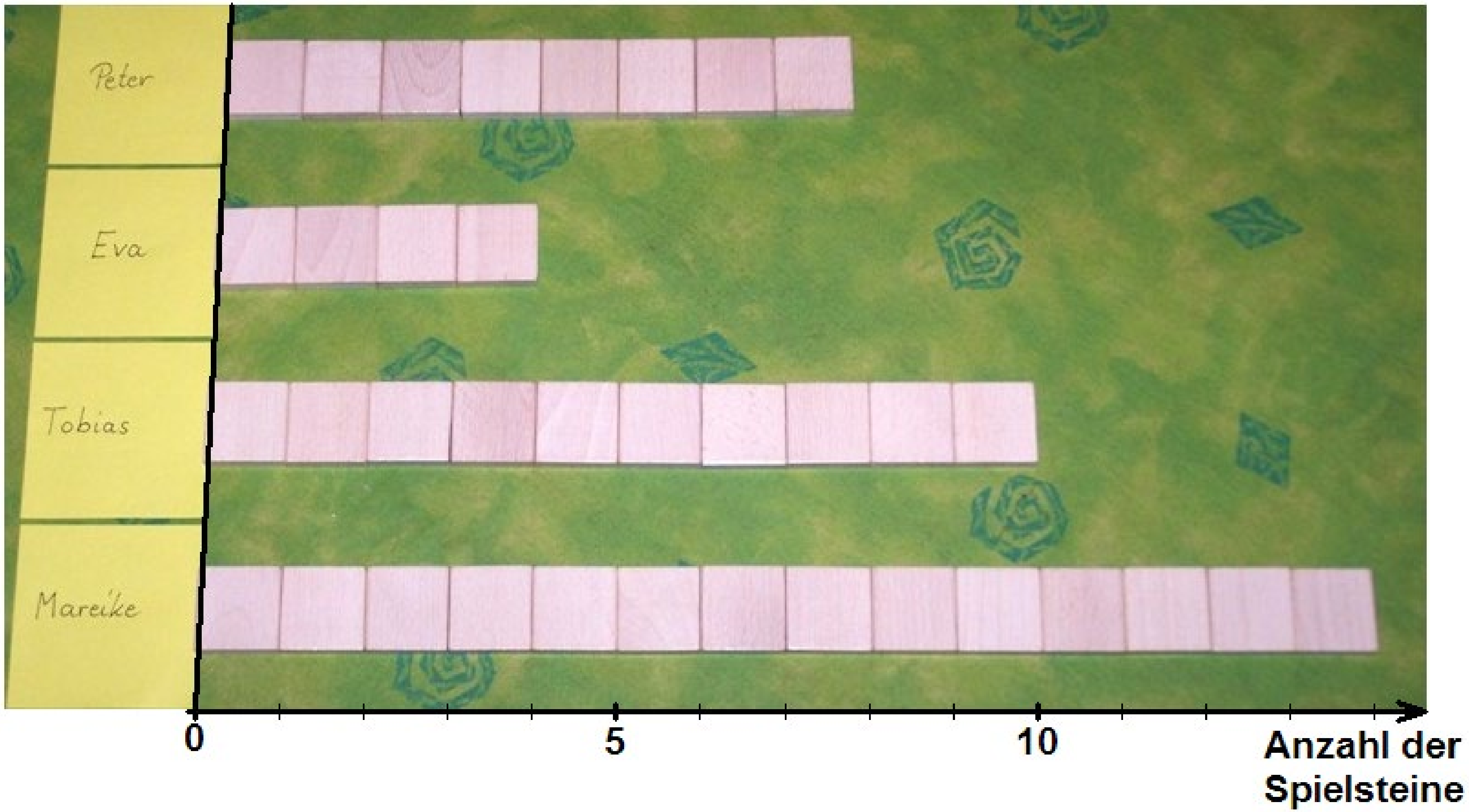
 Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin, 4*, 40-44.

Balkendiagramm: Erarbeitung



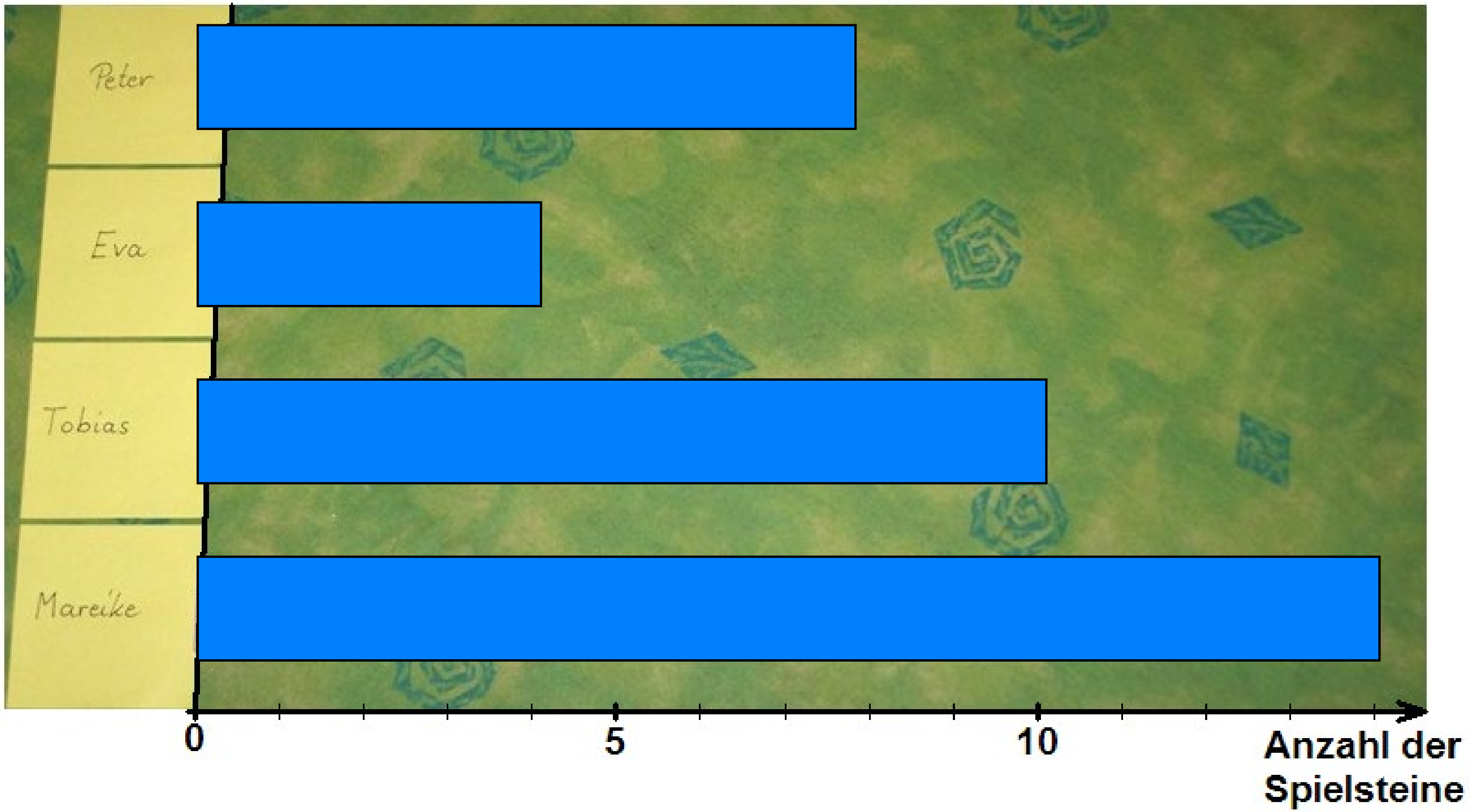
 Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin, 4*, 40-44.

Balkendiagramm: Erarbeitung



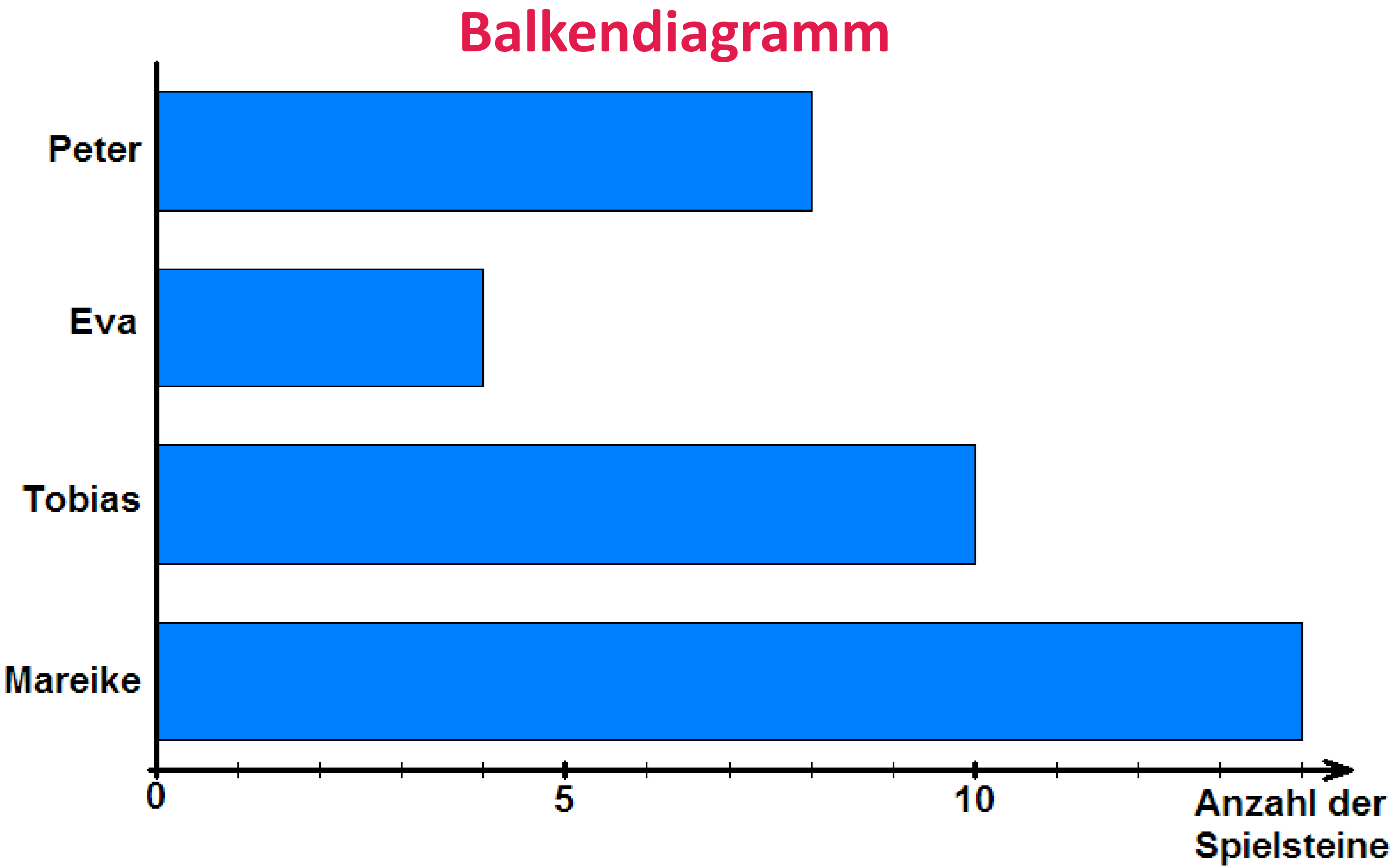
 Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin, 4*, 40-44.

Balkendiagramm: Erarbeitung



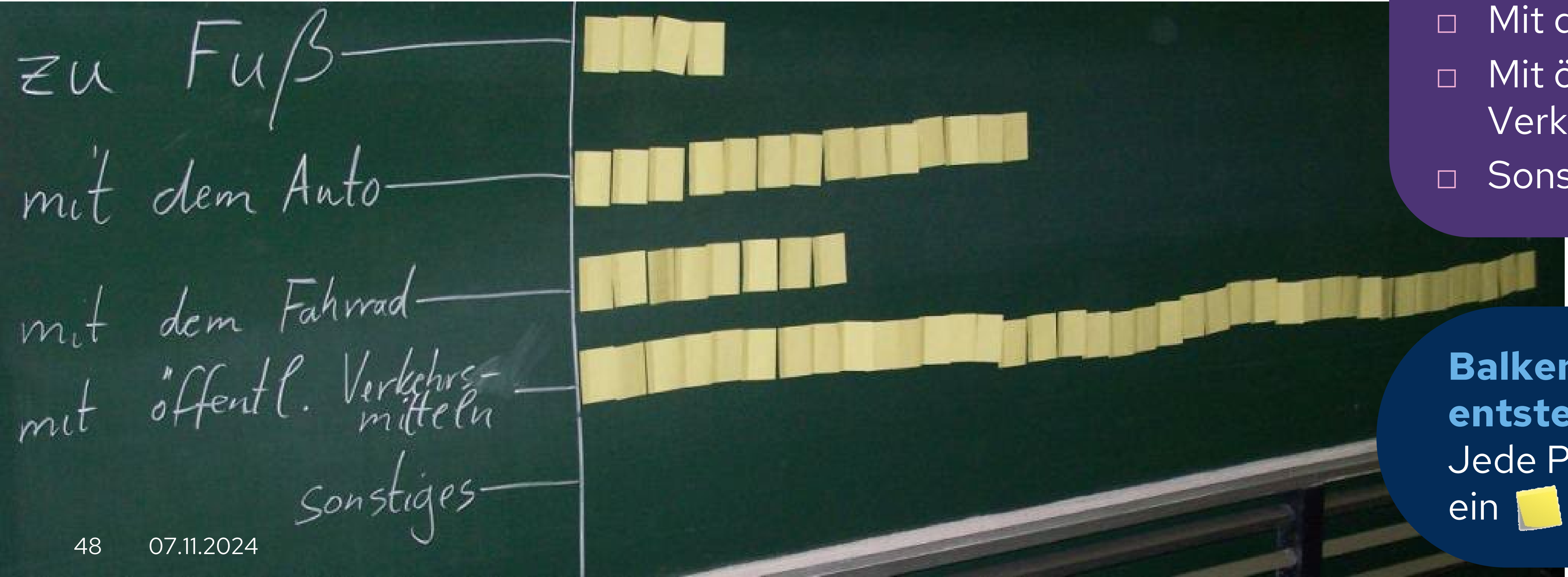
 Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin, 4*, 40-44.

Balkendiagramm: Erarbeitung



Roth, J. (2012). Diagramme erarbeiten – Säulen- und Balkendiagramme aus einer Spielsituation entwickeln. *Fördermagazin*, *4*, 40-44.

Balken-/Säulendiagramm: Erarbeitung



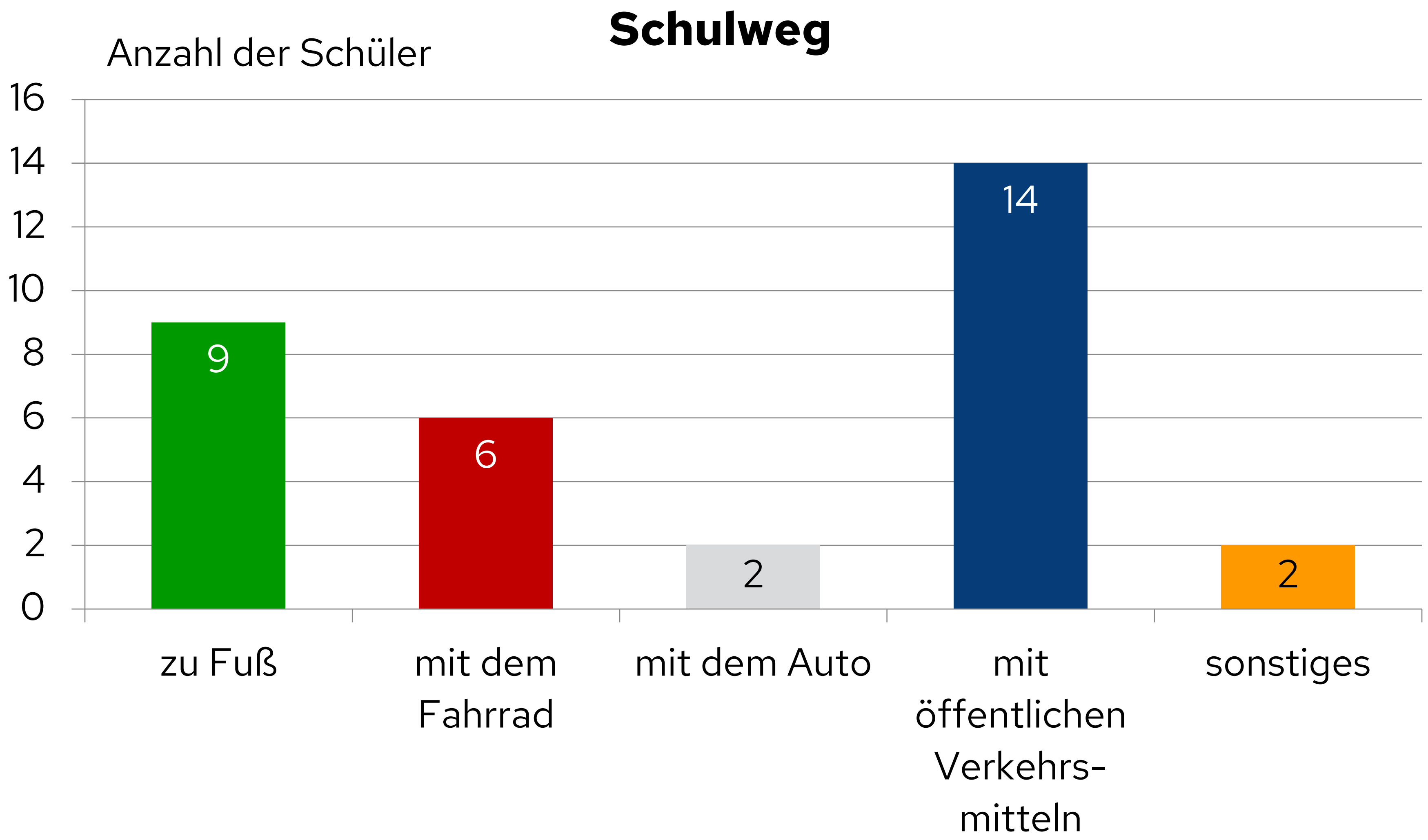
Umfrage

Wie kommen Sie in der Regel zur Uni?

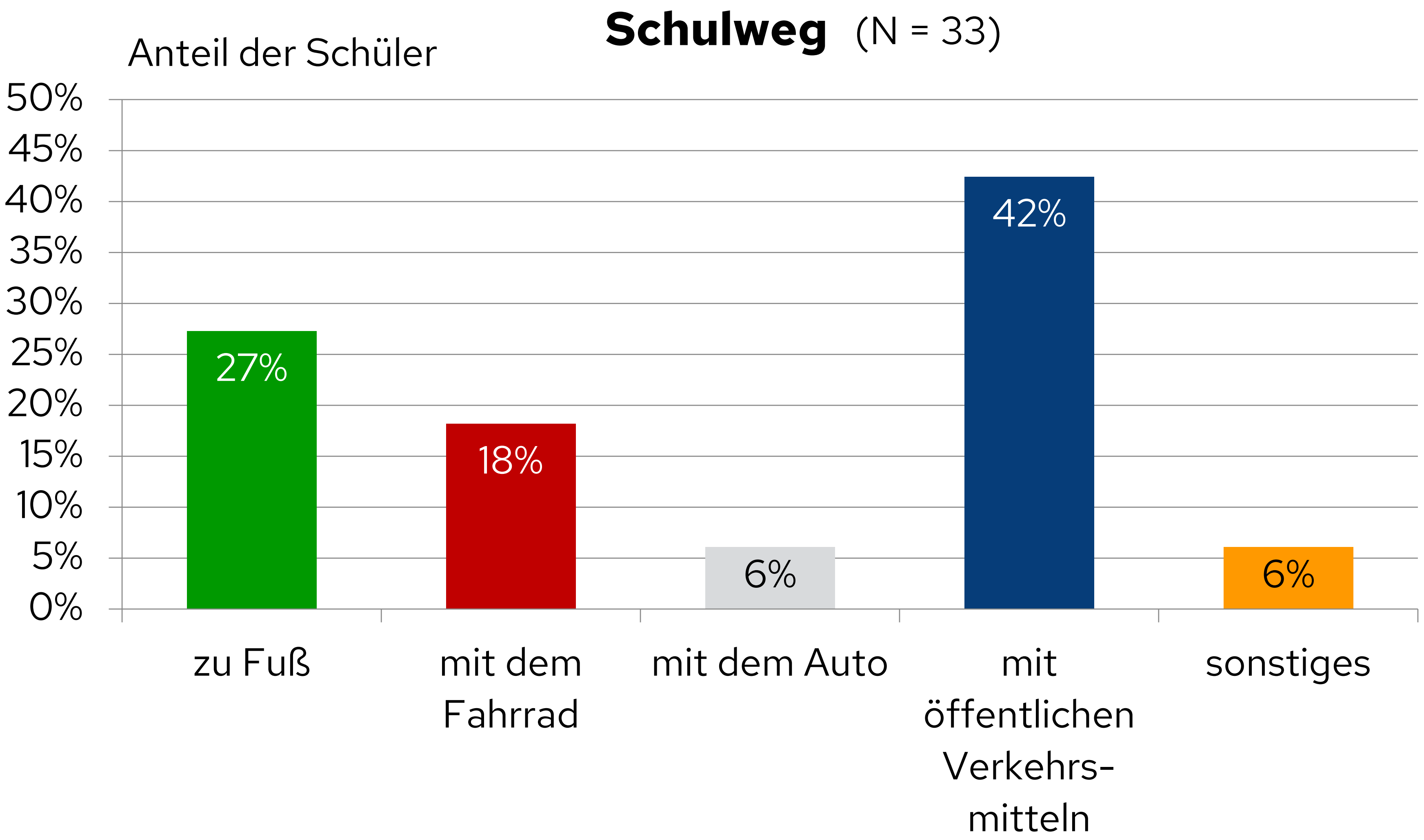
- ☐ Zu Fuß
- ☐ Mit dem Auto
- ☐ Mit dem Fahrrad
- ☐ Mit öffentlichen Verkehrsmitteln
- ☐ Sonstiges

Balkendiagramm entstehen lassen: Jede Person erhält ein Post-It.

