



Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

Modul 12a

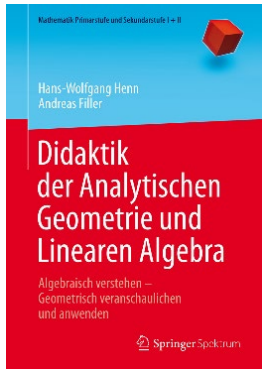
Jürgen Roth

02.04.2026 juergen-roth.de



R
TU
P

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau



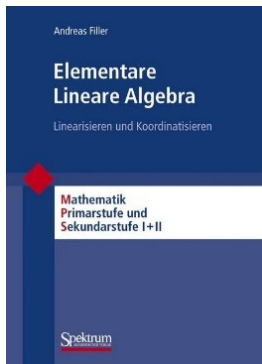
Internetseite zur Veranstaltung und Skript

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-linearen-algebra-und-analytischen-geometrie

Textdatenbank

juergen-roth.de/lehre ⇒ Texte

Modul 12a-Prüfung:  
Mündliche Portfolioprüfung

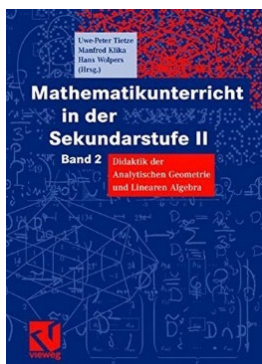


Zeitschriften

juergen-roth.de/zeitschriften

Buchempfehlungen

- Filler, A. (2011): Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren. Spektrum Akademischer Verlag
- Henn, H.-W.; Filler, A. (2015): Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden. Springer Spektrum
- Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H. (Hrsg.) (2000): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 2, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Vieweg



Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

1. Ziele und Inhalte
2. Algebraisieren des Anschauungsraums
3. Skalarprodukt – Längen und Winkel messen
4. Modellieren und Angewandte Mathematik
5. Kegelschnitte



1

Didaktik der Linearen Algebra & Analytischen Geometrie

Ziele und Inhalte

Kapitel 1: Ziele und Inhalte

- 1.1 Das Zentrale ↪
- 1.2 KMK-Bildungsstandards ↪
- 1.3 Lehrplan MSS RLP ↪



Kapitel 1: Ziele und Inhalte

1.1 Das Zentrale

1.2 KMK-Bildungsstandards

1.3 Lehrplan MSS RLP

Selbststudium

Selbststudium



**Kultur-
historischer
Aspekt**



**Erkenntnis