Säulendiagramm

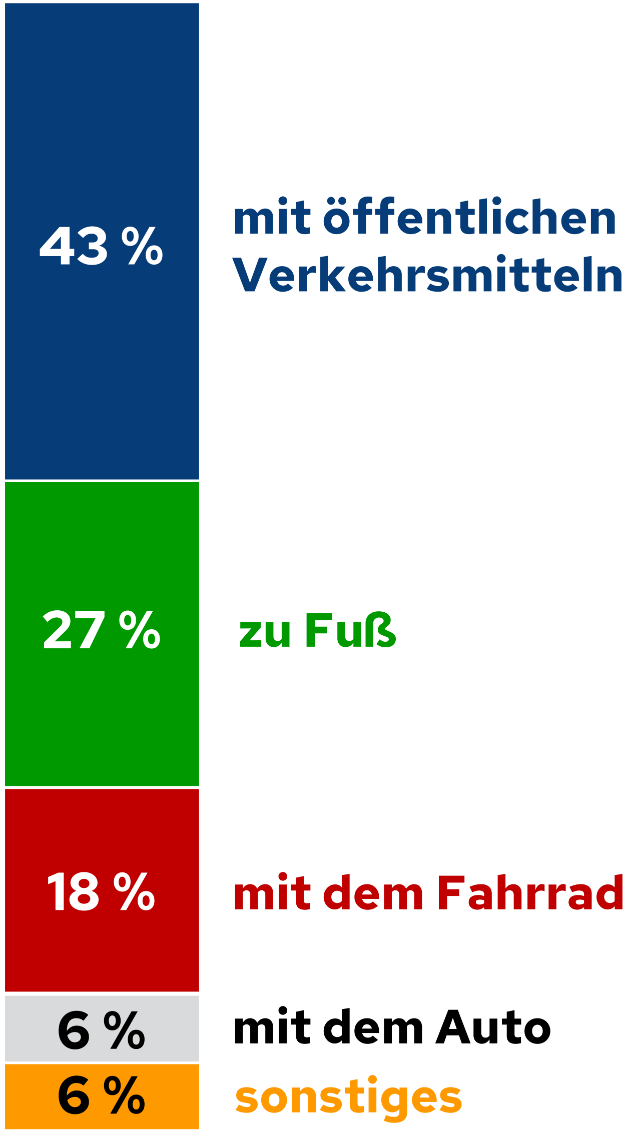


Säulendiagramm

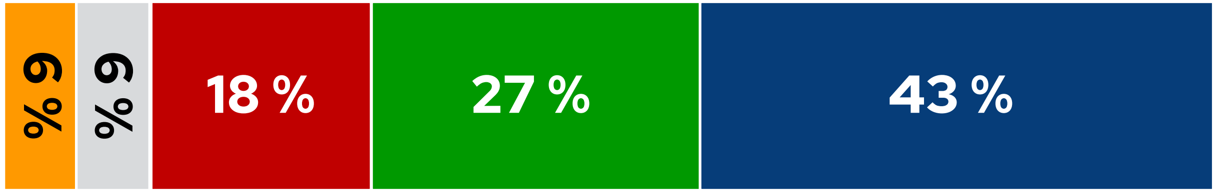


2.3.5 Block- / Streifendiagramm

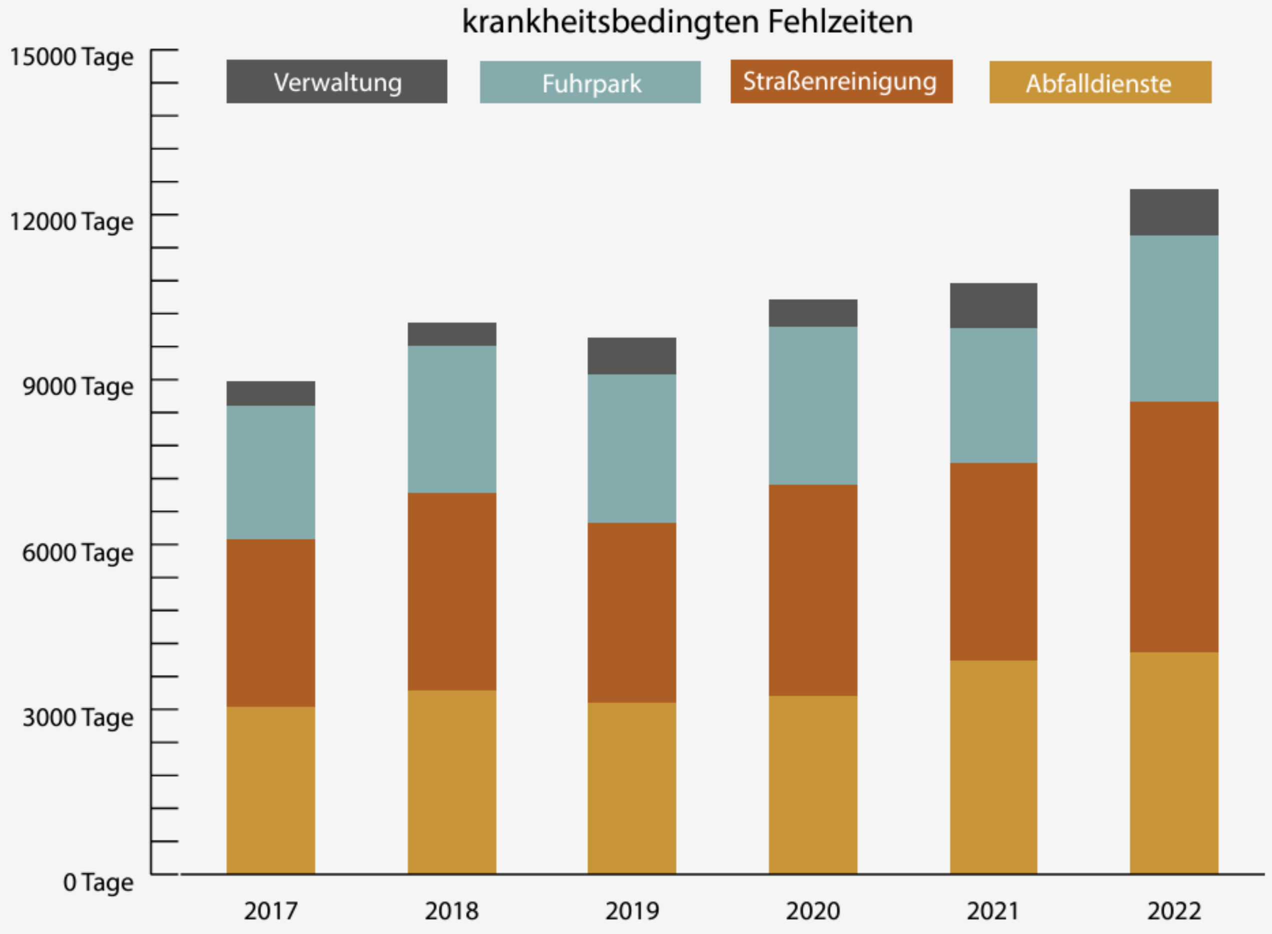
Block- bzw. Streifendiagramm

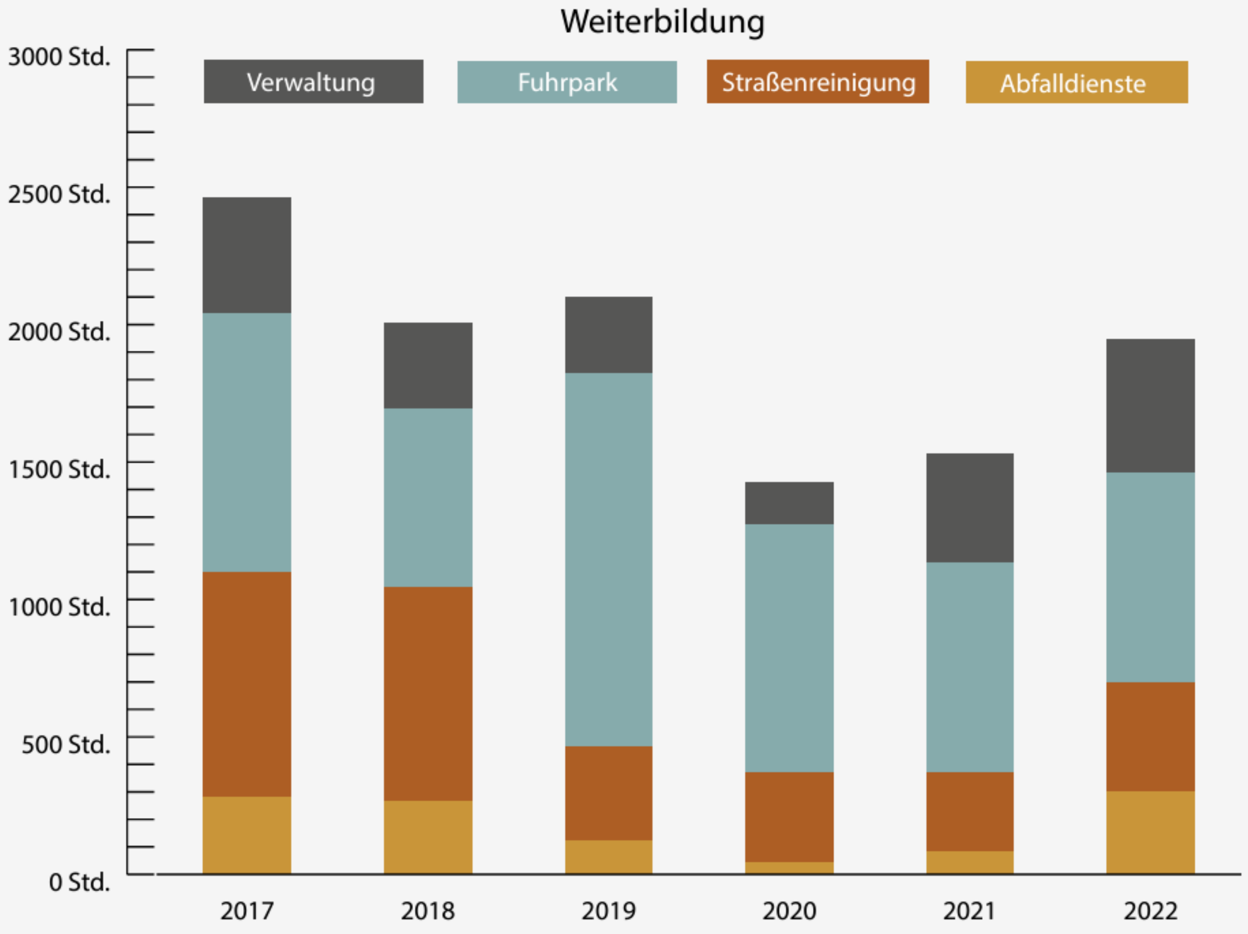


Schulweg
N = 33



Blockdiagramm

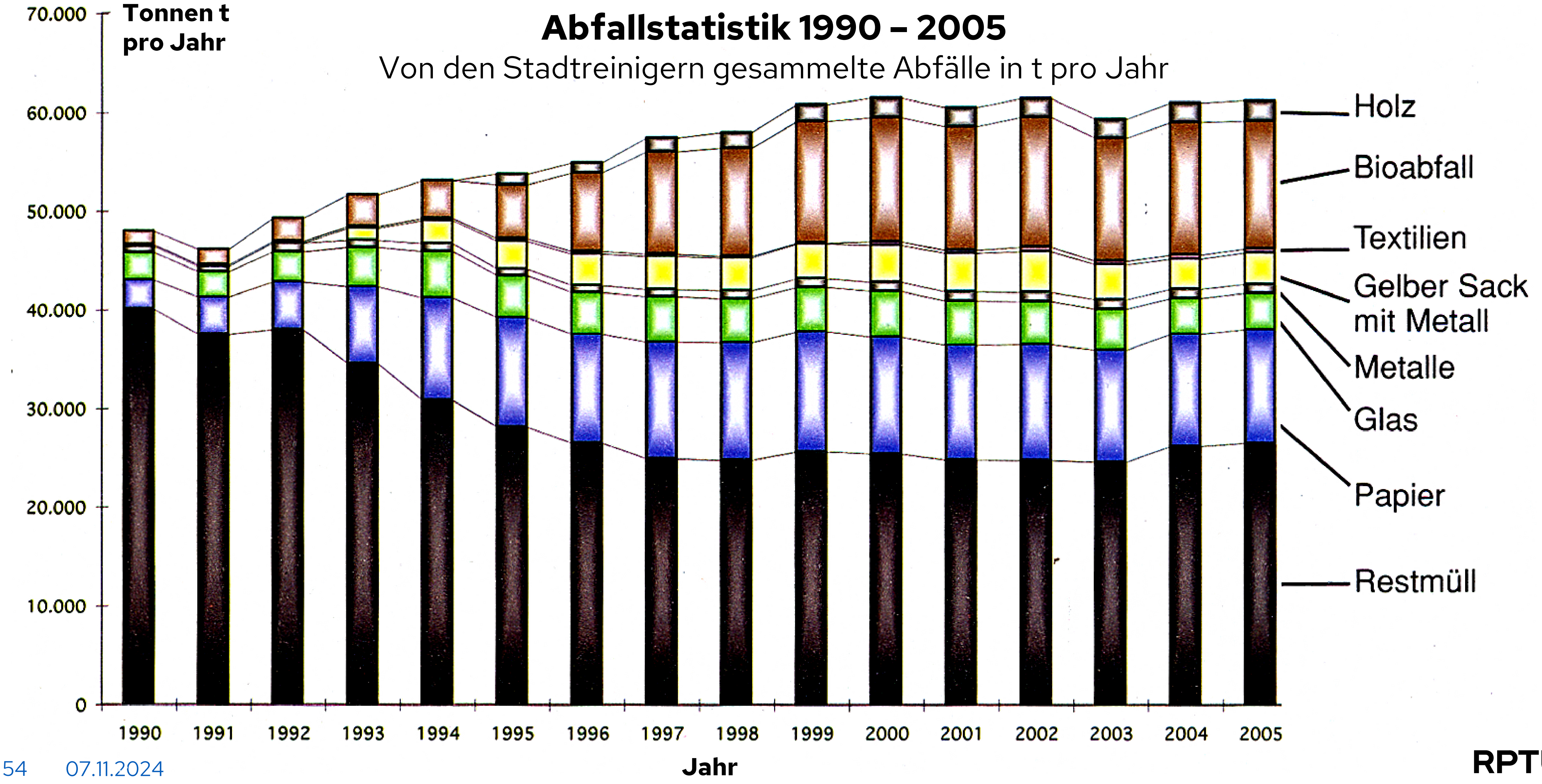




https://www.wuerzburg.de/themen/umwelt-klima/abfall-und-stadtreinigung/unser-service/m_575996 → S. 51

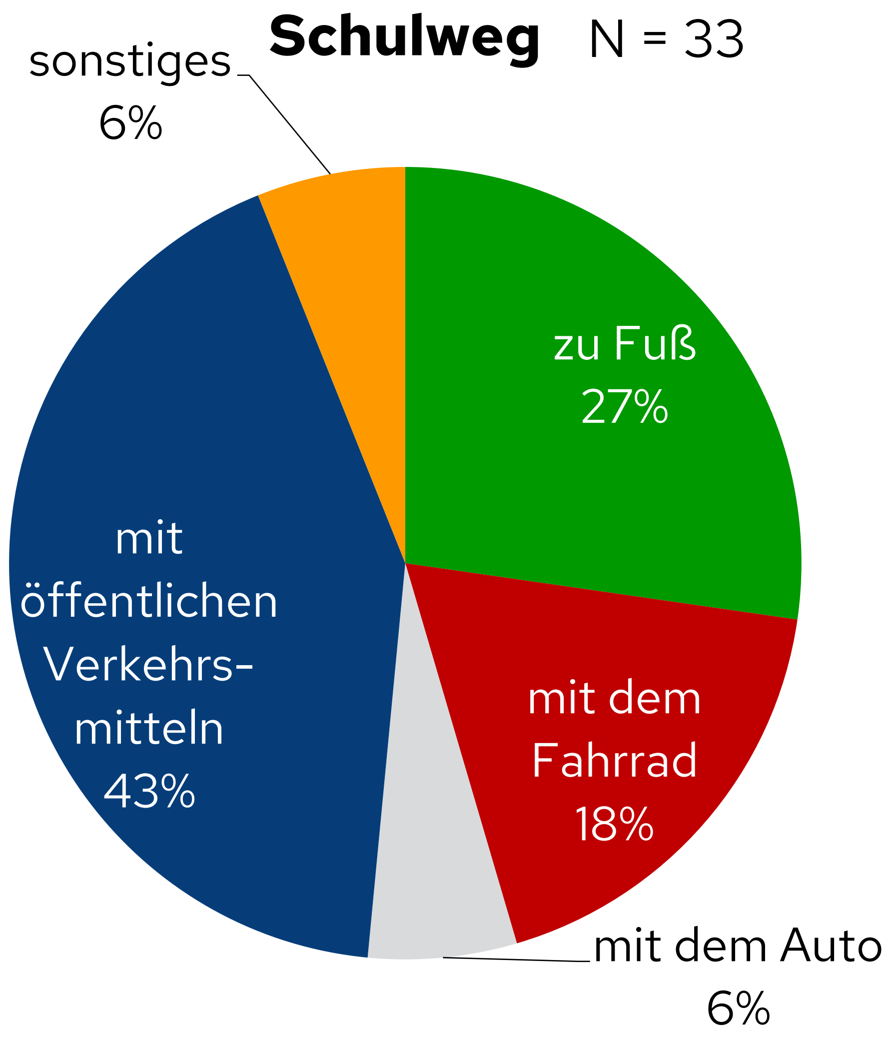
Blockdiagramm

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

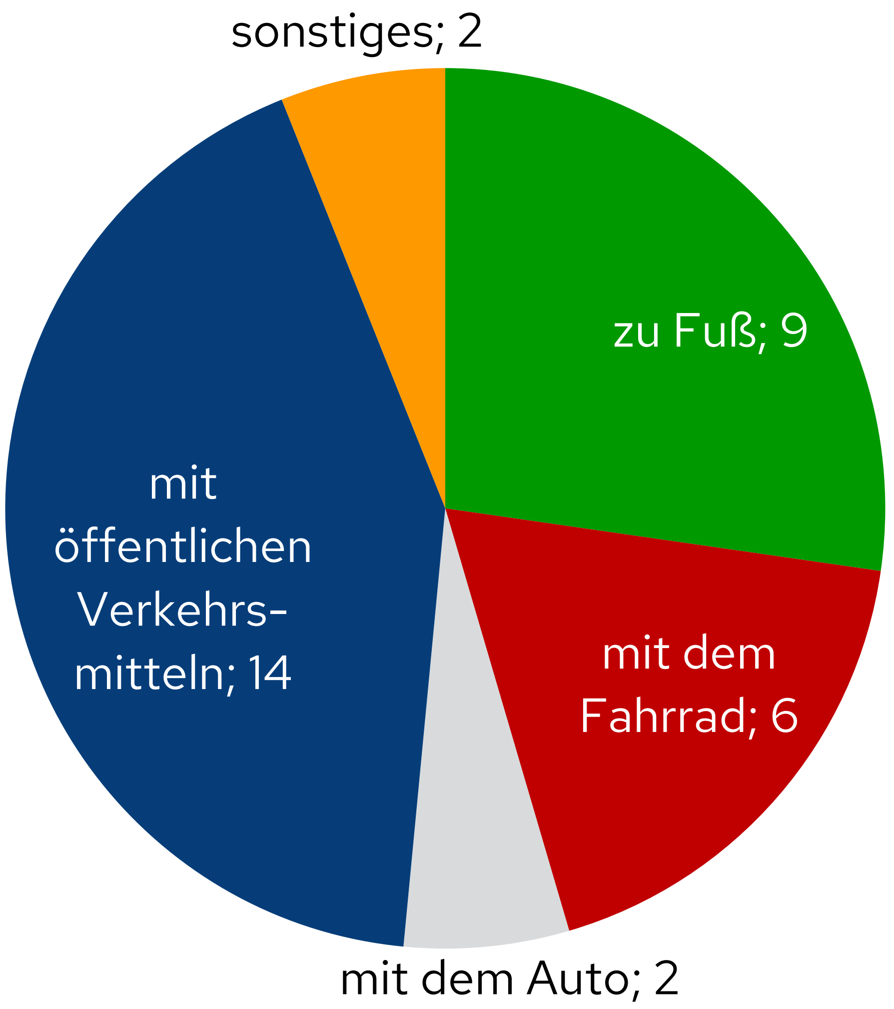


2.3.6 Kreis- / Tortendiagramm

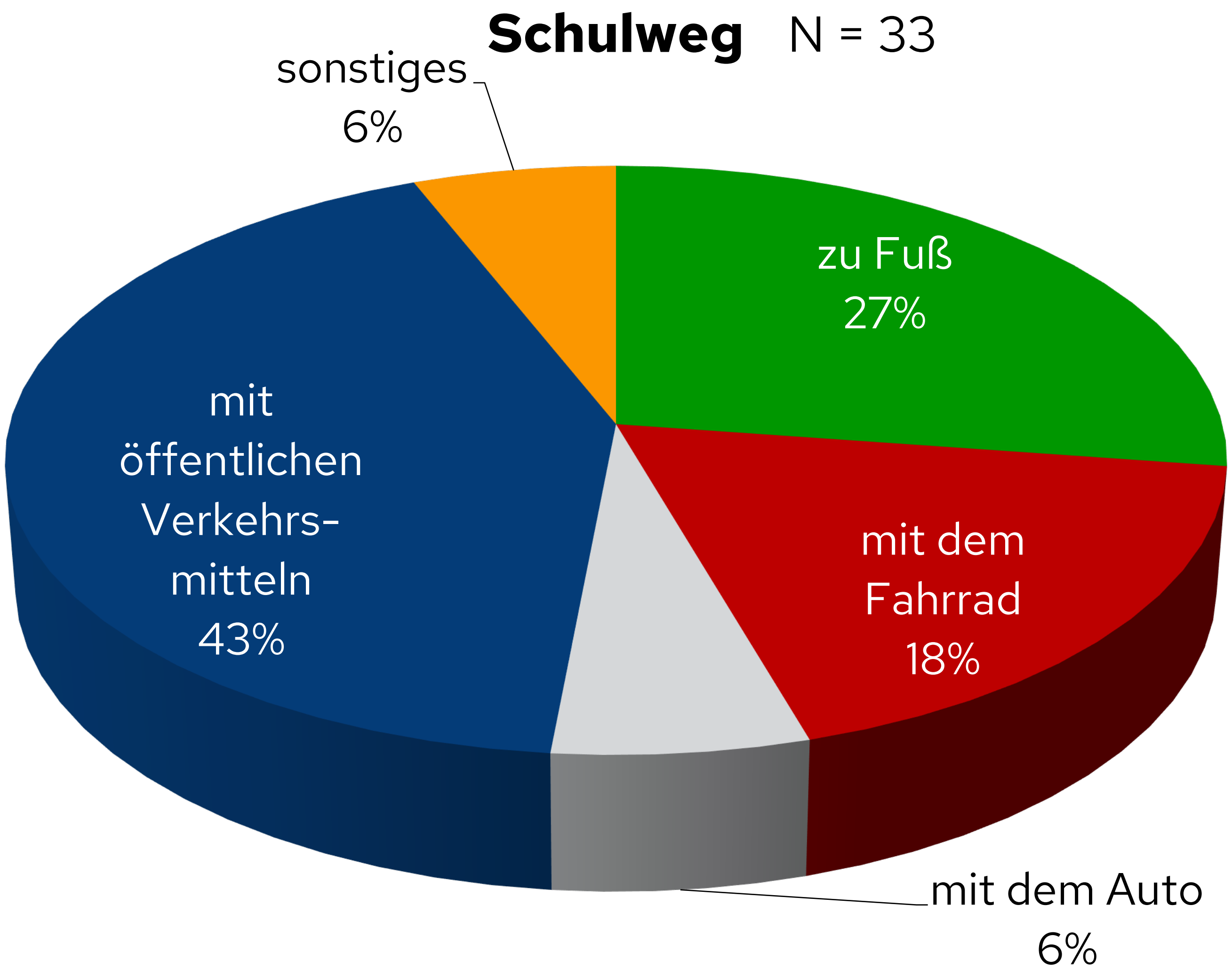
Kreisdiagramm



Kreisdiagramm



Kreisdiagramm



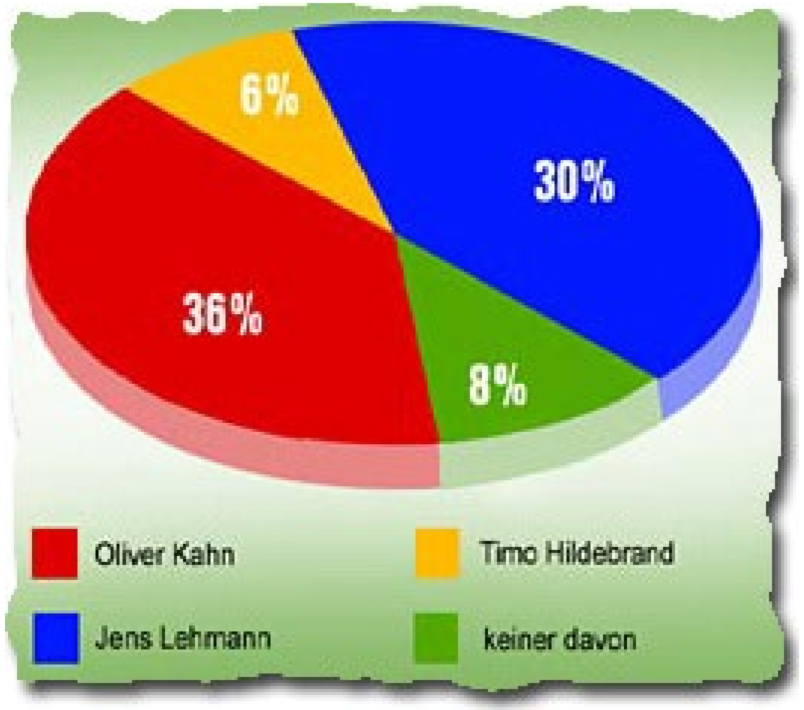
Bildprobleme oder „Fast richtig“

Die Sonntags-Frage zur WM

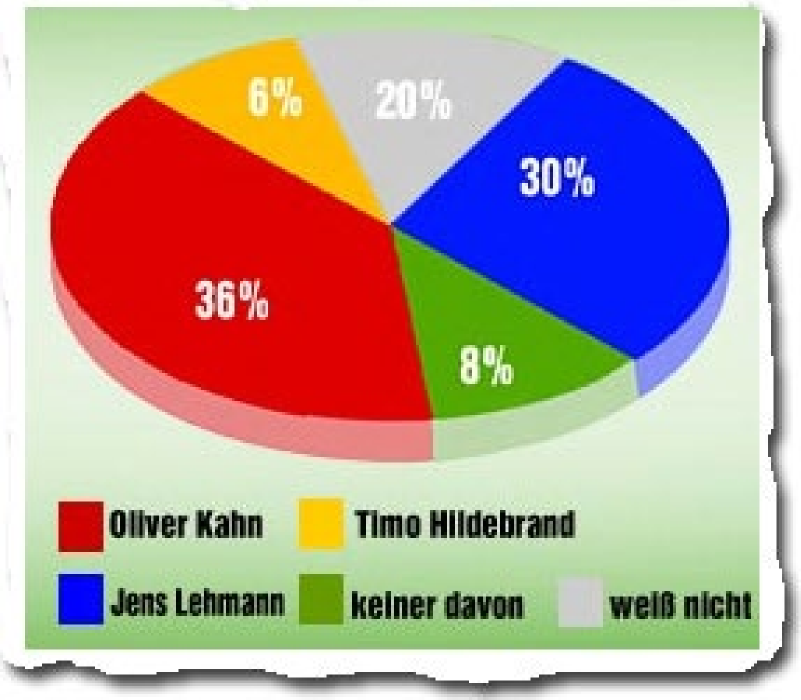
Nur 5 Prozent sind sehr zufrieden mit Klinsmann

Bildprobleme oder „Fast richtig“

Wer soll bei der WM in den Kasten?



Zu 100 Prozente fehlende Angaben „weiß nicht"



2.3.7 Piktogramm

Piktogramm

Beispiel

Bier-Produktion 1995
(in Mio. hl)

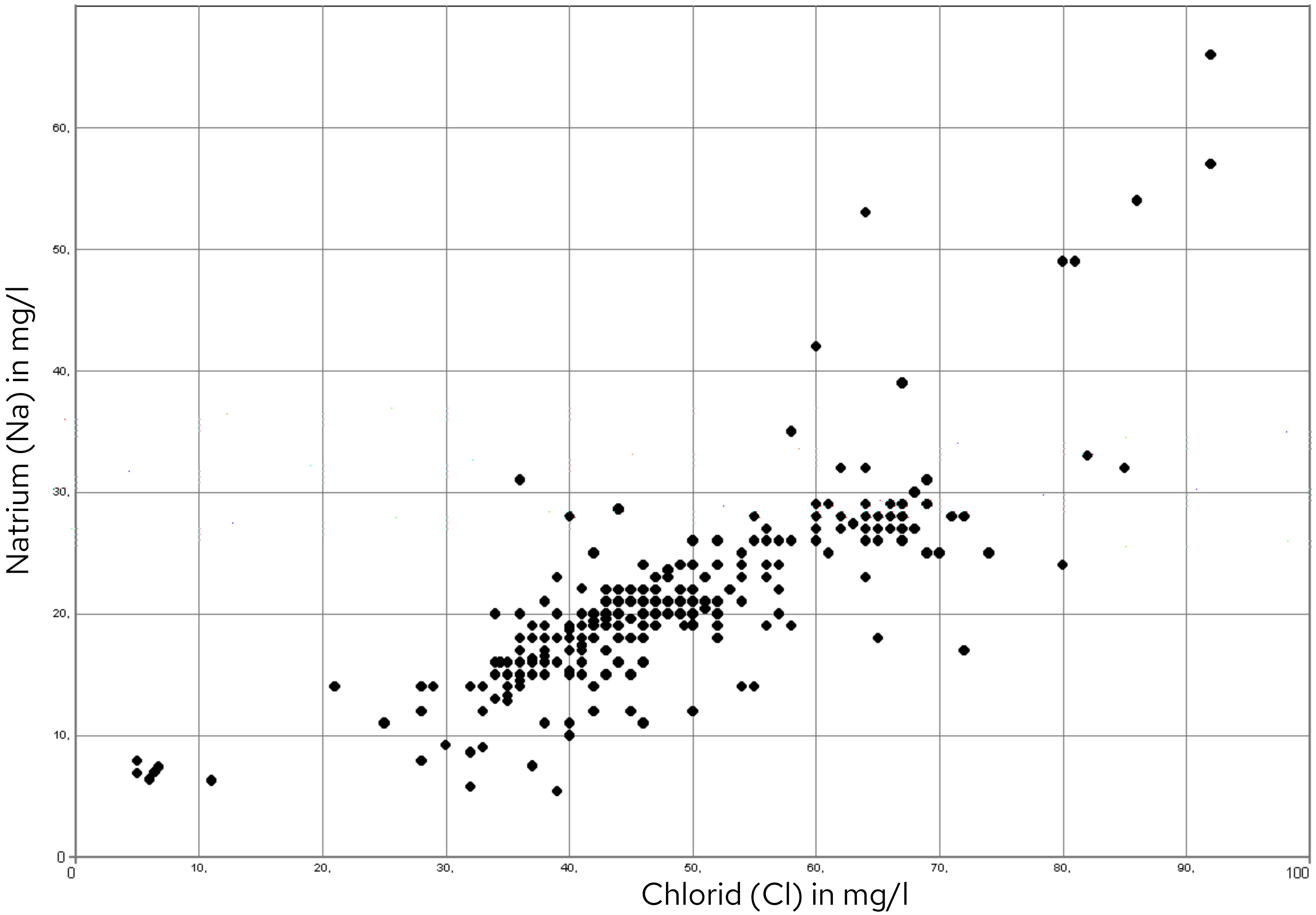
2.3.8 Streudiagramm (Punktwolke, Scatterplot)

Streudiagramm (Punktwolke, Scatterplot)

Zweidimensionale Verteilung
Gemeinsame Verteilung zweier Merkmale

Ziel
Suche nach funktionalem Zusammenhang

Beziehungsdiagramm Chlorid (Cl) ↔ Natrium (Na)

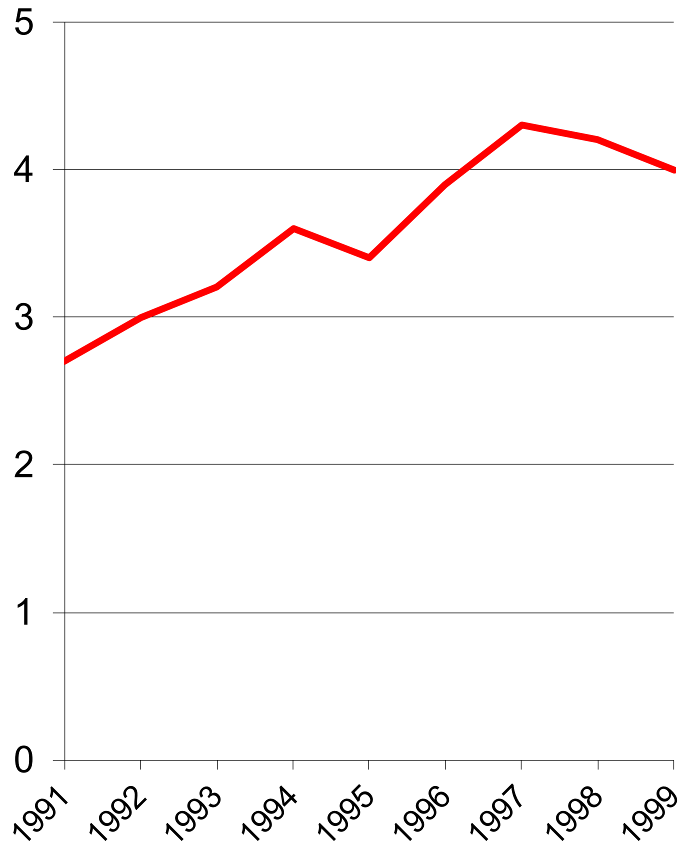


2.3.9 Liniendiagramm / (Zacken-)Kurven

Liniendiagramm / (Zacken-)Kurven

Liniendiagramm

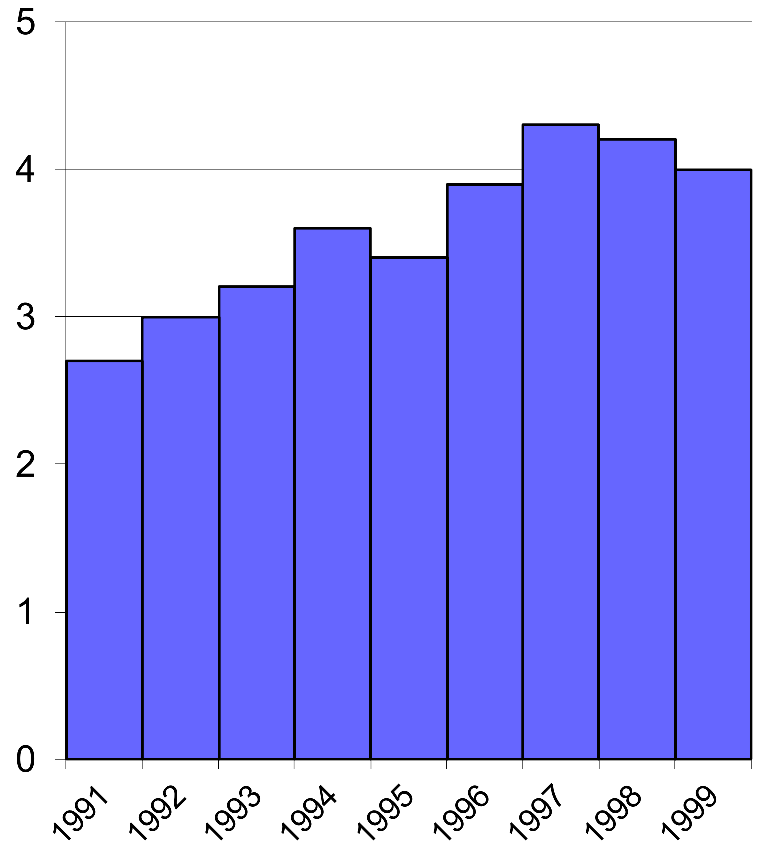
- Wird auch Polygonzug genannt.
- Ausgangspunkt sind die Daten eines Säulendiagramms.
- Die Kurve stellt keine stetige Funktion dar.
- Wird in der Regel bei Zeitreihen angewendet.



Liniendiagramm / (Zacken-)Kurven

Liniendiagramm

- Wird auch Polygonzug genannt.
- Ausgangspunkt sind
  die Daten eines Säulendiagramms.
- Die Kurve stellt keine stetige Funktion dar.
- Wird in der Regel bei Zeitreihen
  angewendet.

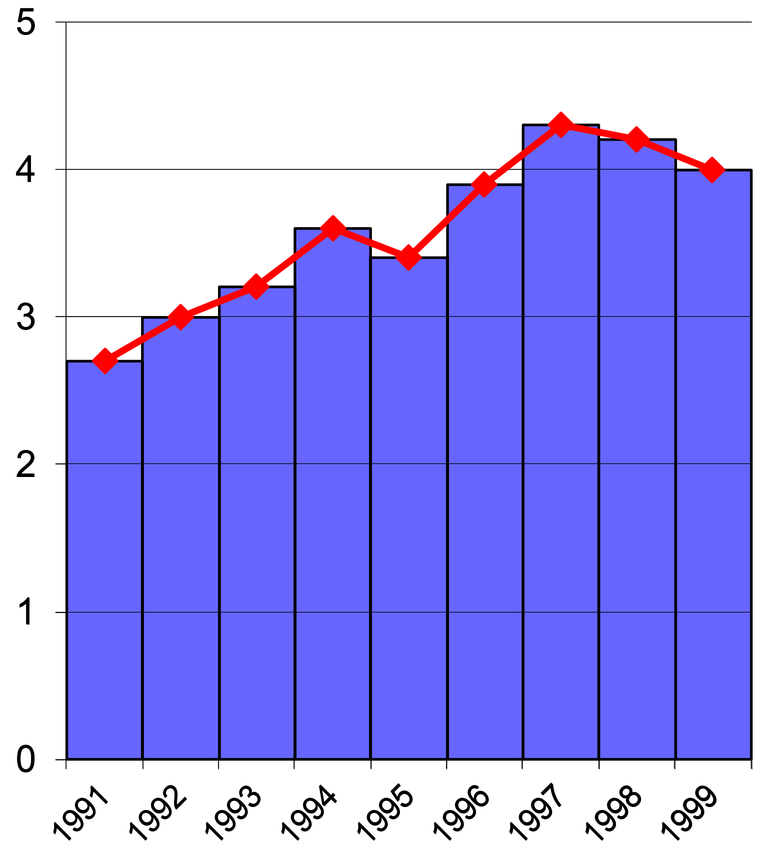


Liniendiagramm / (Zacken-)Kurven

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Liniendiagramm

- Wird auch Polygonzug genannt.
- Ausgangspunkt sind
  die Daten eines Säulendiagramms.
- Die Kurve stellt keine stetige Funktion dar.
- Wird in der Regel bei Zeitreihen
  angewendet.

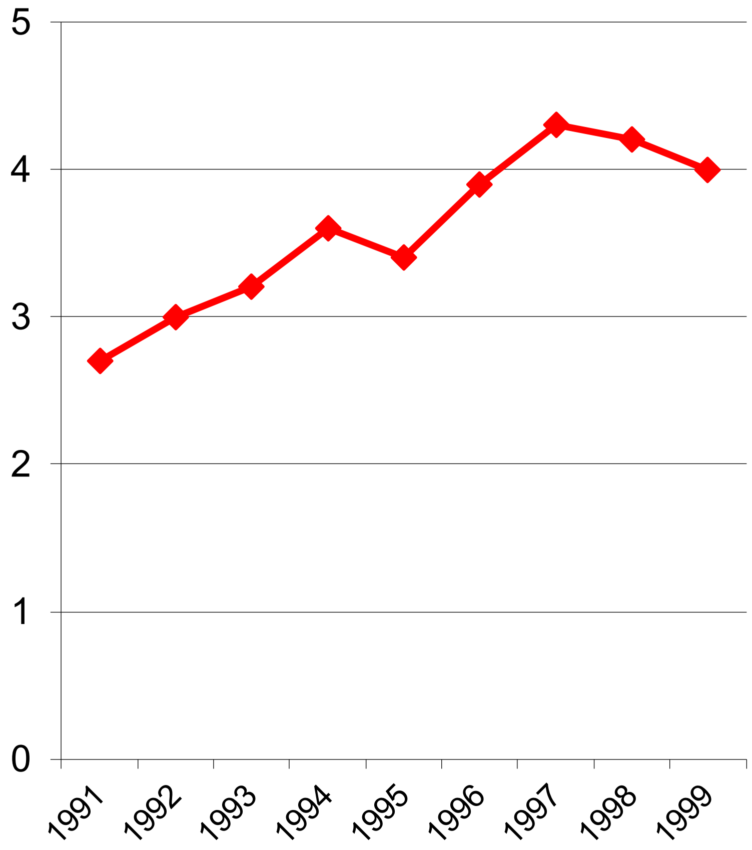


RPTU

Liniendiagramm / (Zacken-)Kurven

Liniendiagramm

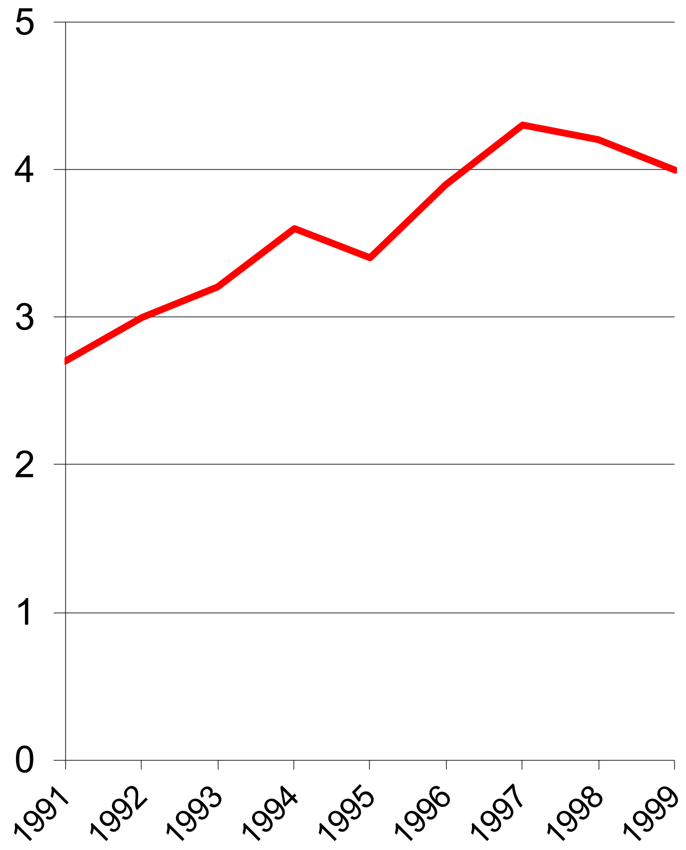
- Wird auch Polygonzug genannt.
- Ausgangspunkt sind
  die Daten eines Säulendiagramms.
- Die Kurve stellt keine stetige Funktion dar.
- Wird in der Regel bei Zeitreihen angewendet.



Liniendiagramm / (Zacken-)Kurven

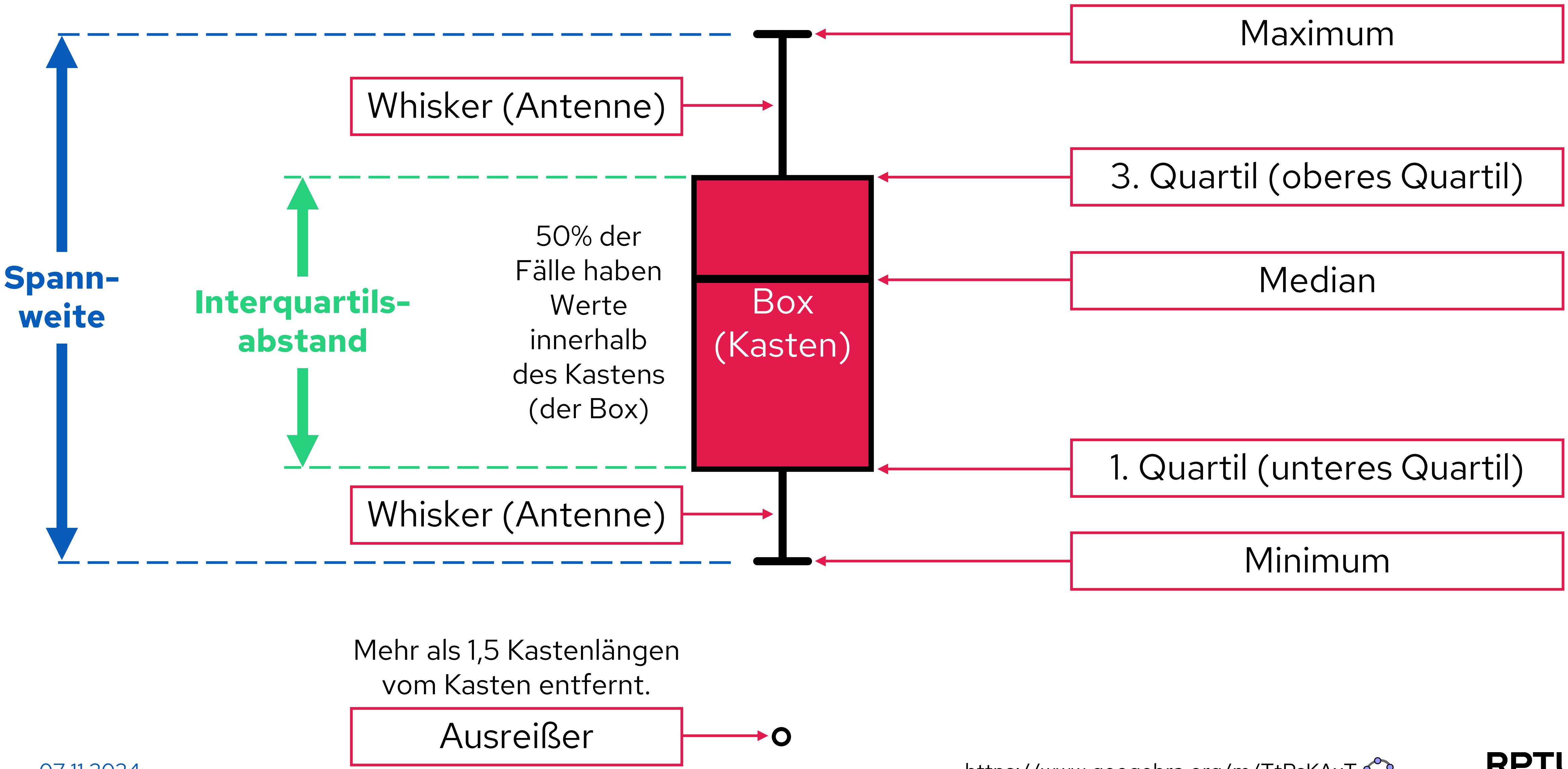
Liniendiagramm

- Wird auch Polygonzug genannt.
- Ausgangspunkt sind
  die Daten eines Säulendiagramms.
- Die Kurve stellt keine stetige Funktion dar.
- Wird in der Regel bei Zeitreihen angewendet.



2.3.10 Boxplot

Boxplot



https://www.geogebra.org/m/TtRsKAxT

Kennwerte im Boxplot

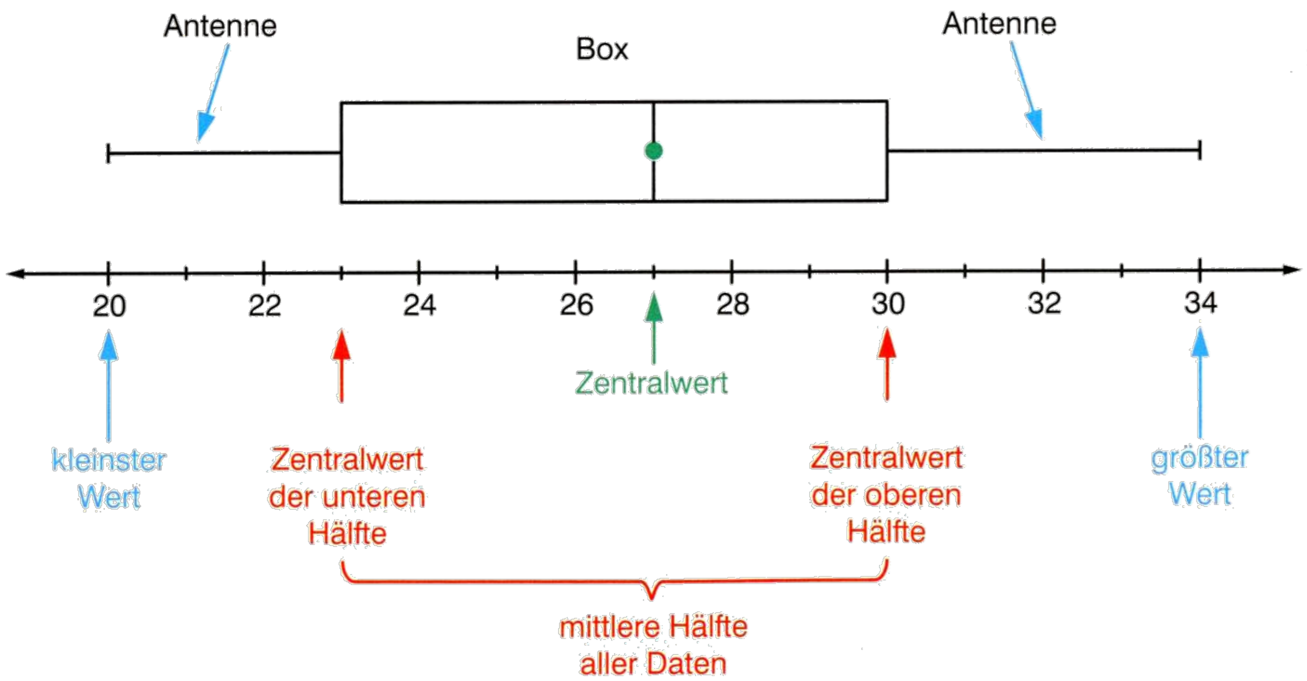
Kennwert	Beschreibung	Lage im Boxplot
Minimum	Kleinster Datenwert des Datensatzes	Ende eines Whiskers oder entferntester Ausreißer
Unteres Quartil	Die kleinsten 25% der Datenwerte sind kleiner oder gleich diesem Kennwert	Beginn der Box
Zentralwert oder Median	Die kleinsten 50% der Datenwerte sind kleiner oder gleich diesem Kennwert	Strich innerhalb der Box
Oberes Quartil	Die kleinsten 75% der Datenwerte sind kleiner oder gleich diesem Kennwert	Ende der Box
Maximum	Größter Datenwert des Datensatzes	Ende eines Whiskers oder entferntester Ausreißer
Spannweite	Gesamter Wertebereich des Datensatzes	Länge des gesamten Box-plots (inklusive Ausreißer)
Quartilsabstand	Wertebereich in dem sich die mittleren 50% der Daten befinden	Ausdehnung der Box

Boxplot in einem Schulbuch

Boxplots

Statistiker sind Mathematiker, die Daten lieben. Je mehr Daten es sind, umso wohler fühlen sie sich. Allerdings wollen sie die wichtigsten Eigenschaften großer Datenmengen auf einen Blick darstellen. Dazu haben sie besondere Verfahren entwickelt. Ein ganz modernes Verfahren, das aus den USA stammt, verwendet Boxplots (Boxplot = Kastenbild).

Wie sieht ein Boxplot aus? Wie liest man einen Boxplot?



Boxplot erstellen

(1) Zentralwert (Median) bestimmen.

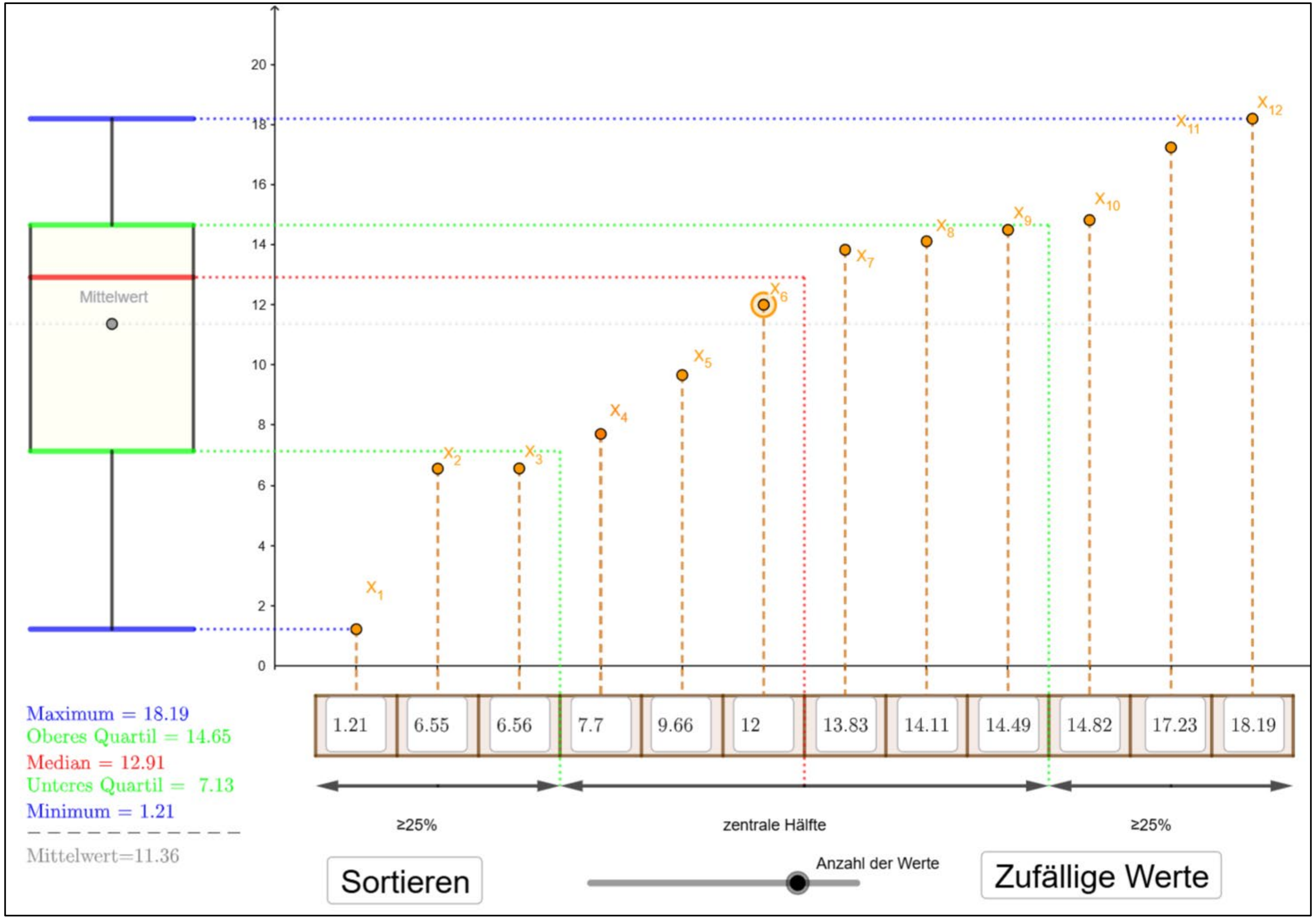
(2) Maximum und Minimum bestimmen.

(3) Daten in obere und untere Hälfte teilen.

(4) Zentralwert der oberen und unteren Hälfte bestimmen.

 Mathematik Neue Wege 6, RLP, Schroedel, 2007, S. 226

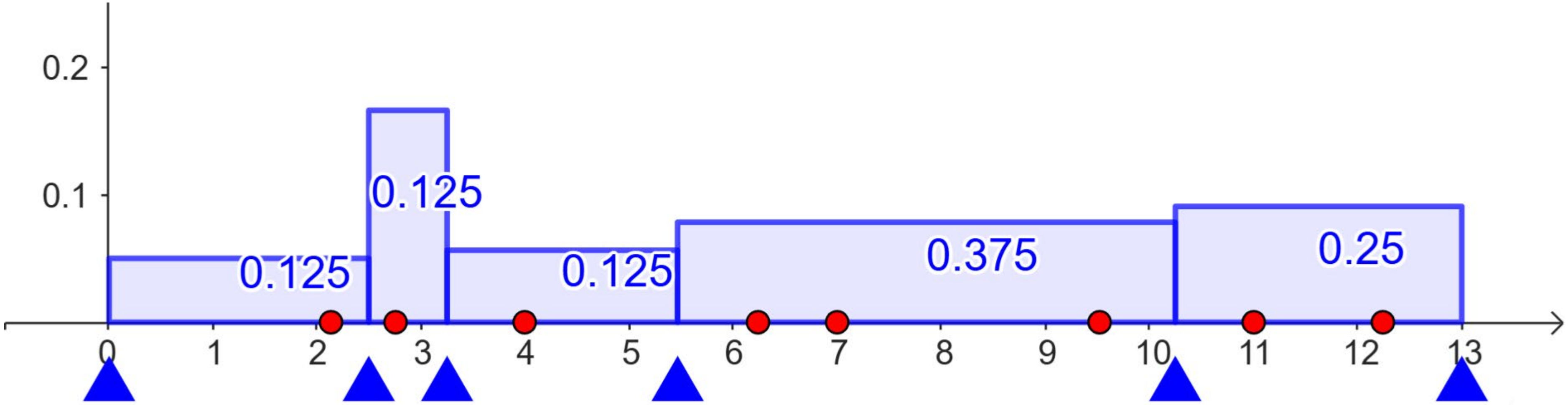
Boxplots explorieren



Ossadnik, H. (2022). Boxplots – einfach zu erstellen, schwer zu interpretieren. Digital unterrichten MATHEMATIK, 1, 6-7
https://www.geogebra.org/m/mdrxauvv

2.3.11 Histogramm

Histogramm



Histogramm

- Graphische Darstellung der Häufigkeitsverteilung von Merkmalen die intervall- oder verhältnisskaliert sind.
- Erfordert die Einteilung der Daten in Klassen konstanter oder variabler Breite.
- Es werden direkt nebeneinanderliegende Rechtecke von der Breite der jeweiligen Klasse gezeichnet, deren Flächeninhalte die (relativen oder absoluten) Klassenhäufigkeiten darstellen.
- Die Höhe jedes Rechtecks stellt dann die (relative oder absolute) Häufigkeitsdichte dar, also die (relative oder absolute) Häufigkeit dividiert durch die Breite der entsprechenden Klasse.

Histogramm

Wie erstellt man ein Histogramm zu den Daten $x_1, x_2, \dots, x_n$?

- Auf der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ werden $m + 1$ Punkte $a_0 < a_1 < \cdots < a_m$ so gewählt, dass alle Daten $x_1, x_2, \dots, x_n$ zwischen a_0 und a_m liegen.
- Es entstehen die $m + 2$ Intervalle $]-\infty, a_0]$, $]a_0, a_1]$, …, $]a_{m-1}, a_m]$ und $]a_m, +\infty[$.
- Über jedem Intervall $]a_i, a_{i+1}]$ wird ein **Rechteck** errichtet, dessen **Flächenmaßzahl** die (relative) Häufigkeit der im Intervall $]a_i, a_{i+1}]$ liegenden Daten angibt.
- Die Höhe jedes Rechtecks ergibt sich als die (relative oder absolute) Häufigkeit der Daten in dieser Klasse dividiert durch die Breite der entsprechenden Klasse.
- Die Rechtecke auf dem ersten Intervall $]-\infty, a_0]$ und auf dem letzten Intervall $]a_m, +\infty[$ haben natürlich die Höhe 0. Rechtecke der Höhe 0 werden nicht gezeichnet.
- Die sich so ergebende Anordnung von Rechtecken heißt **Histogramm**.

Histogramm und Boxplot vergleichen

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgaben

Im GeoGebra-Applet sind 20 Datenpunkte angegeben, die auf der x-Achse bewegt werden können.

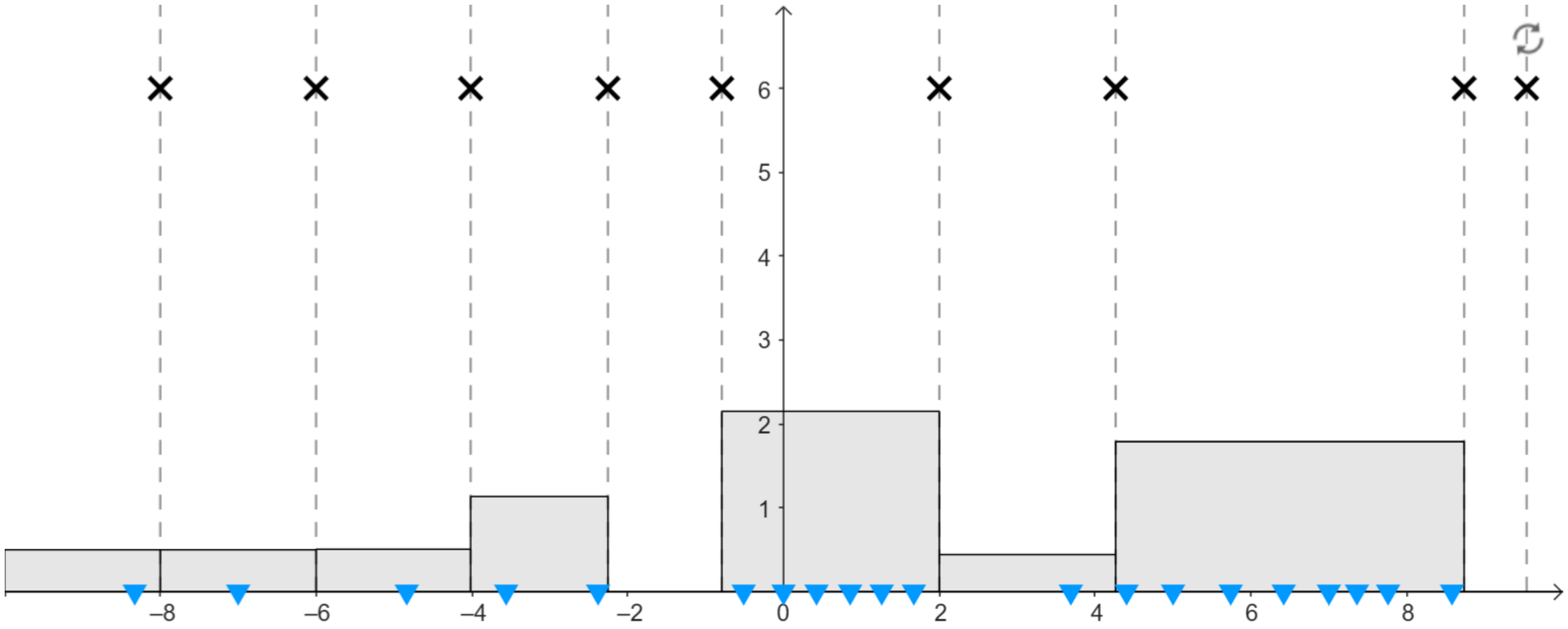
Beschreiben Sie, wie sich Veränderungen einzelner

(1) Datenpunkte

(2) Klassenbreiten

auf das Histogramm bzw. den Boxplot auswirken.

(3) Erläutern Sie die Bedeutung der Rechteckflächen in beiden Diagrammen.



2.3.12 „Misstrauensregeln“ für Diagramme

„Misstrauensregeln“ für Diagramme

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

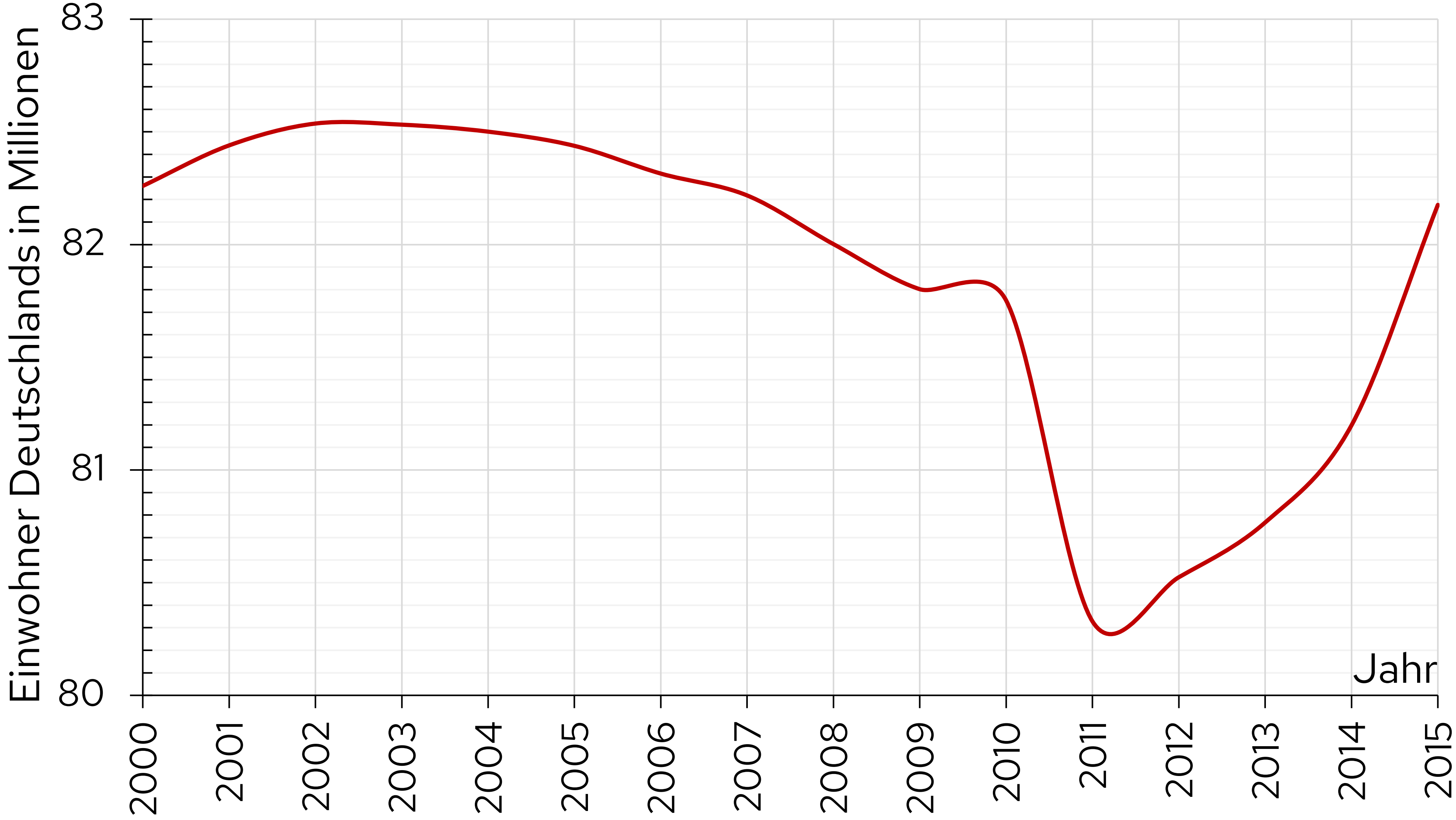
Misstrauensregeln

- Verstöße gegen Proportionalität?
- Verstöße gegen perspektivische Verzerrungen?
- Stauchungen oder Streckungen von Achsen?
- Klare Achseneinteilung?
- Achsen vollständig dargestellt?
- Informationsbeitrag von Farben?
- Passen die Daten zur Interpretation?
- Welche Daten hätte ich gerne zum Thema erfahren?
- Passen die Daten zu meiner Einschätzung?
- Wie und wann wurden die Daten gewonnen?
- Interesse des Autors?
- Inhaltlicher Beitrag der Zahlen
  und Graphiken zur Botschaft?

 Halbach (2001). Eine Statistik – Viele Interpretationen. Mathematik lehren 109, 46-48

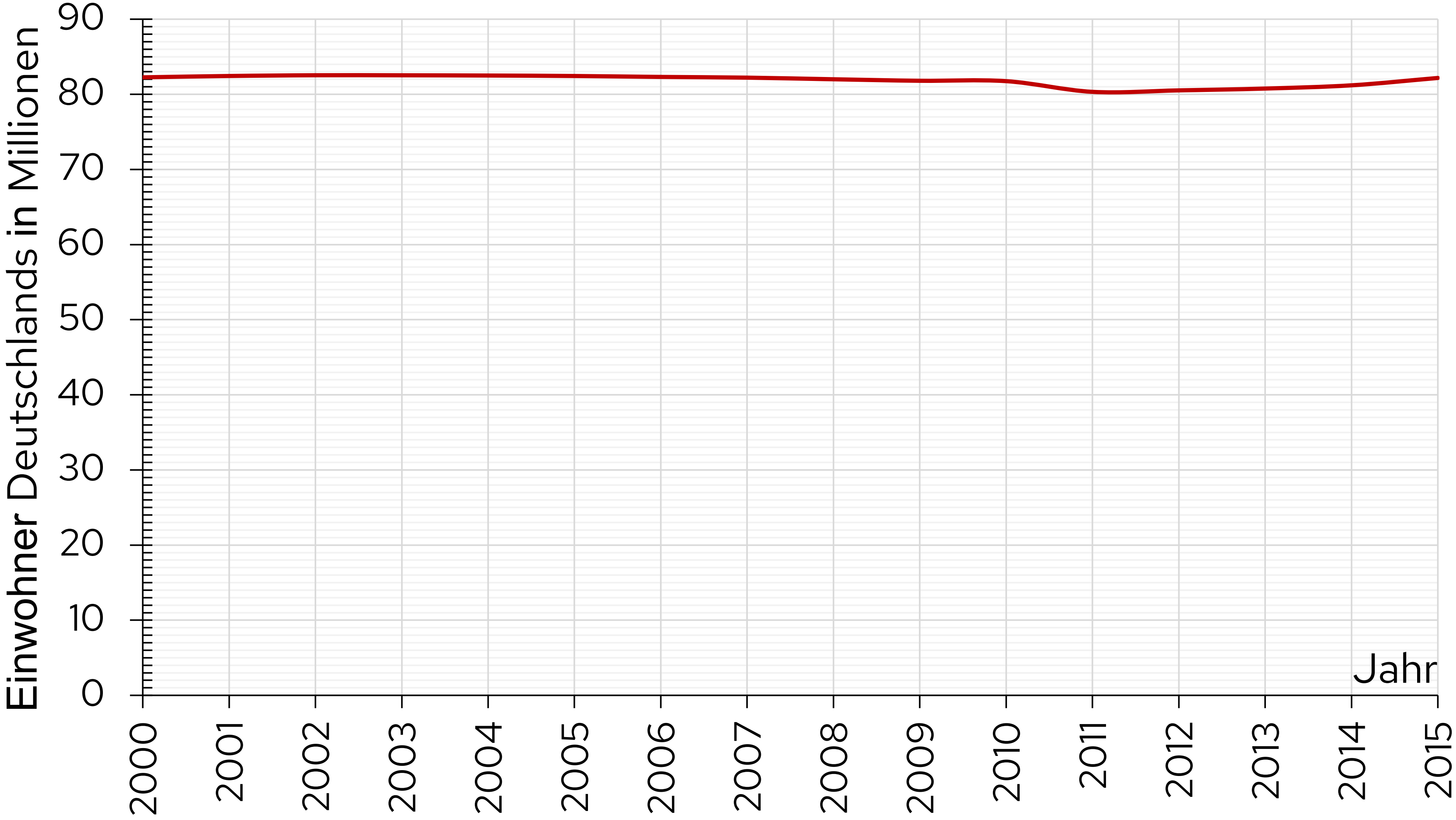
https://ruffle.rs/demo/

Bevölkerungsstand in Deutschland



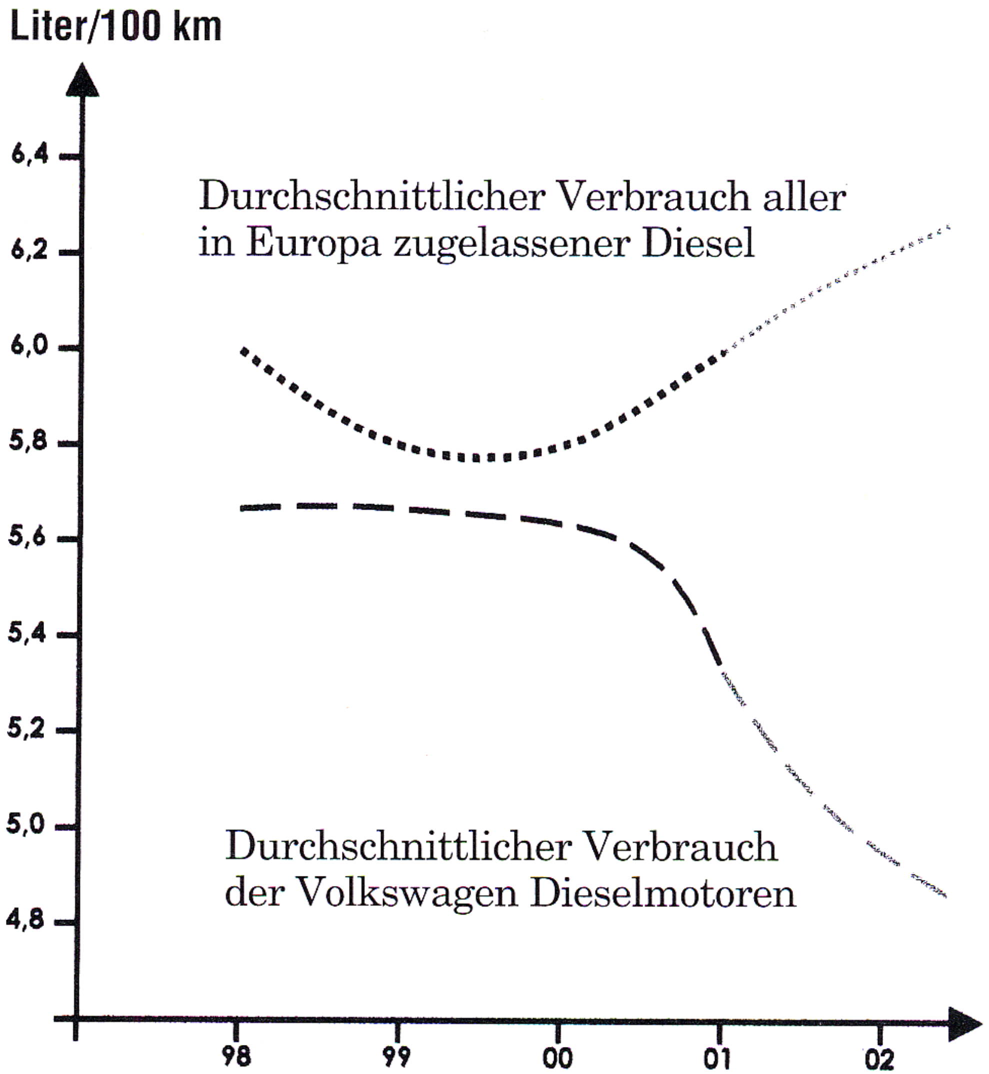
 Daten: Statistisches Bundesamt

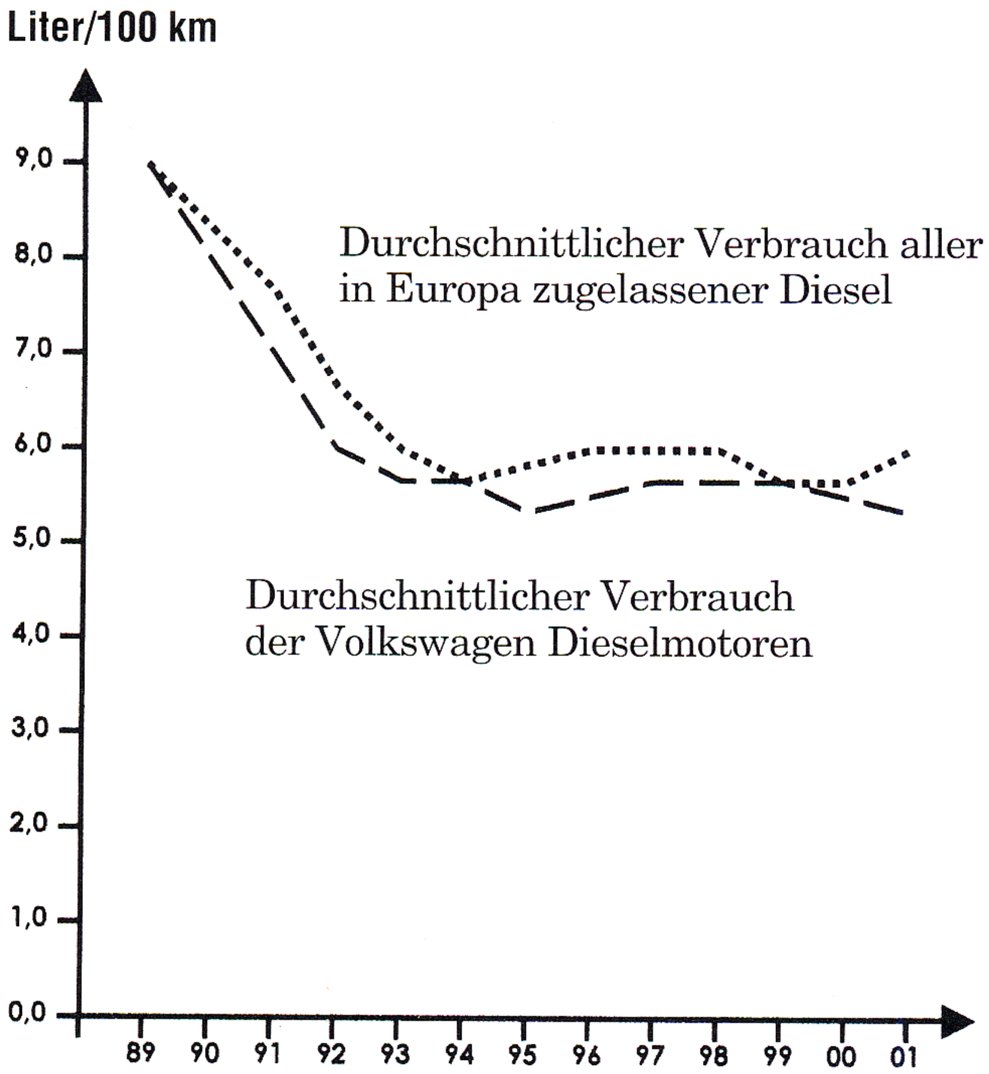
Bevölkerungsstand in Deutschland



 Daten: Statistisches Bundesamt

Daten unterschiedlich darstellen



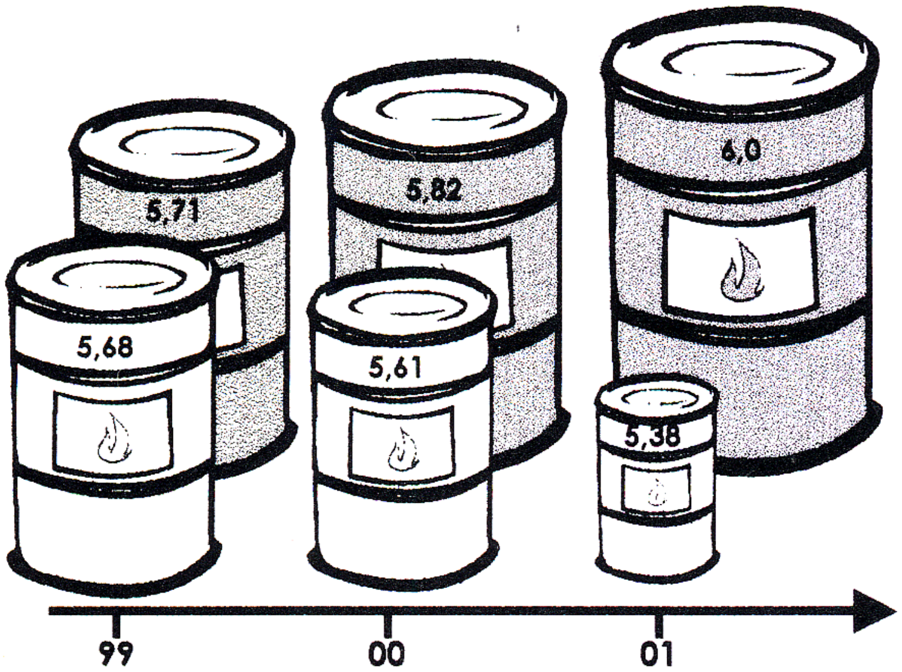


 Halbach (2001). Eine Statistik – Viele Interpretationen. *Mathematik lehren 109*, 46-48

Daten unterschiedlich darstellen

Durchschnittlicher Verbrauch aller in Europa zugelassener Diesel

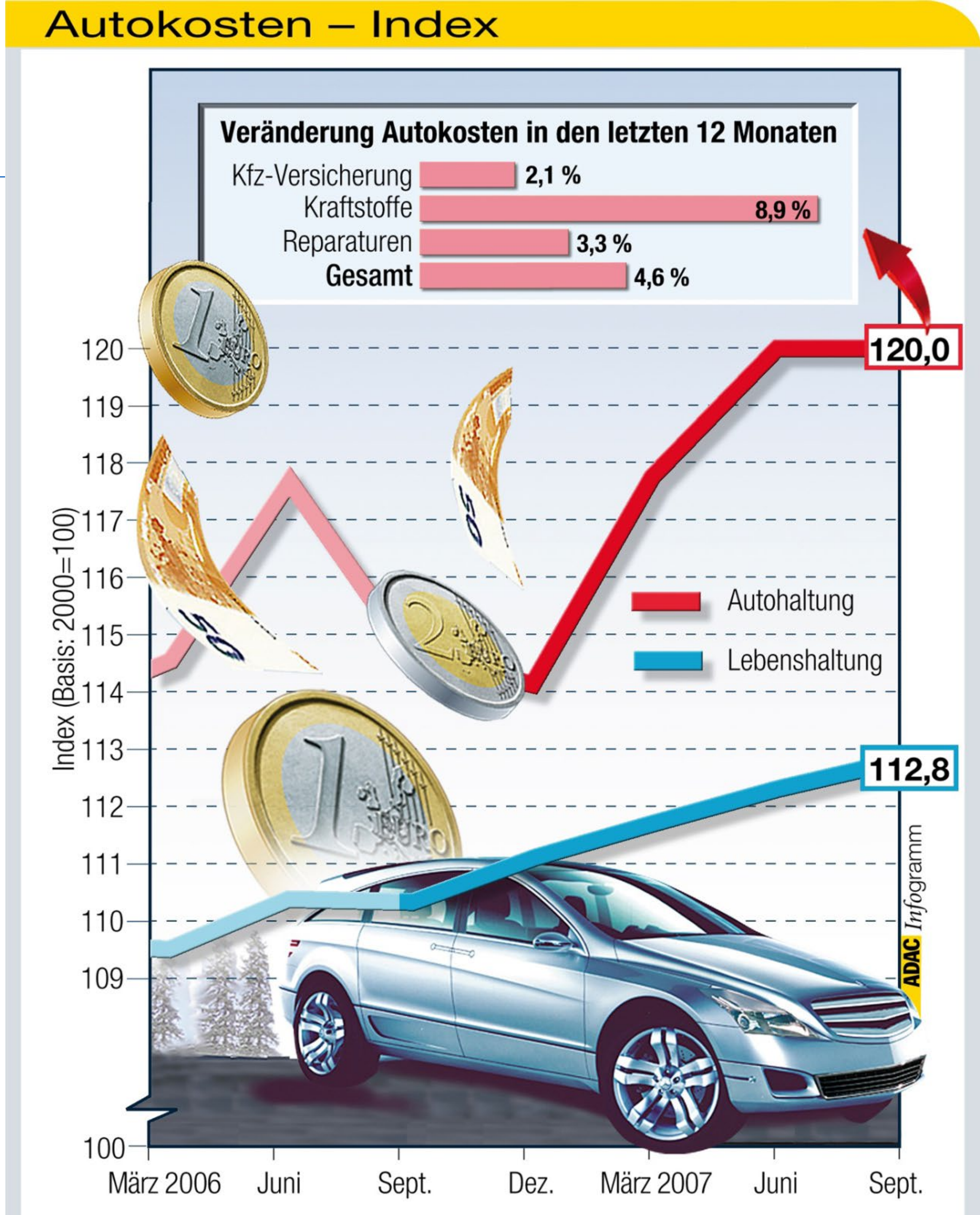
Durchschnittlicher Verbrauch der Volkswagen Dieselmotoren



	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01
Durchschnittlicher Verbrauch aller in Europa zugelassenen Diesel	9,0	8,4	7,6	6,5	6,0	5,7	5,8	6,0	6,0	6,0	5,7	5,8	6,0
Durchschnittlicher Verbrauch der Volkswagen Dieselmotoren	9,0	7,9	7,0	6,0	5,8	5,7	5,3	5,5	5,6	5,6	5,6	5,6	5,3

 Halbach (2001). Eine Statistik – Viele Interpretationen. *Mathematik lehren 109*, 46-48

„Misstrauensregeln" anwenden



http://presse.adac.de/meldungen/Geld_Kosten/Autokosten_Index_Herbst_2007.asp?ComponentID=189519&SourcePageID=14990#0 (Abgerufen am 30.10.2007)

2.3.13 Aufgaben zu Diagrammen in Schulbüchern

RPTU

Schulbuchaufgaben zu Diagrammen

7 Stelle die Angaben im Streifen- und im Kreisdiagramm dar.
a) 25 % b) 66 % c) 12,5 % d) 20 %

8 Übertrage die Streifendiagramme in dein Heft. Miss dazu die Längen aus. Gib den Anteil der blauen, roten, gelben und grünen Fläche in Prozent an.

Beispiel:

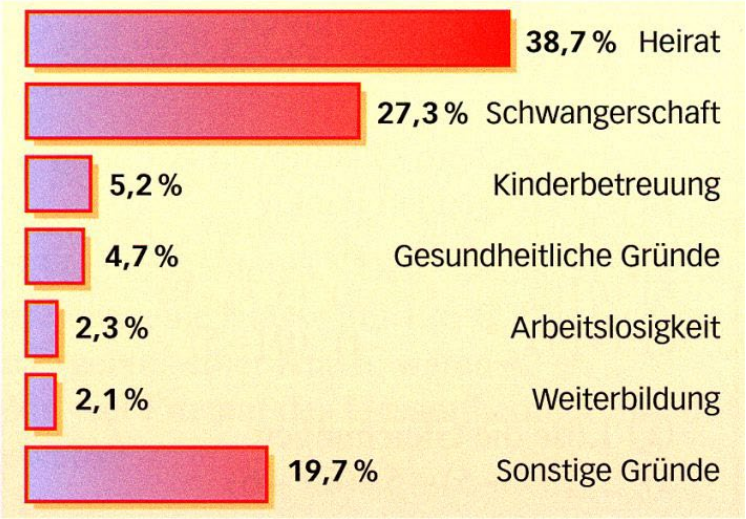
Der gesamte Streifen ist 60 mm lang. Der blaue Teil des Streifens ist 15 mm lang, das sind ($\frac{15}{60} = 0{,}25$) 25 % der gesamten Streifenlänge.

a) Berechne für das Beispiel die fehlenden Anteile in Prozent.

b)

c)

9 Als diese Umfrage durchgeführt wurde, hatten von 17,3 Millionen berufstätigen Frauen 11,7 Millionen ihre Berufstätigkeit unterbrochen bzw. aufgegeben.

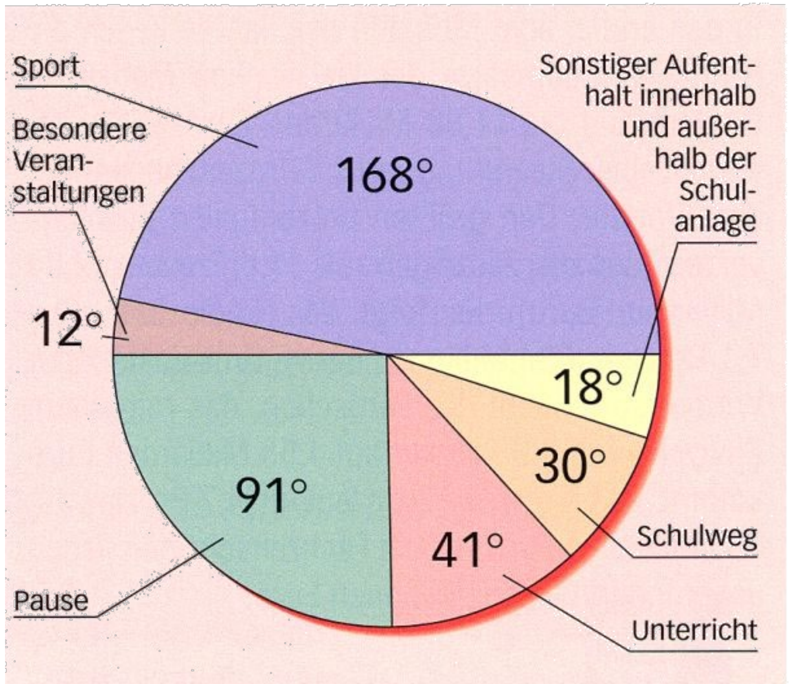


a) Berechne, wie viele Frauen mit den angegebenen Gründen ihren Beruf aufgegeben haben.
b) Stelle die Ergebnisse der Umfrage in einem Kreisschaubild dar.
c) Führt bei euren Eltern eine ähnliche Umfrage durch.

Leppig (Hrsg.) (2006). Lernstufen Mathematik 8, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 23

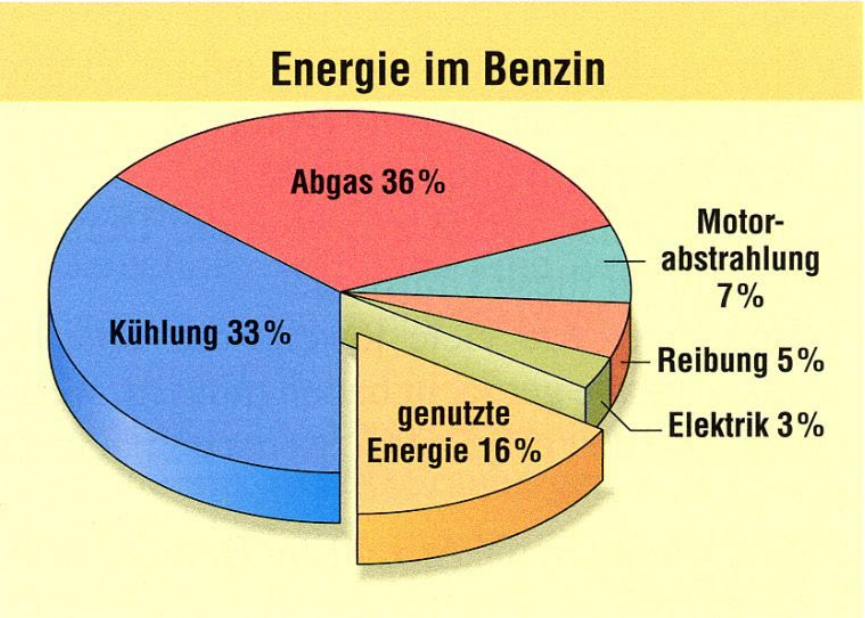
Schulbuchaufgaben zu Diagrammen

10 Das Kreisdiagramm beschäftigt sich mit den Schülerunfällen verschiedener Art in einem Jahr.



a) Berechne über die Winkelangaben die Prozente aller Anteile.
b) Im Jahr wurden insgesamt 1,47 Millionen Schülerunfälle gemeldet. Wie viele Unfälle entfielen auf die einzelnen im Diagramm genannten Bereiche?
c) Stelle die Anteile der schulischen Veranstaltungen an den Unfällen in einem Säulendiagramm dar.

11 Energieverteilung im Auto.
a) Was sagen die in der Grafik genannten Daten über die Effektivität eines Automotors aus? Begründe.
b) Zeichne zwei verschiedene Schaubilder deiner Wahl.
c) Ein Auto benötigt für 100 km im Schnitt 9,3 Liter Benzin. Wie viel geht demnach für die verschiedenen Bereiche verloren?



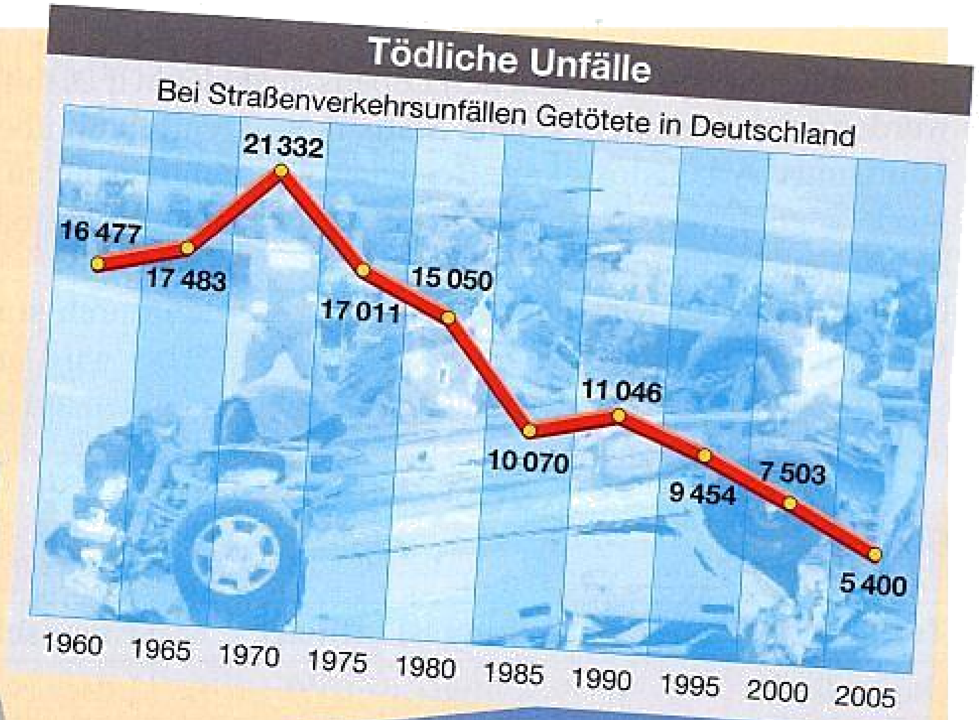
 Leppig (Hrsg.) (2006). Lernstufen Mathematik 8, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 23

Schulbuchaufgaben zu Diagrammen

„Die Jugend ist glücklich"

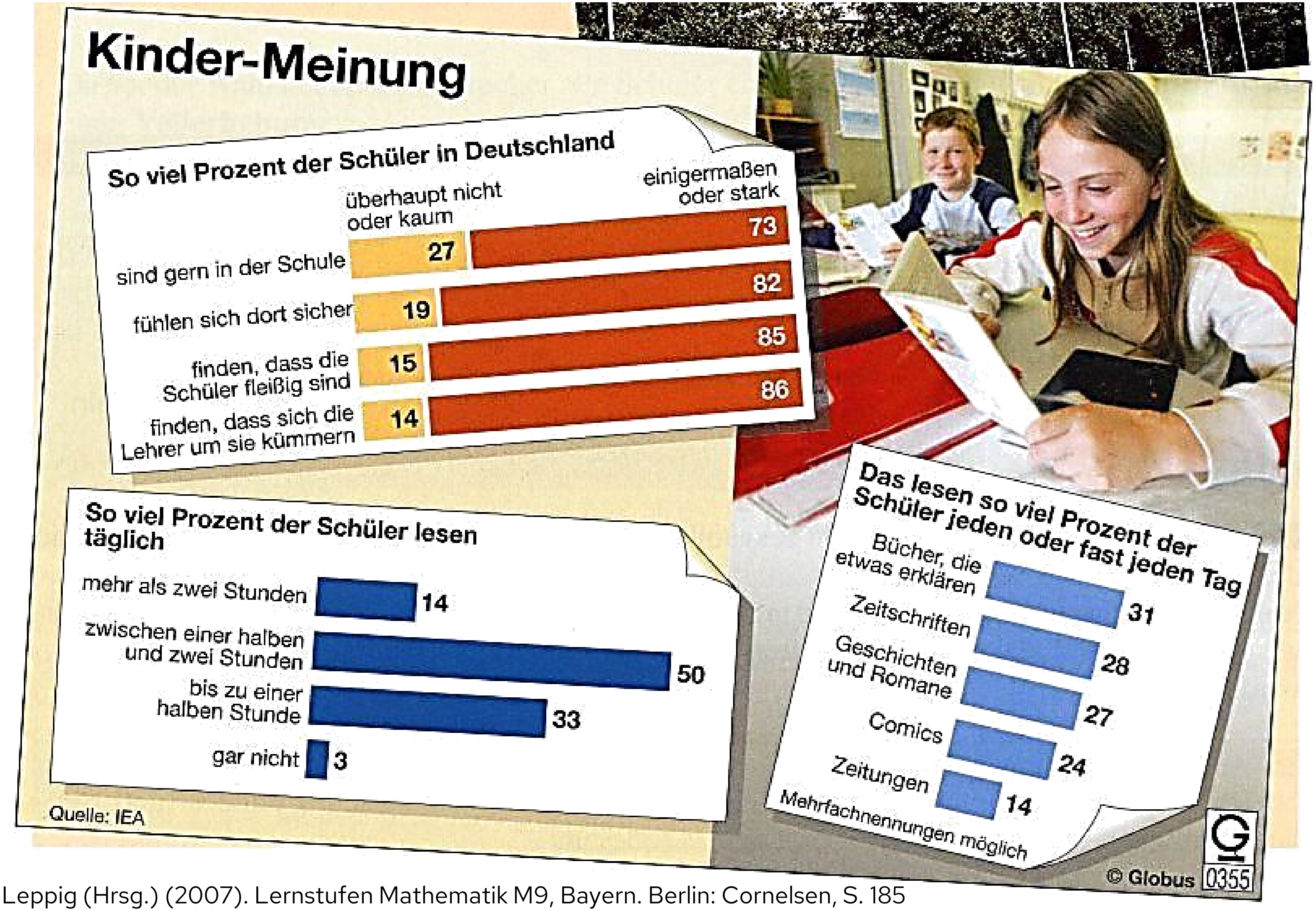
MÜNCHEN. Deutschlands Jugend ist glücklich und blickt überwiegend optimistisch in die Zukunft. Dies ist das Ergebnis einer repräsentativen Umfrage des Meinungsforschungsinstituts Forsa im Auftrag einer Jugendzeitschrift. Die überwiegende Mehrheit der 14- bis 18-Jährigen gibt an, zurzeit sehr glücklich (16 Prozent) oder glücklich (70 Prozent) zu sein. 14 Prozent sagen, sie seien weniger glücklich. Eine Mehrheit von 90 Prozent der Jugendlichen schaut dem neuen Jahr optimistisch entgegen. Nur 7 Prozent sind eher pessimistisch gestimmt, geht aus der am Dienstag verbreiteten Umfrage hervor. Wenn die Jugendlichen Zukunftsangst plagt, dann denken sie am häufigsten an Arbeitslosigkeit (41 Prozent). Mit deutlichem Abstand folgen Angst vor Krieg (10 Prozent), Krankheit, Armut (jeweils 8 Prozent), Abschlussprüfungen (7 Prozent), Schicksalsschlägen in der Familie und der Zunahme von Naturkatastrophen wegen der Klimaerwärmung (jeweils 6 Prozent).

Fränkischer Tag, 28.12.2005

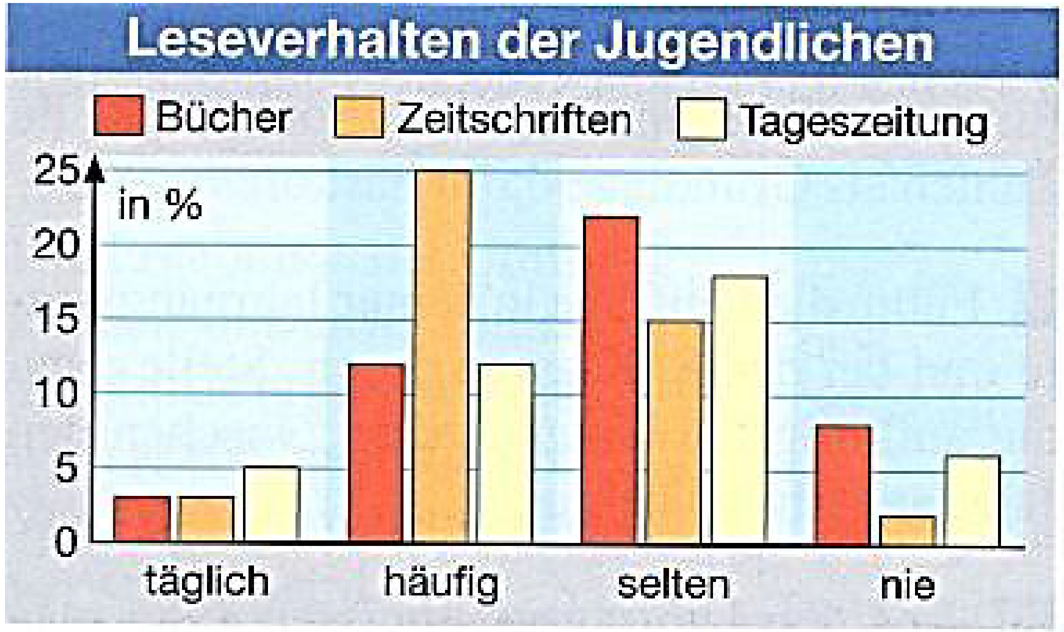


 Leppig (Hrsg.) (2007). Lernstufen Mathematik M9, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 185

Schulbuchaufgaben zu Diagrammen



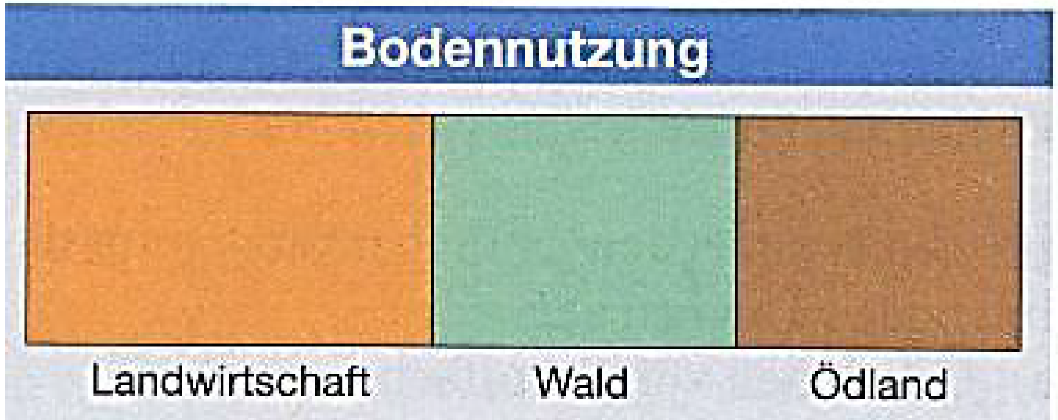
Schulbuchaufgaben zu Diagrammen



1. Säulen- oder Stabdiagramm

Bei Säulendiagrammen kann man die Daten schnell vergleichen. Man erkennt gleich die höchsten und die niedrigsten Werte. Bei einem Säulendiagramm befindet sich ein Zwischenraum zwischen den einzelnen Säulen.

Nein, nicht zwingend.

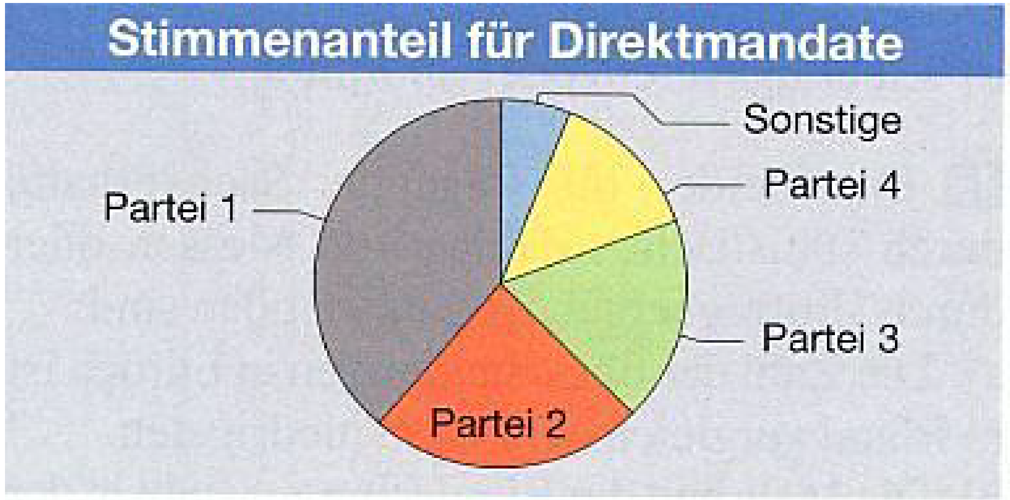


2. Streifen- ~~oder Balken~~diagramm

Werden die einzelnen Säulen eines Säulendiagramms aneinandergereiht, erhält man ein Streifen- ~~oder Balken~~diagramm. An der Länge des Streifens kann man leicht die ~~Häufigkeit~~ vergleichen. **Nein, die Anteile des Ganzen bzw. die *relative* Häufigkeit.**

Leppig (Hrsg.) (2007). Lernstufen Mathematik M9, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 194

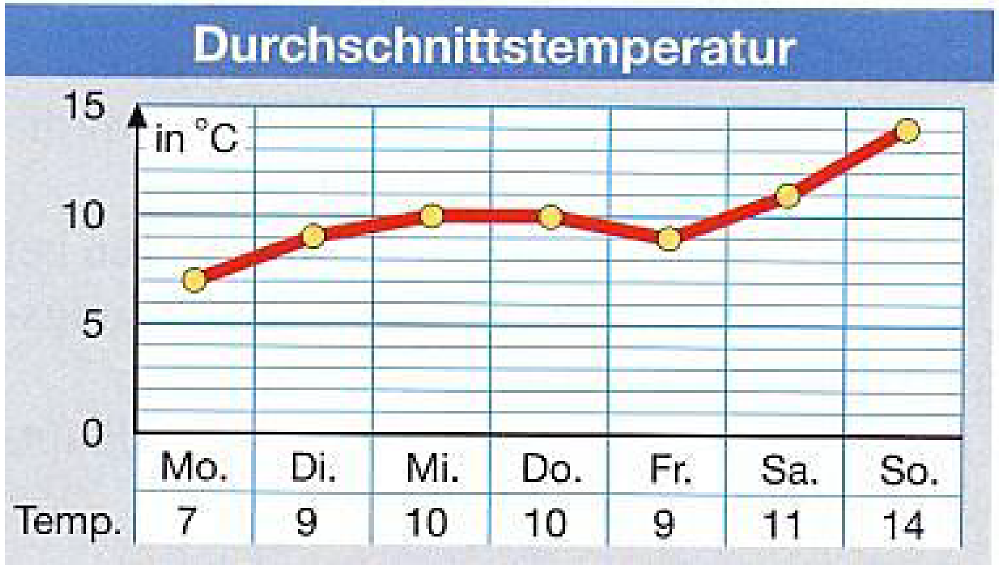
Schulbuchaufgaben zu Diagrammen



3. Kreisdiagramm

Kreisdiagramme werden besonders dann eingesetzt, wenn man die einzelnen ~~Häufigkeiten~~ vergleichen möchte, vor allem wenn prozentuale Verteilungen, z. B. bei Wahlen, dargestellt werden sollen.

Nein, die Anteile des Ganzen bzw. die *relativen* Häufigkeiten!



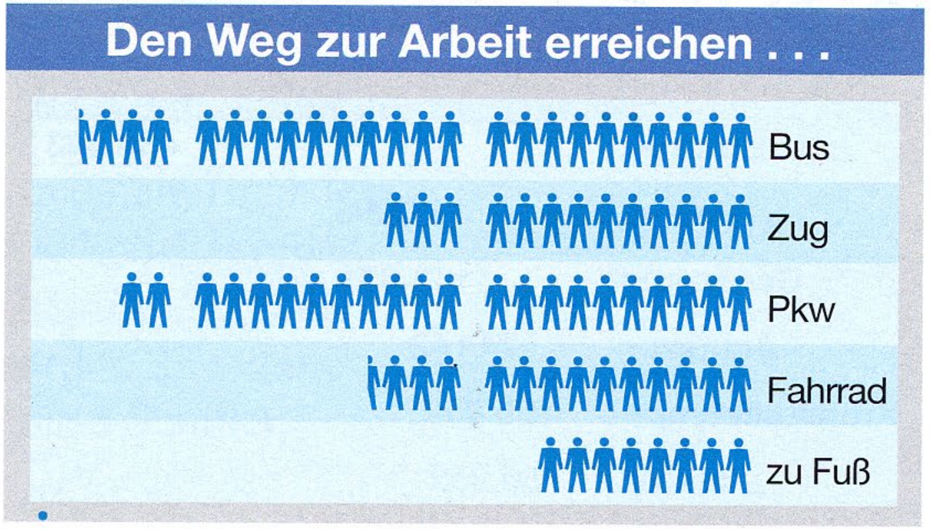
4. Kurven- oder Liniendiagramm

Sie finden Anwendung, wenn man Ereignisse über einen längeren Zeitraum verfolgen will z. B. Temperaturen, Bevölkerungsentwicklung, Aktienkurse ...

 Leppig (Hrsg.) (2007). Lernstufen Mathematik M9, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 194

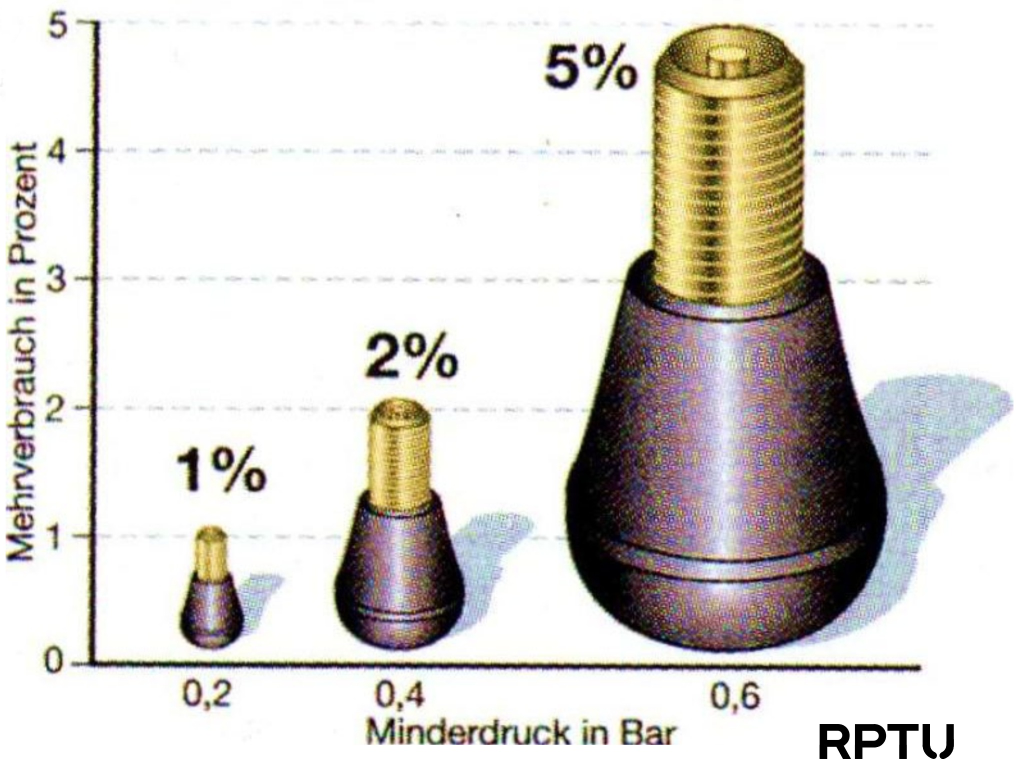
Schulbuchaufgaben zu Diagrammen

Leppig (Hrsg.) (2007). Lernstufen Mathematik M9, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 194



5. Piktogramm
Im Piktogramm werden Symbole für die Darstellung der Daten verwendet.
Die Anzahl der Symbole muss proportional zur Häufigkeit der einzelnen Werte sein.

?



Die Bedeutung des richtigen Reifendrucks wird oft unterschätzt. Schon bei einem Minderdruck von 0,2 bar erhöht sich der Rollwiderstand und sorgt für einen Mehrverbrauch von etwa einem Prozent. Ist der Druck noch geringer, steigt der Spritkonsum weiter.

ADAC motorwelt 8/2006, S. 41

Schulbuchaufgaben zu Diagrammen

7 Stimmen die Aussagen?

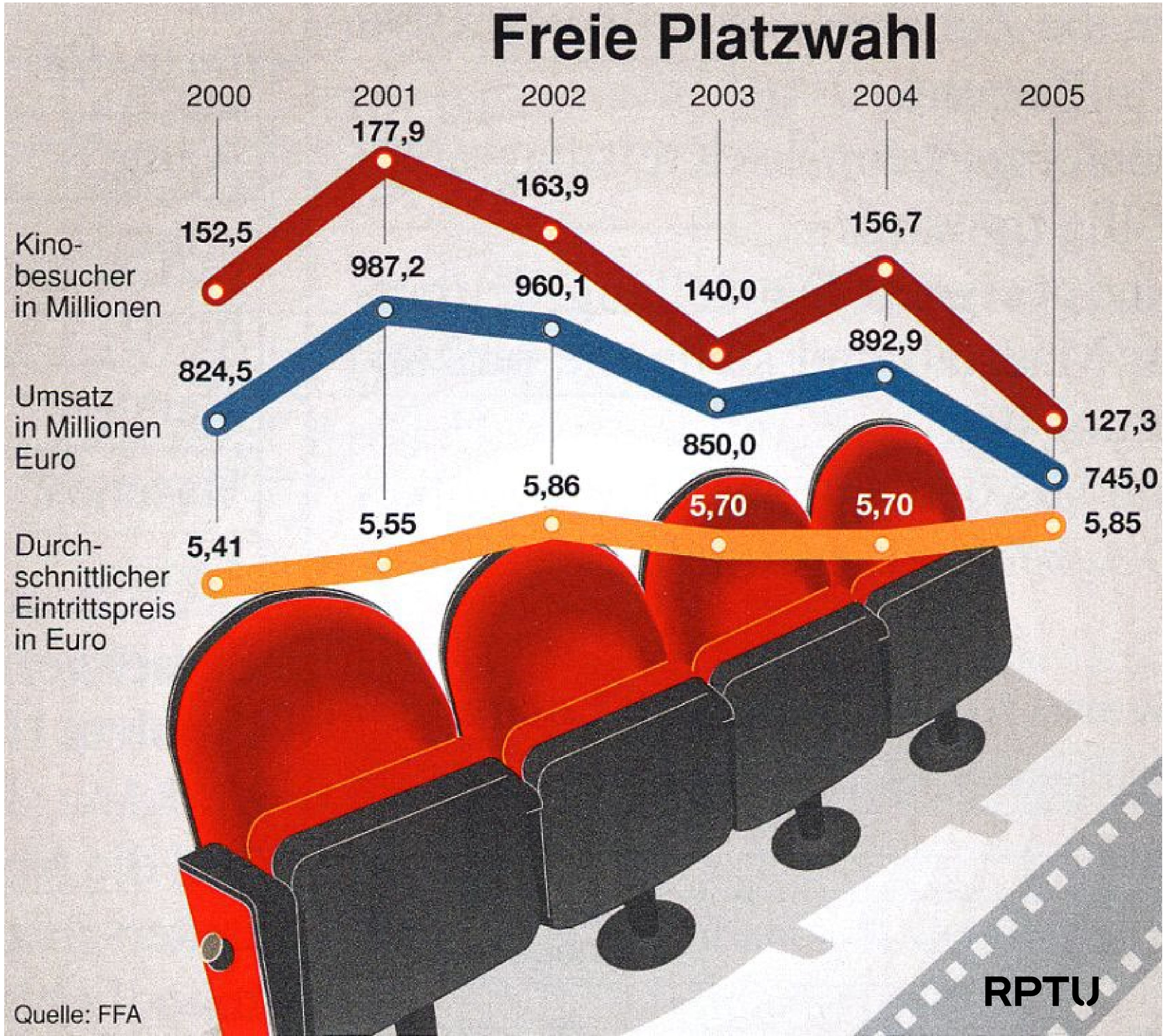
a) Im Jahre 2004 war ein Kinobesuch billiger als 2002.

b) Die wenigsten Kinobesucher gab es 2003.

c) Der durchschnittliche Eintrittspreis ist zwischen 2001 und 2005 um 10 % gestiegen.

d) Von 2001 bis 2003 sind die Besucherzahlen um mehr als 20 % zurückgegangen.

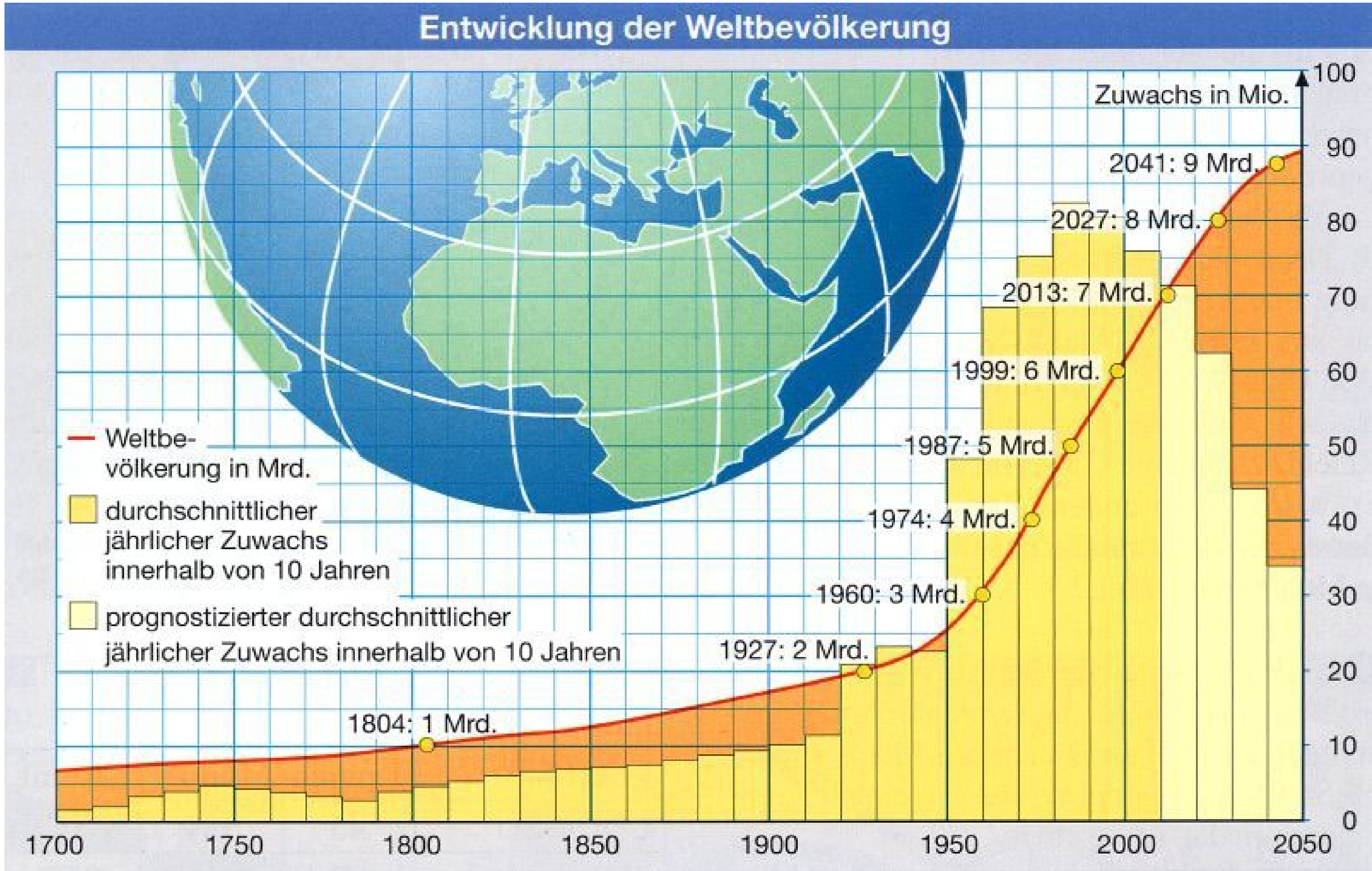
e) Erkläre: Warum wurde der durchschnittliche Eintrittspreis 2003 billiger und 2005 wieder teurer?



Leppig (Hrsg.) (2007). Lernstufen Mathematik M9, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 201

Schulbuchaufgaben zu Diagrammen

1 a) Was stellt das Liniendiagramm, was stellt das Säulendiagramm dar?
b) Warum wurden diese grafischen Darstellungsformen gewählt?
c) In welchen Zeitabständen hat sich die Weltbevölkerung verdoppelt?
d) Ab wann ist der Zuwachs überdurchschnittlich angestiegen? Suche Gründe.
e) Warum sind die letzten 4 Säulen anders gefärbt?
f) Welche Voraussage kannst du anhand der Grafik über die Entwicklung der Weltbevölkerung ab dem Jahr 2000 machen.
g) Wie lange dauert es, bis die Weltbevölkerung zurzeit um 1 Milliarde zunimmt?
e) Deutschland hat sinkende Geburtenzahlen. Wo gibt es das Bevölkerungswachstum?



Die erste Milliarde erreichte die Weltbevölkerung im Jahr 1804. Bis 1900 lebten noch 1,6 Milliarden Menschen auf der Erde. Im Jahr 1927 waren es zwei Milliarden, 33 Jahre später drei Milliarden. 1974 wurden vier und schon 1987 fünf Milliarden Menschen gezählt. Im Jahre 1999 überschritt die Weltbevölkerung die Sechs-Milliarden-Grenze. Damit hat sich die Weltbevölkerung im 20. Jahrhundert nahezu vervierfacht – ein in der Geschichte der Menschheit einmaliger Vorgang. Zur Zeit wächst die Weltbevölkerung etwa alle 14 Jahre um eine weitere Milliarde Menschen. Das Bevölkerungswachstum findet zu 95 Prozent in Entwicklungsländern statt.

Leppig (Hrsg.) (2007). Lernstufen Mathematik M9, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 185

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2:
Beschreibende Statistik

2.1 Grundbegriffe der beschreibenden Statistik

2.2 Erhebung – Daten sammeln

2.3 Graphische Darstellungsformen

2.4 Kennwerte von Datenreihen (Mittelwerte und Streuungsmaße)

Kernideen im Fokus
bei Kennwerten von Datenreihen (Mittelwerte & Streuungsmaße)

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kernidee
Denkfigur: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Konditionales Denken
  (Wenn ..., dann ...)
- Schnitt-Wahrscheinlichkeit
  ↔ totale Wahrscheinlichkeit

Kernidee
hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeit

- Konzept des Bezweifelns
- Modell (Wahrscheinlichkeit)
  ↔ Realität (rel. Häufigkeit)
- aus Erfahrung wird Erwartung

Kernidee
Repräsentativität und Variabilität von Stichproben-Daten

- Repräsentative Stichprobe
- Wachsende Stichprobe
  → reduziert Variabilität

Kernidee
Verteilungen

- Struktur erfassen
  (Form, Streuung, Maximum, ...)
- Gesetz der großen Zahlen
- Sichtweise: lokal ↔ global

Lage- und Streuungsmaße

Gewichtete Mittelwerte

Lagemaße: Mittelwerte & Co

- Modalwert (Modus) 1
- Median (Zentralwert) 2
- Arithmetisches Mittel 3
- Weitere Mittelwerte 4
- Lagemaße: Quantile 5

Streuungsmaße

- 1 Spannweite
- 2 Interquantilsabstand
- 3 Mittlere absolute Abweichung
- 4 Varianz und Standardabweichung

2.4.1 Mittelwert
Modalwert (Modus)

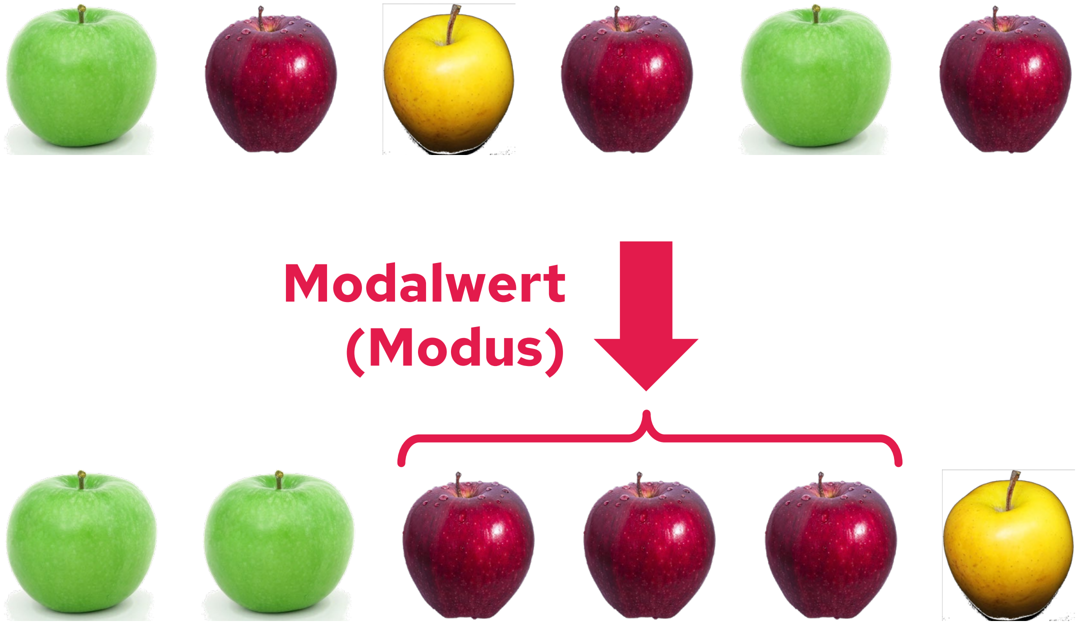
Mittelwert: Modalwert (Modus)

Modalwert (Modus)

Voraussetzung
Daten mindestens nominal skaliert.

Vorgehen
Anzahlen der Daten mit demselben Wert zählen.

Modalwert
Wert(e) der (die) am häufigsten auftritt (-treten).



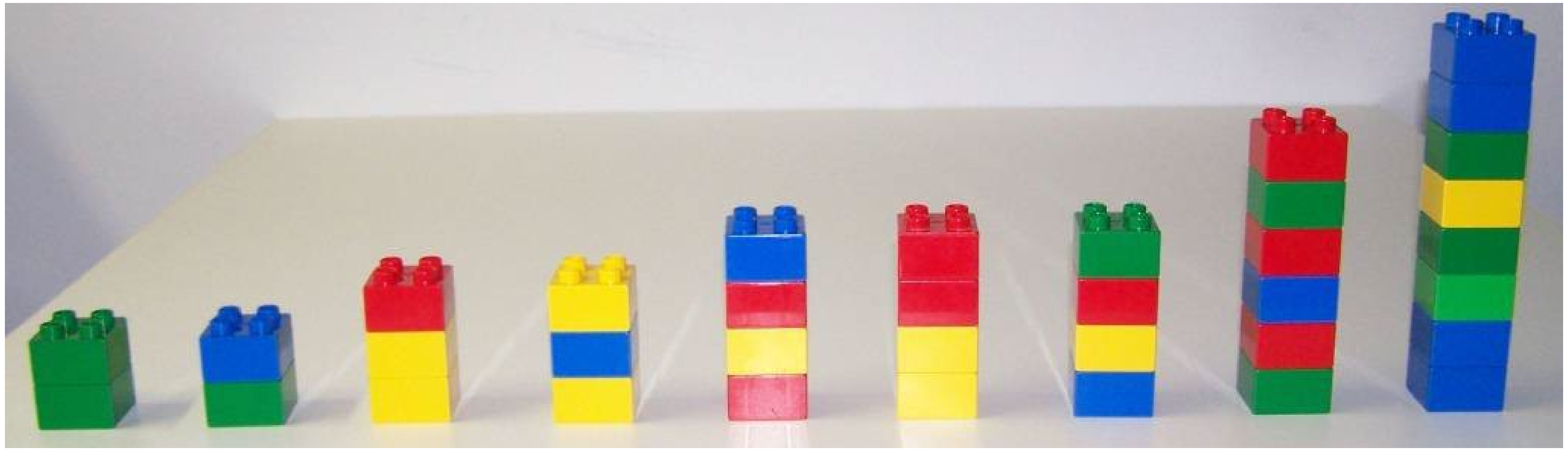
Mittelwert: Modalwert (Modus)

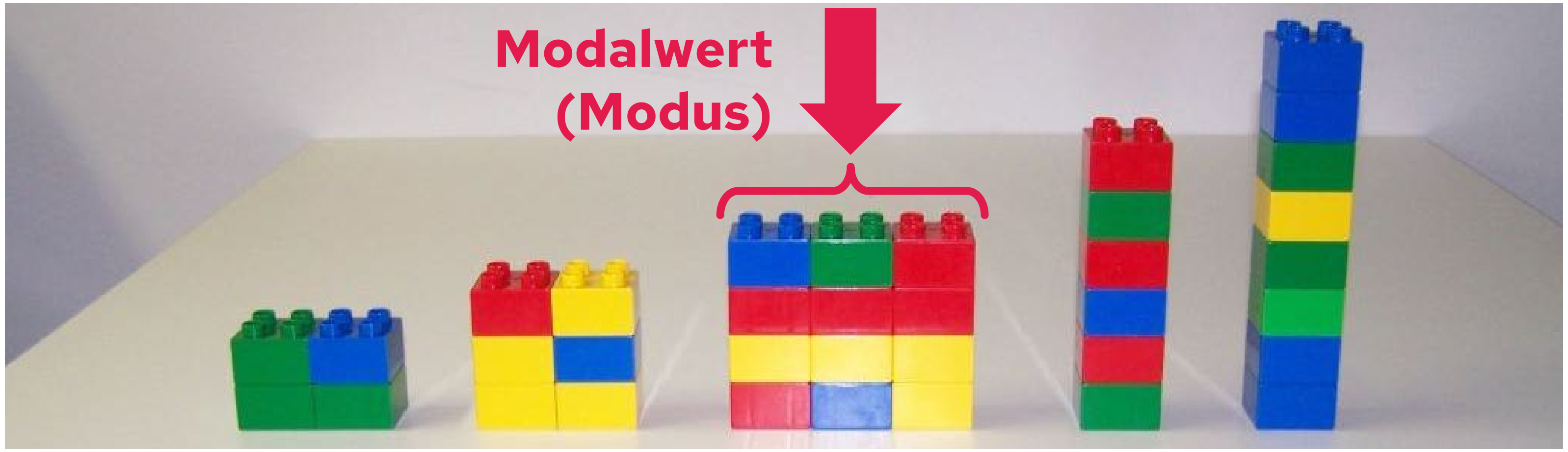
Modalwert (Modus)

Voraussetzung
Daten mindestens nominal skaliert.

Vorgehen
Anzahlen der Daten mit demselben Wert zählen.

Modalwert
Wert(e) der (die) am häufigsten auftritt (-treten).





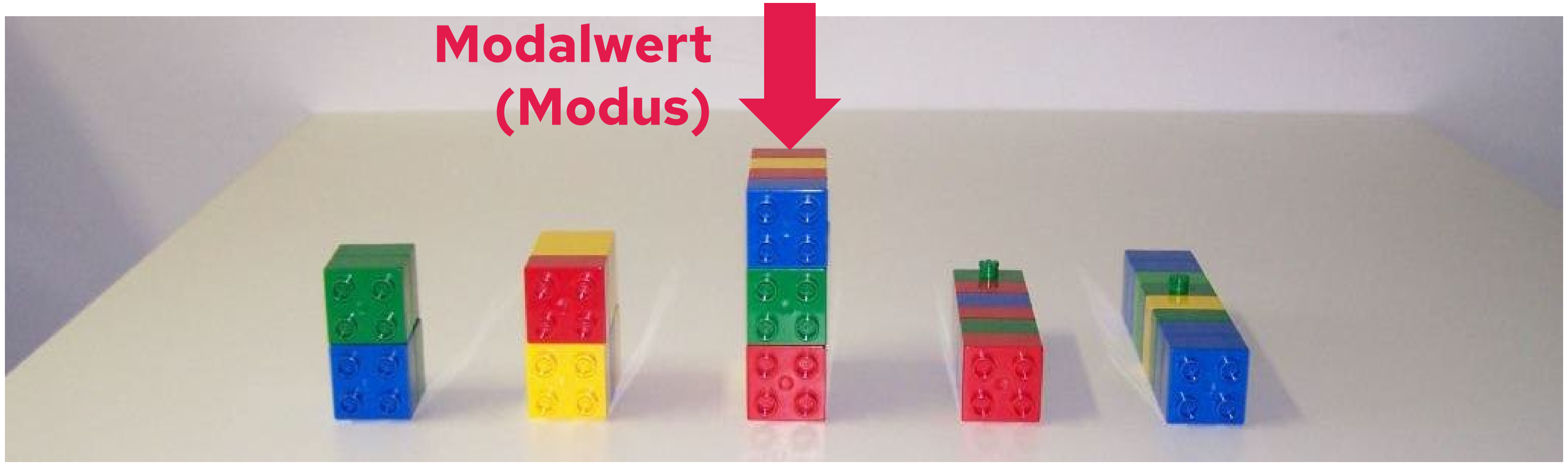
Mittelwert: Modalwert (Modus)

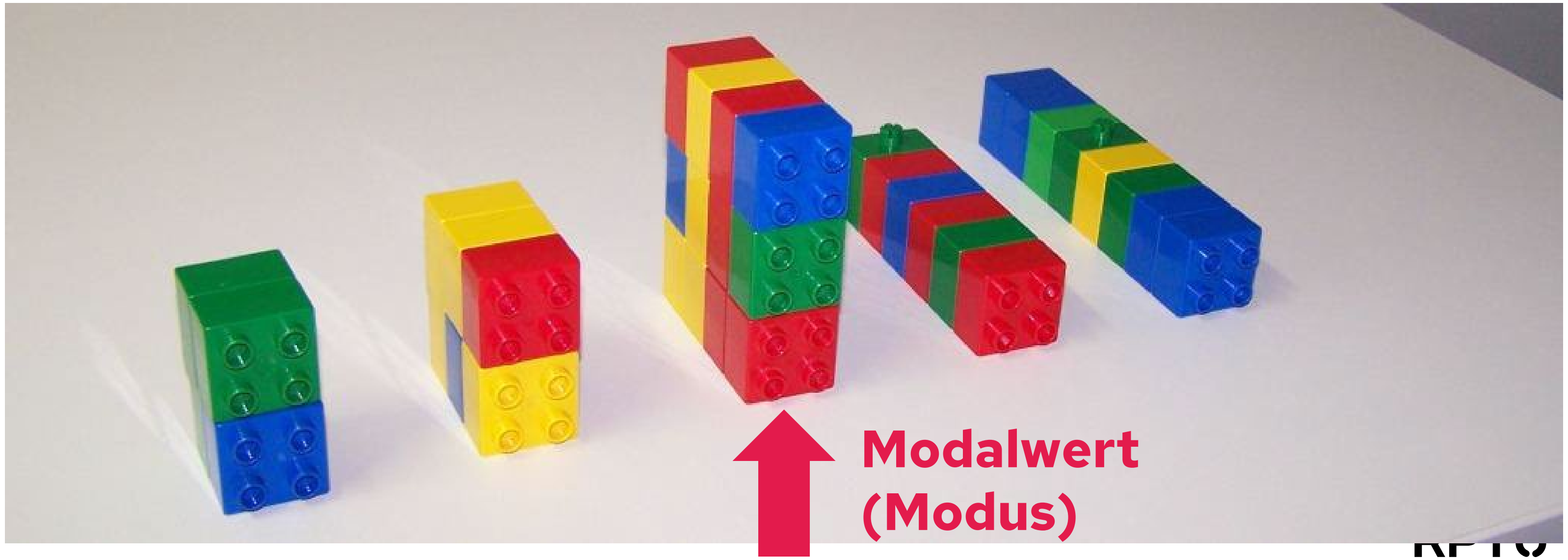
Modalwert (Modus)

Voraussetzung
Daten mindestens nominal skaliert.

Vorgehen
Anzahlen der Daten mit demselben Wert zählen.

Modalwert
Wert(e) der (die) am häufigsten auftritt (-treten).





2.4.2 Mittelwert
Median (Zentralwert)

RPTU

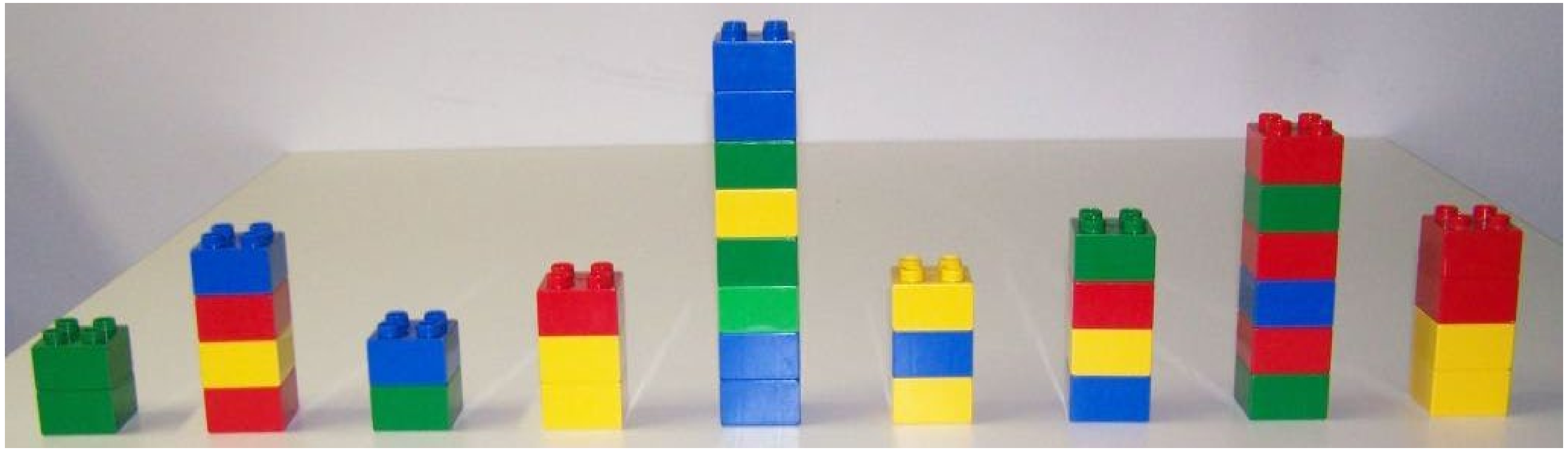
Mittelwert: Median (Zentralwert)

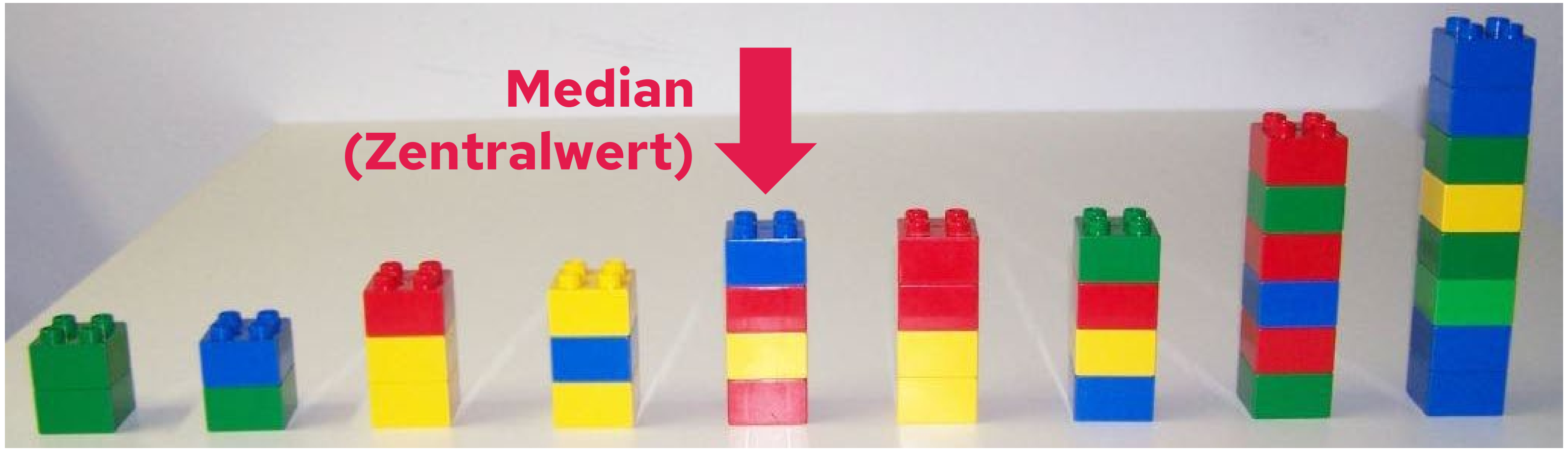
Median (Zentralwert)

Voraussetzung: Daten mindestens ordinal skaliert.

Vorgehen: Datenreihe der Größe nach ordnen.

$$x_1 \leq x_2 \leq \ \dots \ \leq x_n$$





https://phet.colorado.edu/sims/html/center-and-variability/latest/center-and-variability_all.html?locale=de

Mittelwert: Median (Zentralwert)

Median (Zentralwert)

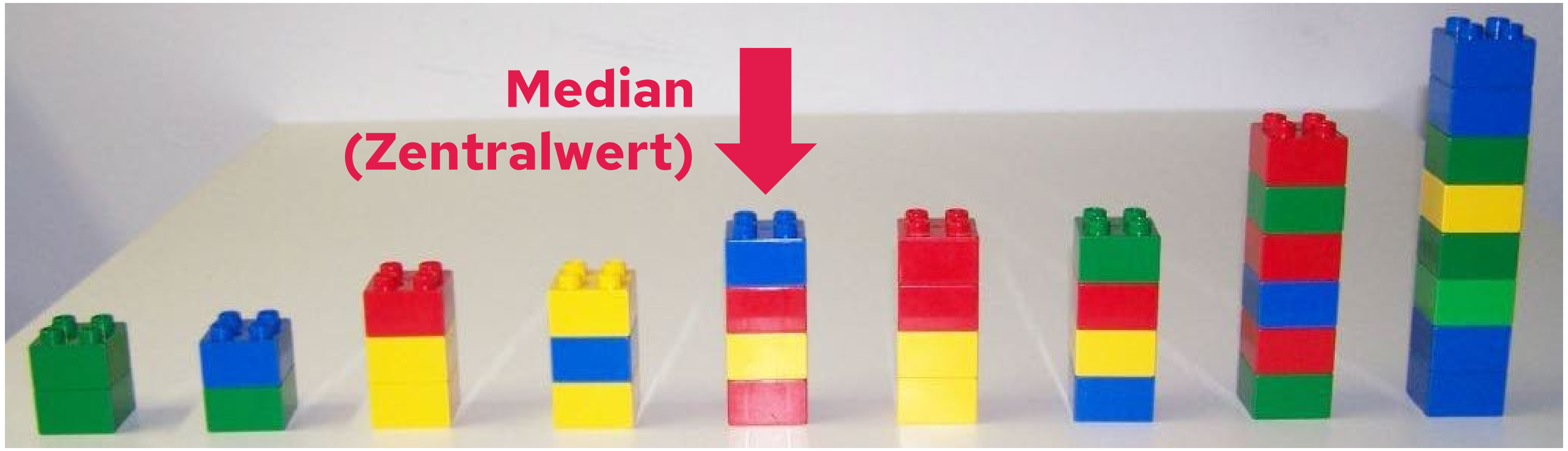
Voraussetzung: Daten mindestens ordinal skaliert.

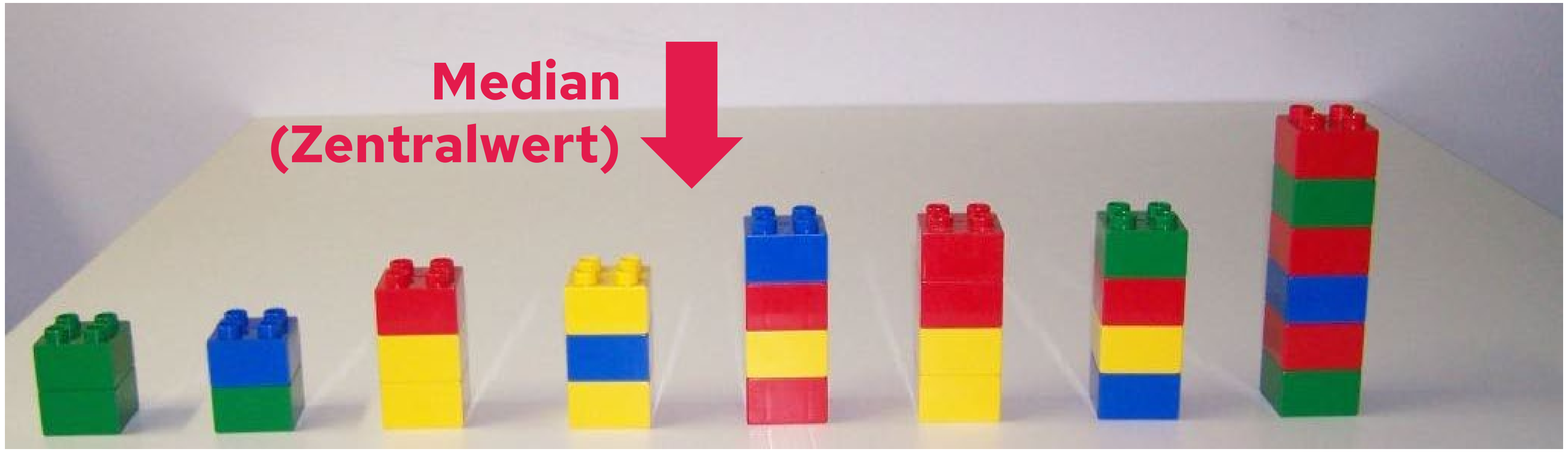
Vorgehen: Datenreihe der Größe nach ordnen.

$$x_1 \leq x_2 \leq \ \dots \ \leq x_n$$

Median: Wert des Datums in der Mitte der Reihe.

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{k+1} & \text{für } n = 2k+1 \\ \left.\begin{array}{c} \frac{1}{2} \cdot (x_k + x_{k+1}) \\ \text{bzw.} \\ x_k \ \text{ oder } \ x_{k+1} \end{array}\right\} & \text{für } n = 2k \end{cases}$$



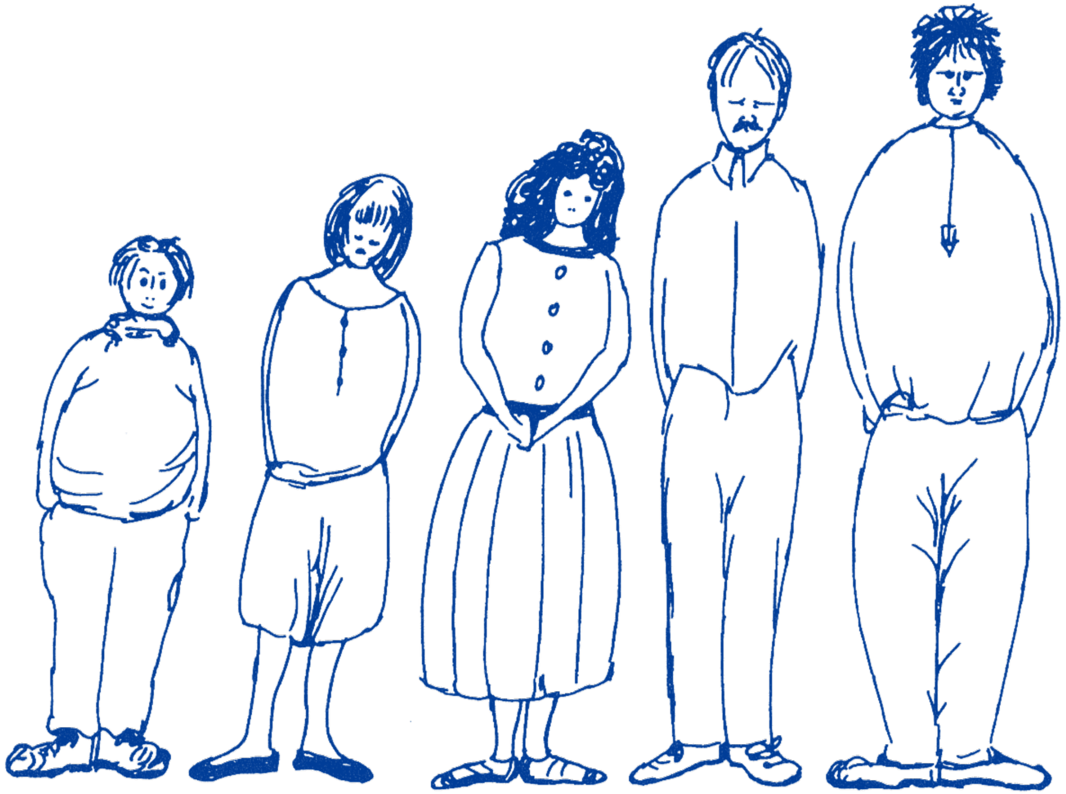


Besondere Eigenschaften: **(1)** Robust gegen „Ausreißer" **(2)** Kleinste Summe absoluter Abweichungen von den Daten.

Mittelwert: Median (Zentralwert)

Median (Zentralwert)

„Der Median ist die Größe der Person, die in der Mitte steht, wenn man die Personen der Größe nach sortiert hat." Krämer (1999)



Median (Zentralwert)

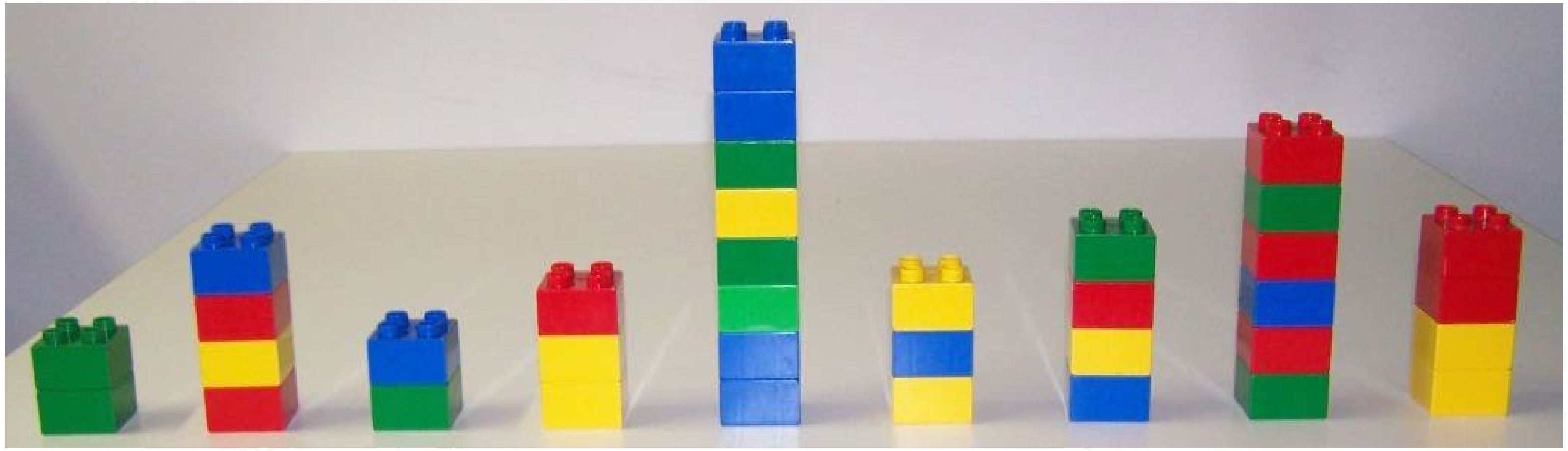
 Krämer, W. (1999[4]). Statistik verstehen – Eine Gebrauchsanleitung. Campus Verlag

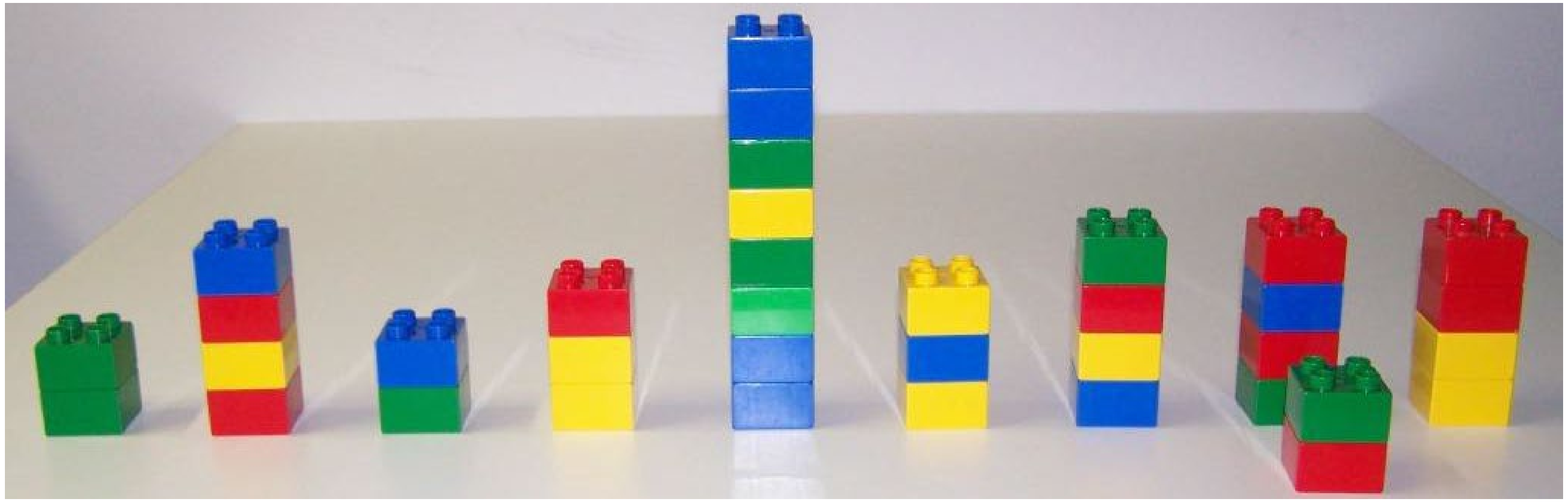
2.4.3 Mittelwert
Arithmetisches Mittel

Mittelwert: Arithmetisches Mittel

Arithmetisches Mittel

Voraussetzung
Daten mindestens metrisch skaliert.





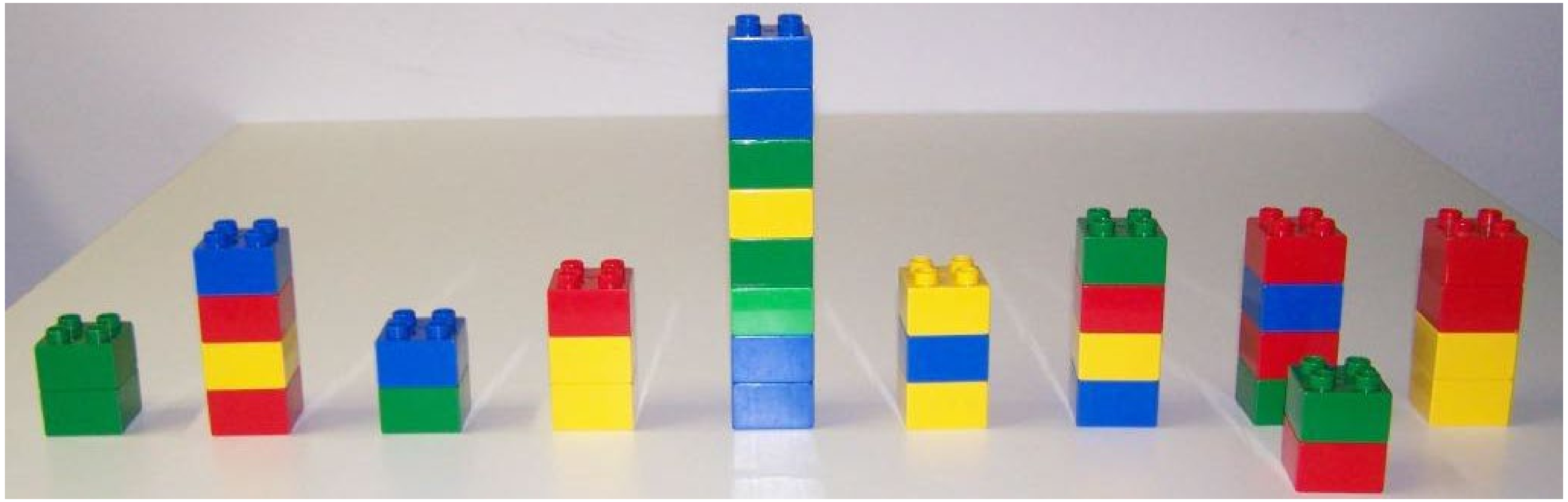
 Sill, H.-D. (2016). Inhaltliche Vorstellungen zum arithmetischen Mittel. *Mathematik lehren, 197*, 8-14

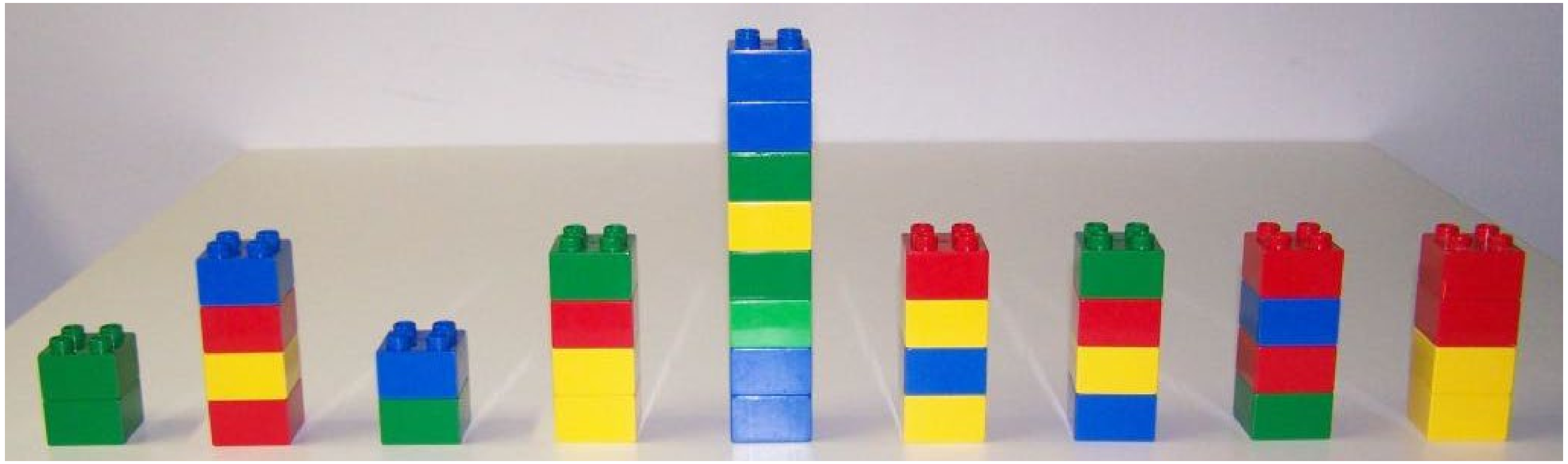
Mittelwert: Arithmetisches Mittel

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Arithmetisches Mittel

Voraussetzung
Daten mindestens metrisch skaliert.





 Sill, H.-D. (2016). Inhaltliche Vorstellungen zum arithmetischen Mittel. *Mathematik lehren, 197*, 8-14

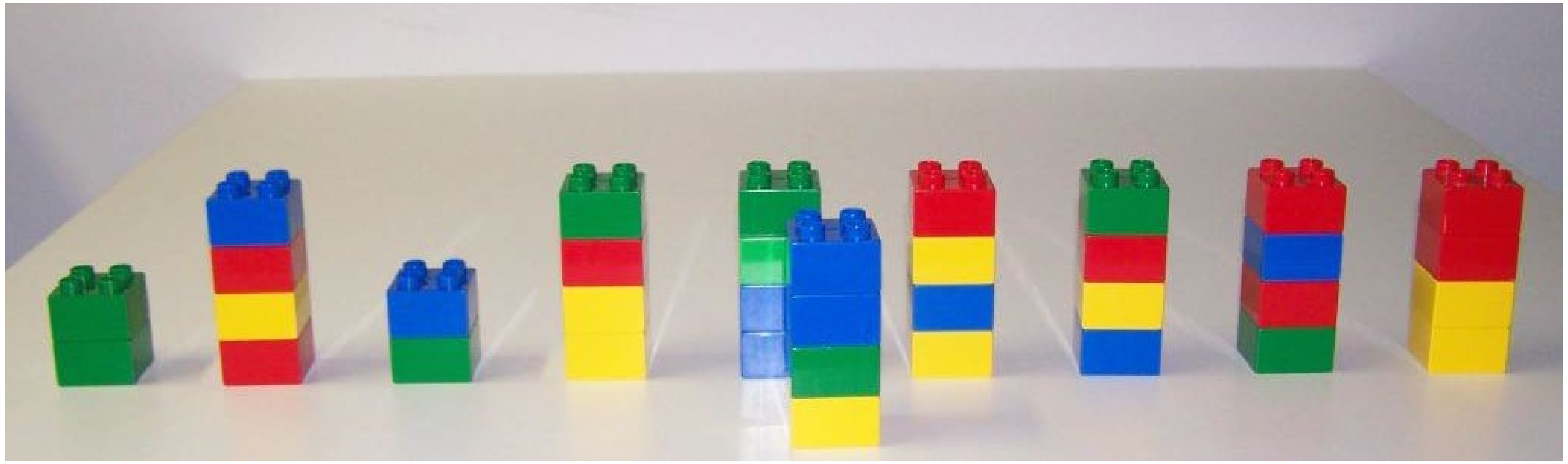
Mittelwert: Arithmetisches Mittel

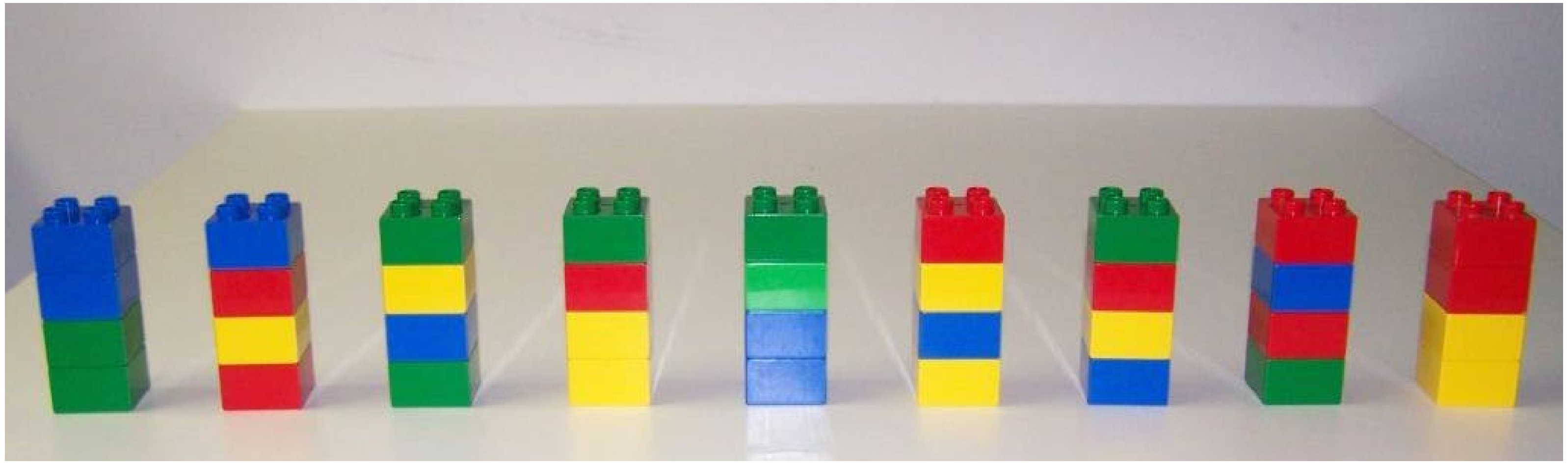
Arithmetisches Mittel

Voraussetzung
Daten mindestens metrisch skaliert.

Wert

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$





 Sill, H.-D. (2016). Inhaltliche Vorstellungen zum arithmetischen Mittel. *Mathematik lehren, 197*, 8-14

Mittelwert: Arithmetisches Mittel

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

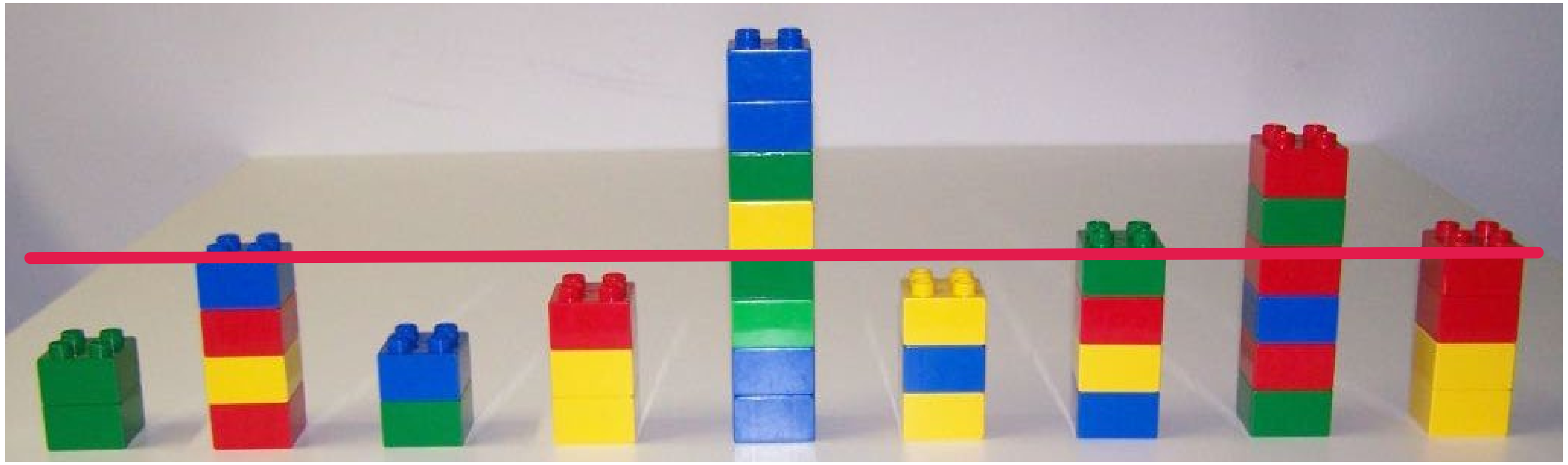
Arithmetisches Mittel

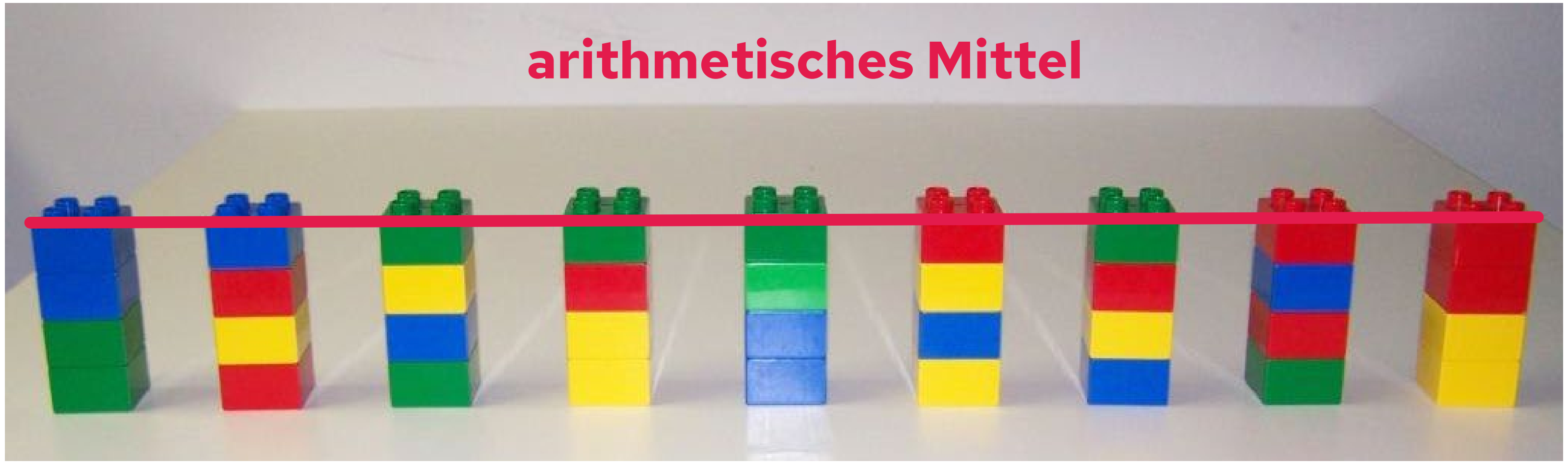
Voraussetzung
Daten mindestens metrisch skaliert.

Wert

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Besondere Eigenschaft
Kleinste Summe quadrierter Abweichungen von den gegebenen Daten.





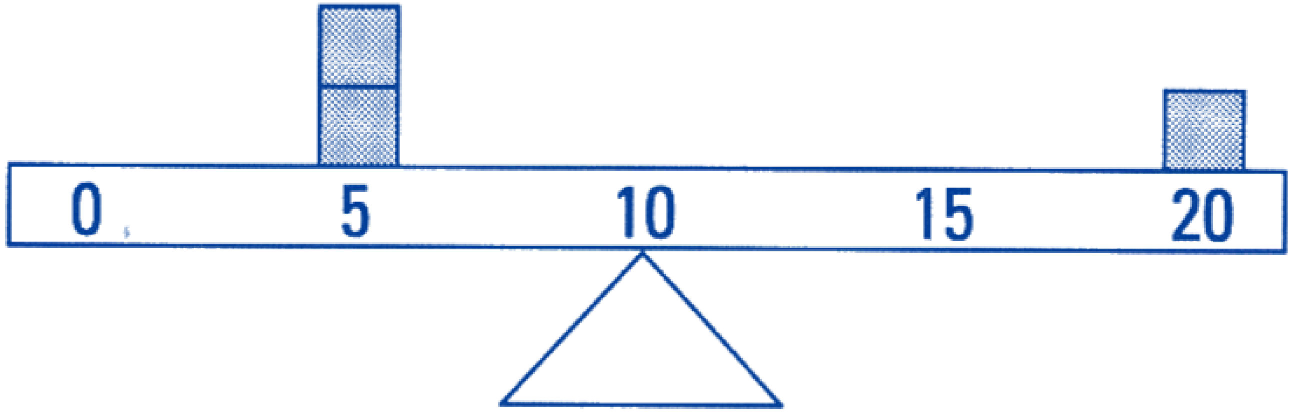
https://phet.colorado.edu/sims/html/mean-share-and-balance/latest/mean-share-and-balance_all.html?locale=de
https://juergen-roth.de/excel _material/stochastik/noten.xlsx
https://ruffle.rs/demo/

Mittelwert: Arithmetisches Mittel

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Arithmetisches Mittel

„Das arithmetische Mittel von 5, 5 und 20 ist 10: die Stelle, die den Balken balanciert.“ Krämer (1999)



https://phet.colorado.edu/sims/html/mean-share-and-balance/latest/mean-share-and-balance_all.html?locale=de

Krämer, W. (1999[4]). Statistik verstehen – Eine Gebrauchsanleitung. Campus Verlag

Sill, H.-D. (2016). Inhaltliche Vorstellungen zum arithmetischen Mittel. *Mathematik lehren, 197*, 8-14

Mittelwert: Arithmetisches Mittel

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Arithmetisches Mittel
im Schulbuch Leppig (2007)

https://phet.colorado.edu/sims/html/mean-share-and-balance/latest/mean-share-and-balance_all.html?locale=de

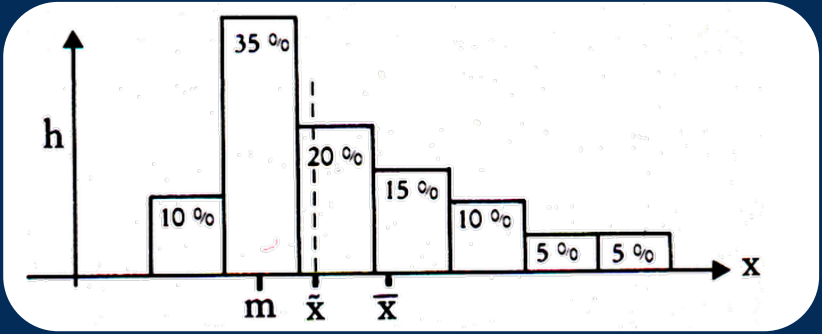
Leppig (Hrsg.) (2007). Lernstufen Mathematik M9, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 196

https://ruffle.rs/demo/

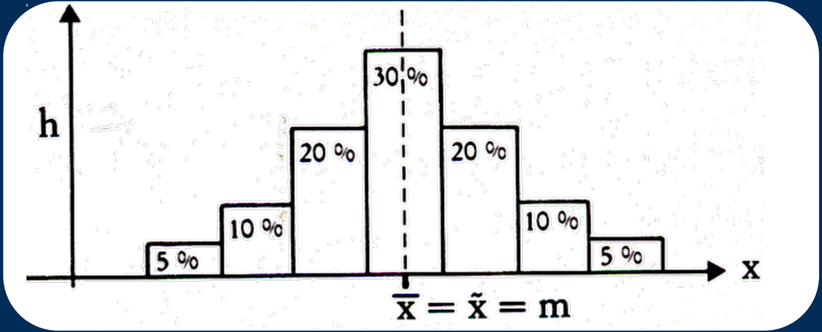
Zusammenhang zwischen Mittelwerten

Häufig auftretende **Typen eingipfliger Verteilungen** eines Merkmals in einer Stichprobe

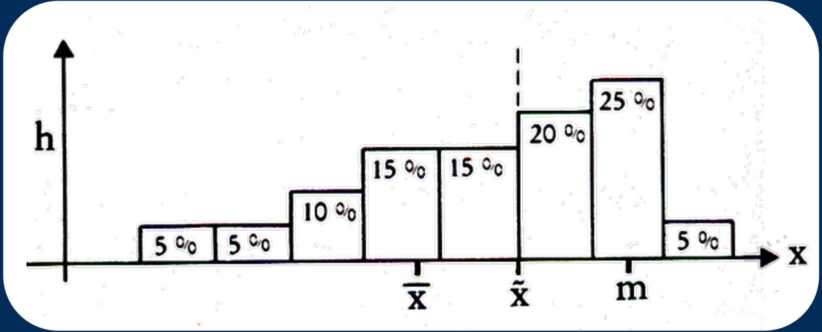
Rechtsschiefe (linkssteile) Verteilung
Modalwert m
$<$ Median (Zentralwert) $\tilde{x}$
$<$ Arithmetisches Mittel $\bar{x}$



Symmetrische Verteilung
Modalwert m
$=$ Median (Zentralwert) $\tilde{x}$
$=$ Arithmetisches Mittel $\bar{x}$



Linksschiefe (rechtssteile) Verteilung
Modalwert m
$>$ Median (Zentralwert) $\tilde{x}$
$>$ Arithmetisches Mittel $\bar{x}$



Winter, H. (1995). Mittelwerte – eine grundlegende mathematische Idee. *Mathematik lehren, 8*, 4-15

2.4.4 Mittelwerte

Weitere Mittelwerte

Weitere Mittelwerte

Geometrisches Mittel

Voraussetzung
Daten bilden eine Verhältnisskala.

Wert

$$x_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ \ldots \ \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

Wichtige Anwendung
Durchschnittliche Wachstumsfaktoren

Quadratisches Mittel

Voraussetzung
Daten bilden eine Verhältnisskala.

Wert

$$x_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ \ldots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Harmonisches Mittel

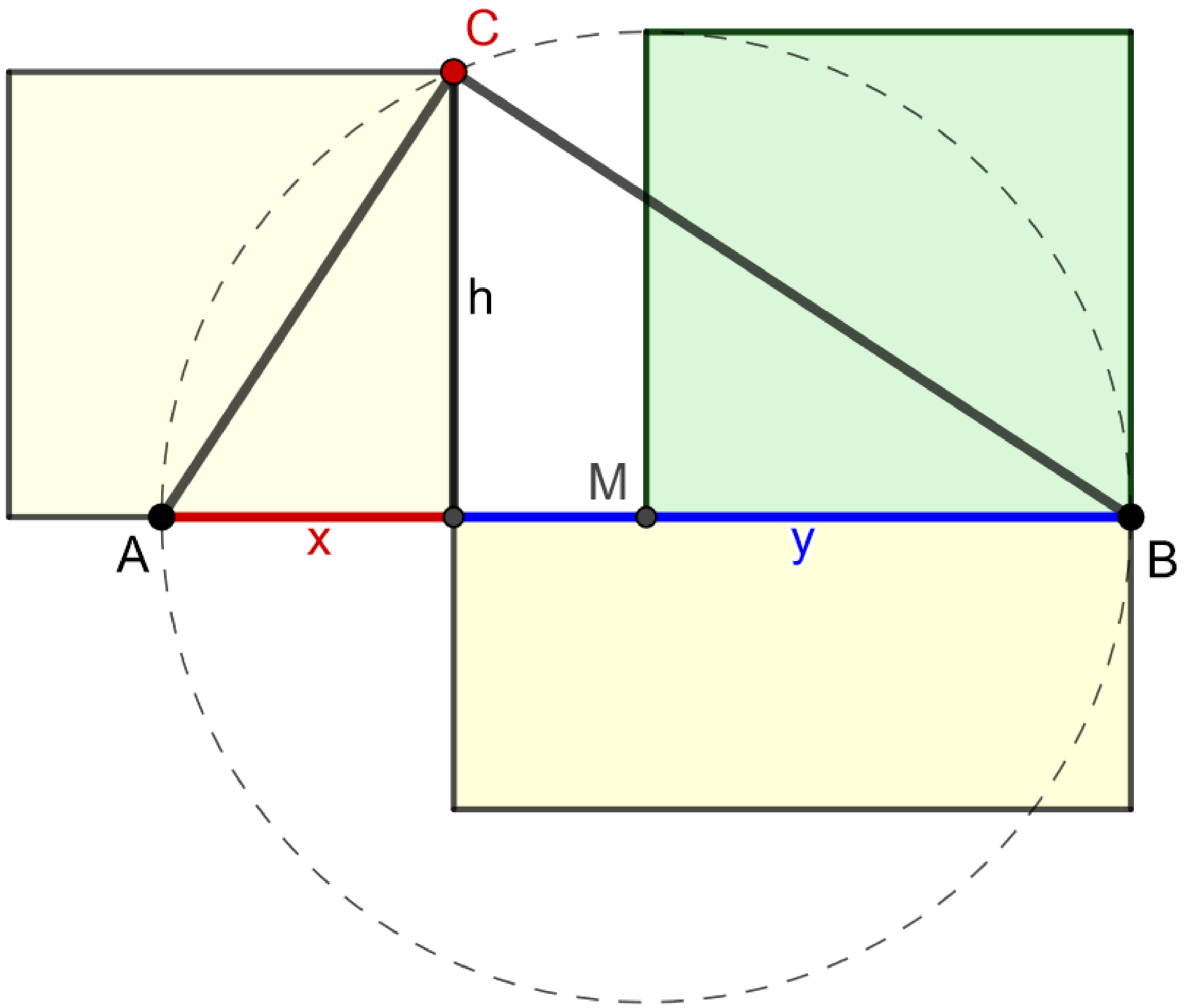
Voraussetzung
Daten bilden eine Verhältnisskala.

Wert

$$x_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ \ldots \ + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

Wichtige Anwendung
Mittlere Geschwindigkeit

Arithmetisches ↔ Geometrisches Mittel



$$\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x + y}{2}$$

2.4.5 Weitere Lagemaße
Quantile

Weitere Lagemaße: Quantile

p-Quantil x_p (oder Perzentil) mit $0 \leq p \leq 1$

Der Wert x_p teilt die geordnete Stichprobe $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ so in zwei Teile, dass $p \cdot 100\%$ aller Werte kleiner als x_p und $(1-p) \cdot 100\%$ aller Werte größer als x_p sind.

0,3-Quantil = 30. Perzentil

Bestimmung des p-Quantils x_p eines geordneten Wertebereichs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$x_p = \begin{cases} x_{\lfloor n\cdot p \rfloor + 1} & \text{falls } n \cdot p \text{ nicht ganzzahlig} \\ \frac{1}{2} \cdot \left(x_{n\cdot p} + x_{n \cdot p + 1}\right) & \text{falls } n \cdot p \text{ ganzzahlig} \end{cases}$$

Der Ausdruck $\lfloor y \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq y\}$ bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich der reellen Zahl y ist (Gaußklammer 🌍).

$\lfloor -3{,}6 \rfloor = -4$
$\lfloor 2 \rfloor = 2$
$\lfloor 5{,}3 \rfloor = 5$

Weitere Lagemaße: Quantile

Bemerkung

Neben dem **Median** $x_{0,5}$ als 0,5-Quantil besitzen weitere häufig verwendete **Quantile** eigene Namen. So heißen z. B.

- $x_{0,25}$ **unteres Quartil** und
- $x_{0,75}$ **oberes Quartil**.

Beispiel

- Geordnete Stichprobe: (Anzahl der Werte: $n = 18$)

  $x_1 = 40,\quad x_2 = 42,\quad x_3 = 53,\quad x_4 = 62,\quad x_5 = 63,$
  $x_6 = 64,\quad x_7 = 65,\quad x_8 = 67,\quad x_9 = 70,\quad x_{10} = 72,$
  $x_{11} = 72,\quad x_{12} = 74,\quad x_{13} = 75,\quad x_{14} = 78,\quad x_{15} = 78,$
  $x_{16} = 79,\quad x_{17} = 80,\quad x_{18} = 83$

- **Median (0,5-Quantil)**
  - $0{,}5 \cdot n = 0{,}5 \cdot 18 = 9$ ist ganzzahlig.
  - $x_{0,5} = \frac{1}{2} \cdot (x_9 + x_{10}) = \frac{1}{2} \cdot (70 + 72) = 71$

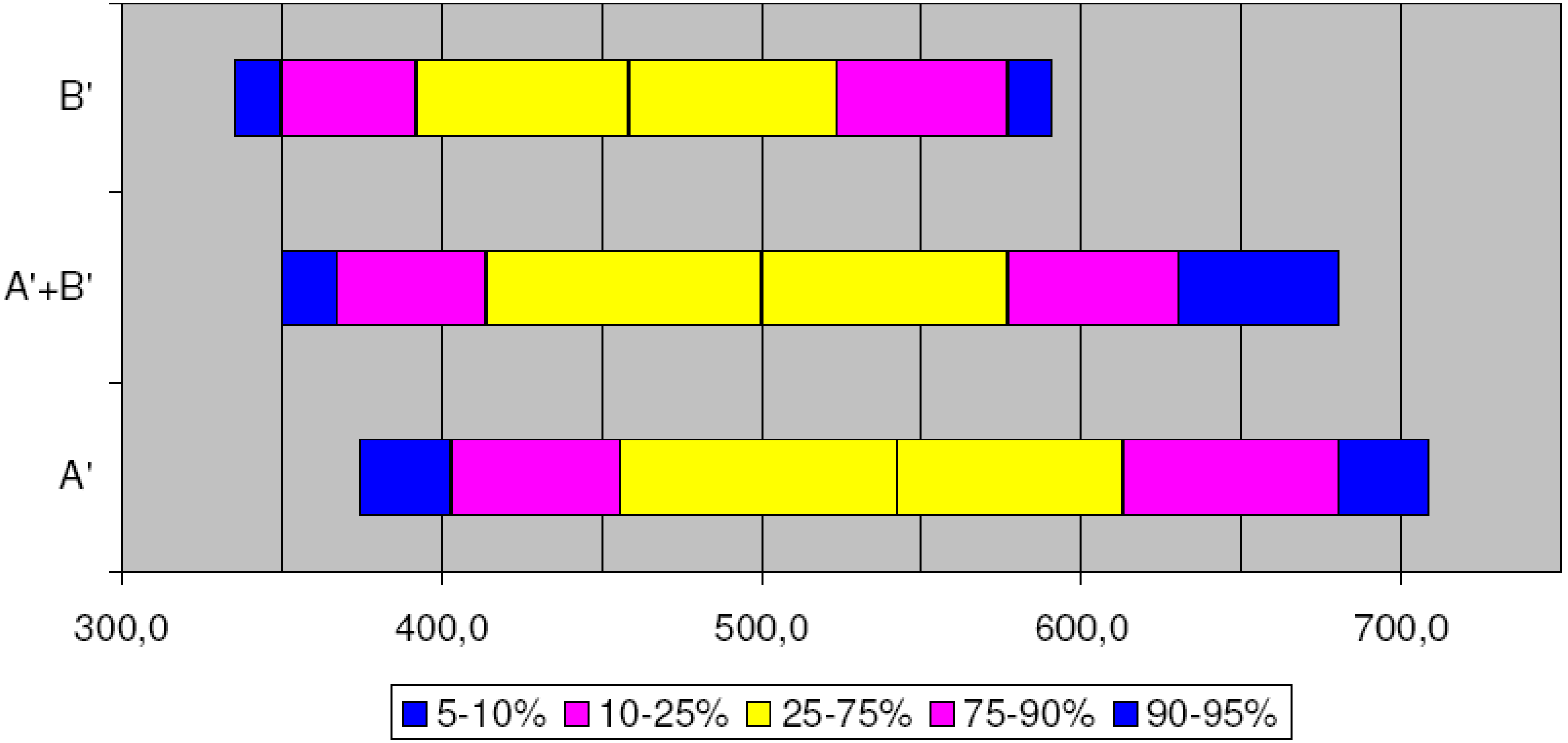
- **Unteres Quartil (0,25-Quantil)**
  - $0{,}25 \cdot n = 0{,}25 \cdot 18 = 4{,}5$ ist *nicht* ganzzahlig.
  - $x_{0,25} = x_{\lfloor 4,5 \rfloor + 1} = x_{4+1} = x_5 = 63$

- **Oberes Quartil (0,75-Quantil)**
  - $0{,}75 \cdot n = 0{,}75 \cdot 18 = 13{,}5$ ist *nicht* ganzzahlig.
  - $x_{0,75} = x_{\lfloor 13,5 \rfloor + 1} = x_{13+1} = x_{14} = 78$

https://www.geogebra.org/m/ekzjfhmg

Weitere Lagemaße: Quantile

„PISA-Darstellung“: Perzentilbänder



2.4.6 Streuungsmaße

Grundidee der Streuungsmaße

Warum Streuungsmaße?

Durchschnitte allein machen nicht glücklich!

„Sollen wir das arithmetische Mittel als durchschnittliche Körpergröße nehmen und den Gegner erschrecken, oder wollen wir ihn einlullen und nehmen den Median?“ Krämer (2006)

 Krämer, W. (2006[8]). So lügt man mit Statistik. Piper

Warum Streuungsmaße?

Durchschnitte allein machen nicht glücklich!

„Wenn ich jeden Tag der Woche 1 Flasche Rotwein trinke, macht das im Durchschnitt 1 Flasche, und ich bin gut gelaunt.

Wenn ich die Woche über gar nichts trinke und am Sonntag 7, macht das ebenfalls im Durchschnitt 1 und ich bin tot." Krämer (2002)

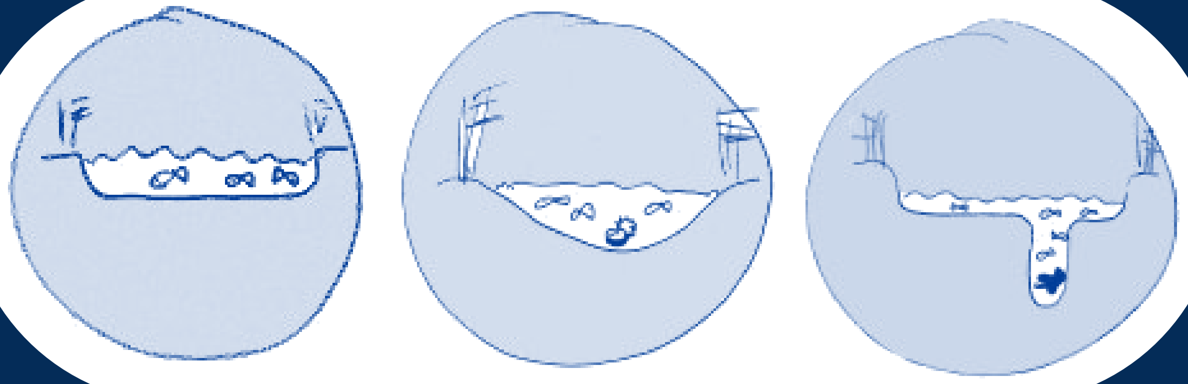
Krämer, W. (2002). Statistik für die Westentasche. Piper

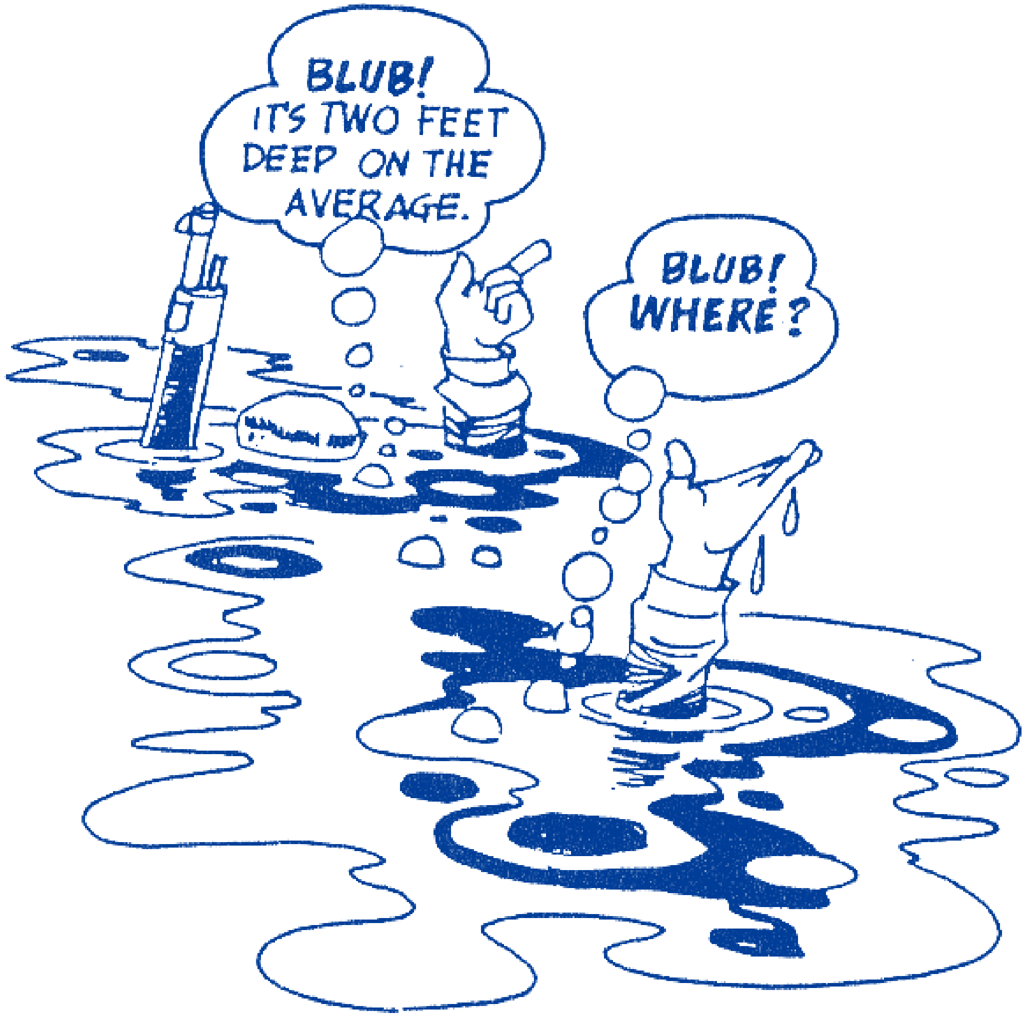
Warum Streuungsmaße?

Durchschnitte allein machen nicht glücklich!

Flussquerschnitte gleicher mittlerer Tiefe

madin.net





 Krämer, W. (2006[8]). So lügt man mit Statistik. Piper

2.4.7 Streuungsmaß
Spannweite

Streuungsmaß: Spannweite

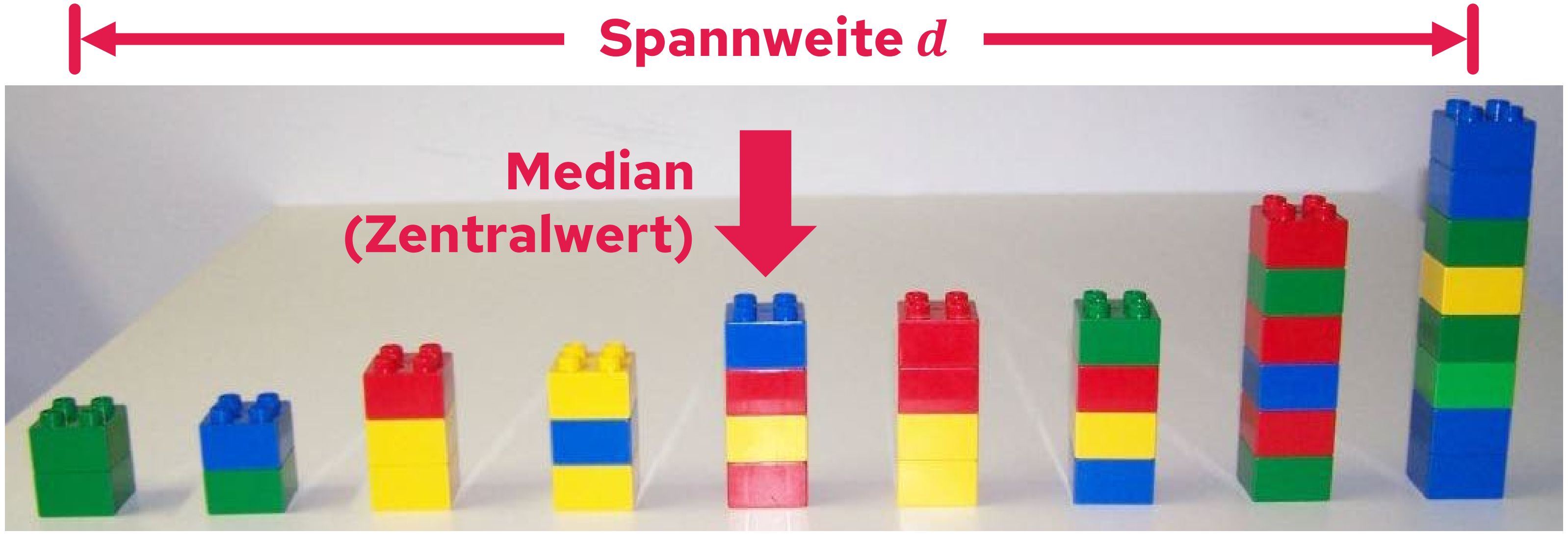
Spannweite

Voraussetzung: Daten mindestens ordinal skaliert.

Vorgehen: Datenreihe der Größe nach ordnen.
$x_{min} = x_1 \leq \cdots \leq x_n = x_{max}$

Wert: Die Spannweite d ist die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert: $d = x_{max} - x_{min}$

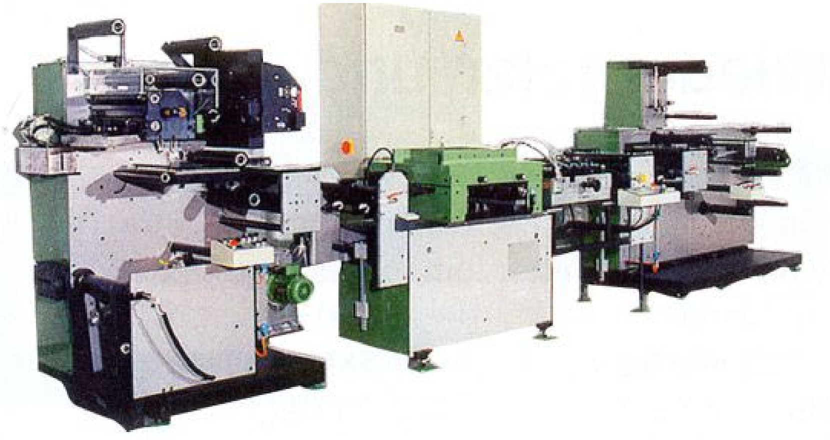
Passendes Streuungsmaß zum Mittelwert Median.



Spannweite im Schulbuch

Die Spannweite

Für die Zündkerzenherstellung werden in einem Industriebetrieb mit einer Stanzmaschine von Rundeisen 35 mm lange Teile abgestanzt. Das Gewicht der Teile soll 30 g betragen und wird stichprobenartig durch Wiegen kontrolliert.



Dabei ergeben sich während einer Schicht folgende Werte:

Gewicht (g)	29,7	29,8	29,9	30,0	30,1	30,2	30,3
Häufigkeit	9	12	28	24	19	17	13

Unabhängig von der Häufigkeit beträgt der höchste Wert 30,3 g, der niedrigste 29,7 g.
Die Differenz zwischen diesen beiden Werten wird **Spannweite** genannt.
30,3 g – 29,7 g = 0,6 g. Die **Spannweite** beträgt 0,6 g.
Die Spannweite ist immer ein positiver Wert.
Beispiel: 8 °C, 3 °C, – 2 °C, –5 °C   8 ° – (–5 °) = 8 ° + 5 ° = 13 °
Die Spannweite beträgt 13 °C.

Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert ist die **Spannweite**.
Spannweite: größter Wert – kleinster Wert

 Leppig (Hrsg.) (2007). Lernstufen Mathematik M9, Bayern. Berlin: Cornelsen, S. 199

2.4.8 Streuungsmaß
Interquartilsabstand

Streuungsmaß: Interquartilsabstand

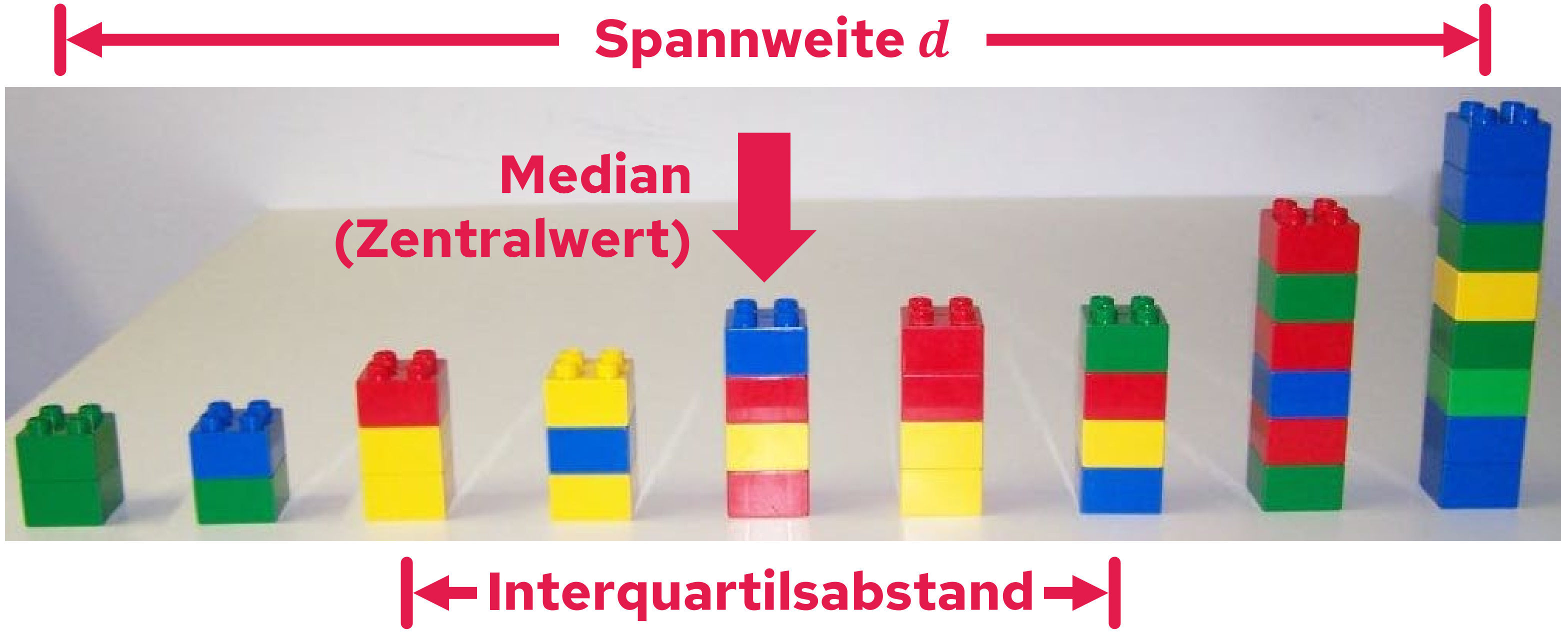
Interquartilsabstand (IQA)

Voraussetzung: Daten mindestens ordinal skaliert.

Vorgehen: Datenreihe der Größe nach ordnen.
$x_{min} = x_1 \leq \cdots \leq x_n = x_{max}$

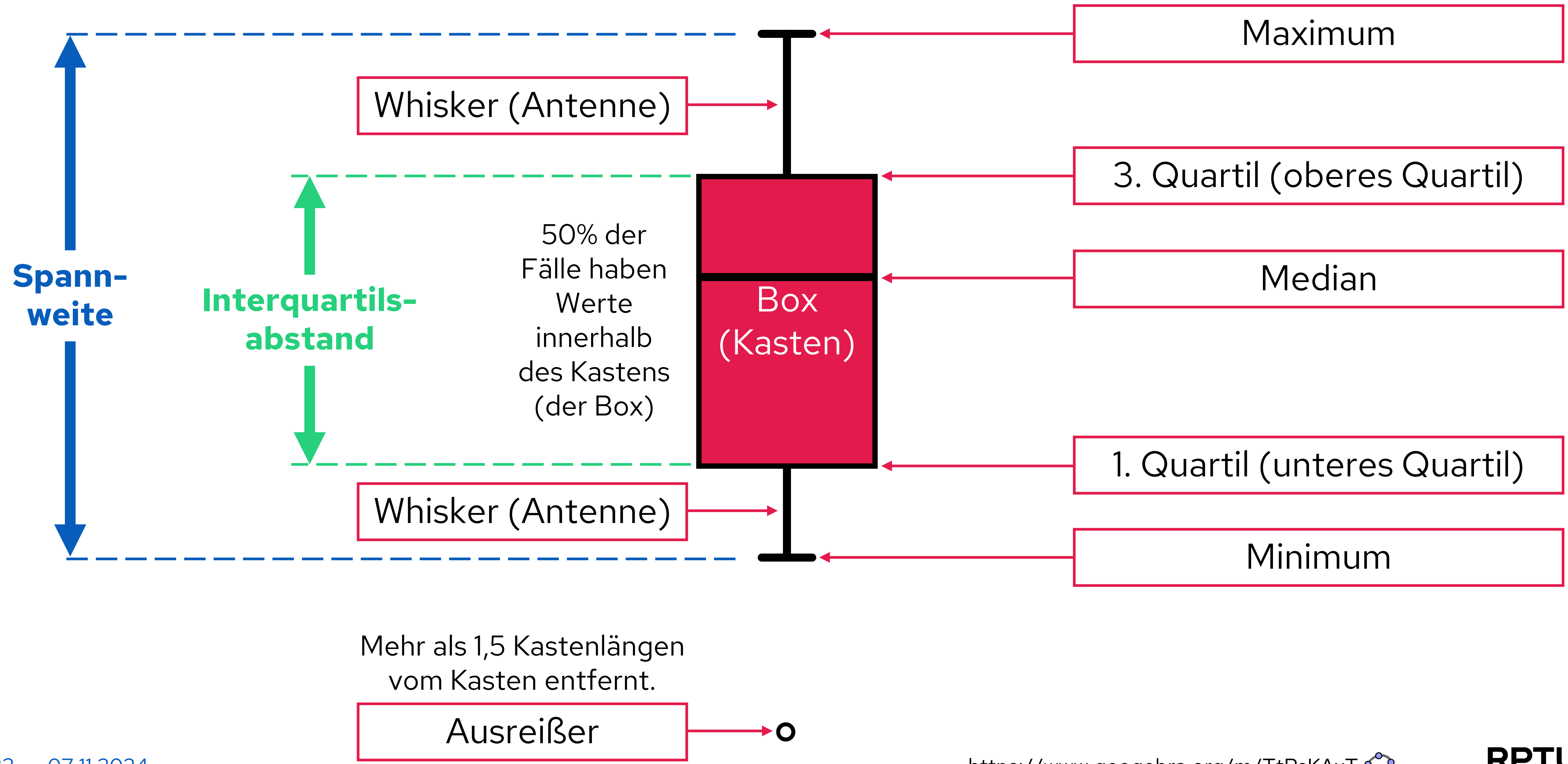
Wert: Differenz zwischen oberem $x_{0,75}$ und unterem Quartil $x_{0,25}$ (mittlerer Bereich mit 50% der Daten): $IQA = x_{0,75} - x_{0,25}$

Passendes Streuungsmaß zum Mittelwert Median.



Robust gegen „Ausreißer"

Streuungsmaße am Boxplot



https://www.geogebra.org/m/TtRsKAxT

2.4.9 Streuungsmaß
Mittlere absolute Abweichung

Streuungsmaß: Mittlere absolute Abweichung

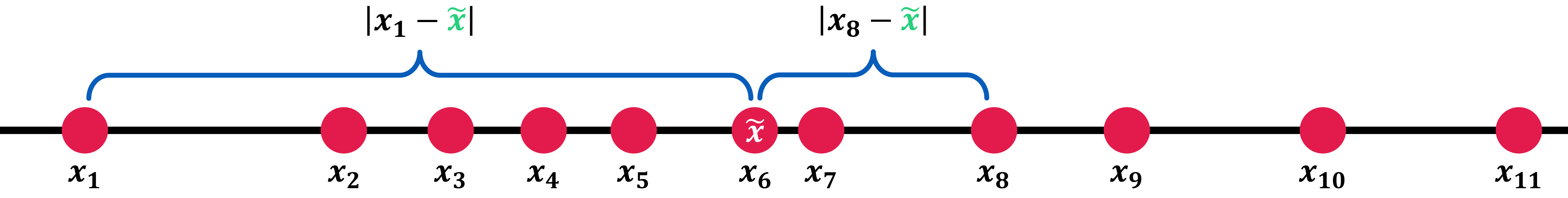
Mittlere absolute Abweichung

Voraussetzung
Daten bilden mindestens eine Intervallskala.

Passendes Streuungsmaß zu den Mittelwerten Median und arithmetisches Mittel.

Wert
Maß für die (lineare, absolute) Abweichung der Daten von einem Mittelwert

$$w = \frac{|x_1 - \tilde{x}| + \ldots + |x_n - \tilde{x}|}{n}$$



2.4.10 Streuungsmaße
Varianz und Standardabweichung

Streuungsmaße:
Varianz und Standardabweichung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Varianz

Voraussetzung
Daten bilden eine Verhältnisskala.

Wert
Arithmetisches Mittel der quadratischen Abweichung der Daten vom arithmetischen Mittel einer Häufigkeitsverteilung

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Passendes Streuungsmaß
zum Arithmetischen Mittel $\bar{x}$.

Standardabweichung

Voraussetzung
Daten bilden eine Verhältnisskala.

Wert
- Maß für die Abweichung der Daten vom arithmetischen Mittel
- Einheit entspricht der Einheit der Merkmalsausprägungen

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Passendes Streuungsmaß
zum Arithmetischen Mittel $\bar{x}$.

Streuungsmaß: Standardabweichung

Die Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$

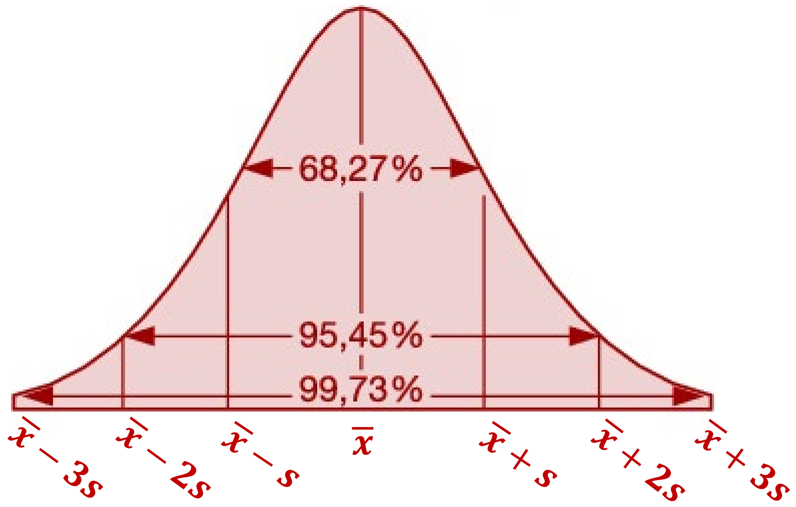
… ist die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung der Daten von ihrem Arithmetischen Mittel,

… bleibt bei der Addition einer Konstanten zu den Ausgangsdaten unverändert,

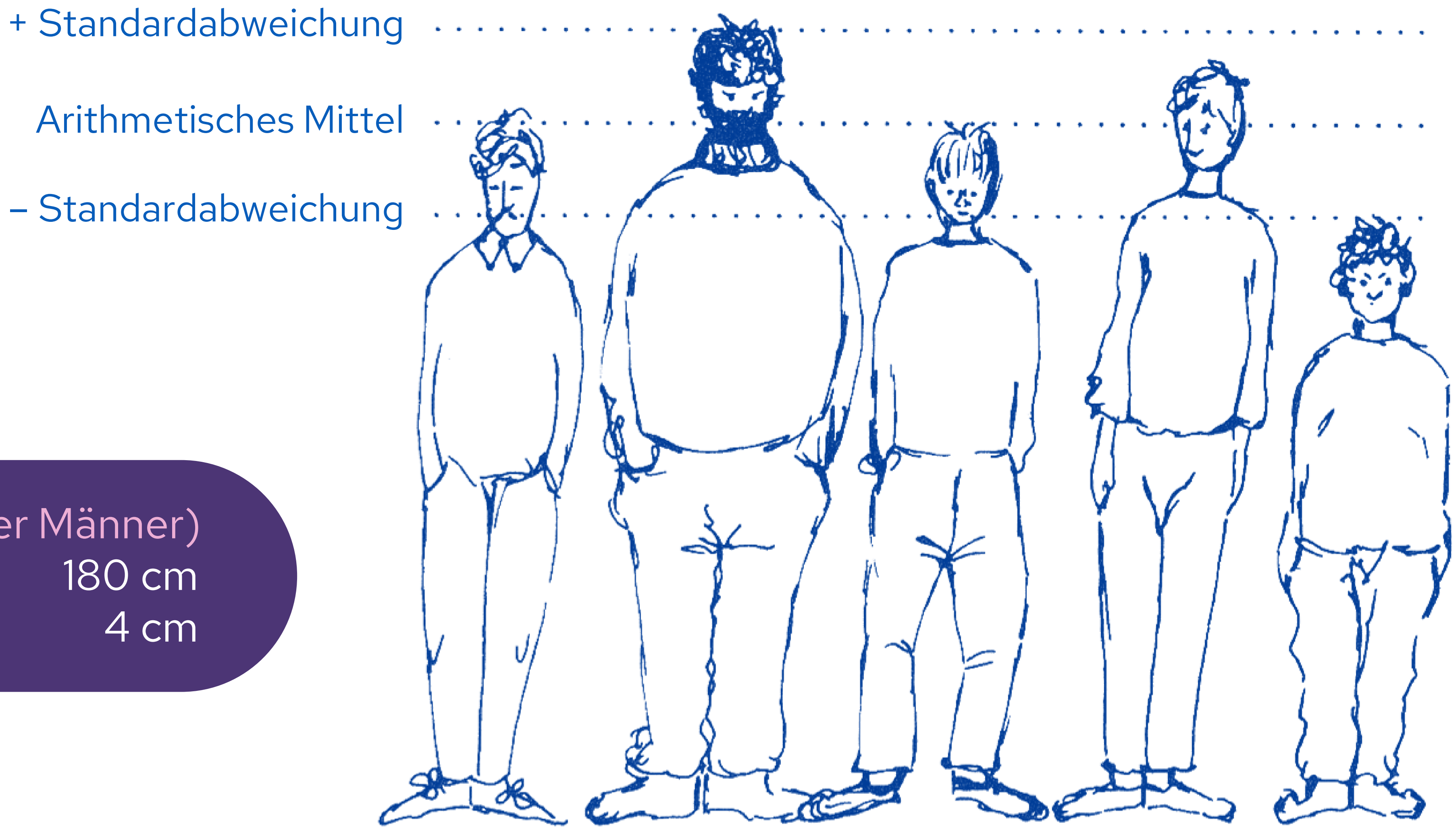
… ändert sich bei Multiplikation aller Ausgangsdaten mit einem positiven Faktor a um den gleichen Faktor a.

Bei großen, annähernd „normalverteilten“ Datenmengen liegen rund $\frac{2}{3}$ aller Werte weniger als eine Standardabweichung vom Arithmetischen Mittel entfernt.

Normalverteilung



Streuungsmaß: Standardabweichung



Körpergröße (deutscher Männer)

Arithmetisches Mittel:	180 cm
Standardabweichung:	4 cm

 Krämer, W. (1999[4]). Statistik verstehen – Eine Gebrauchsanleitung. Campus Verlag

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU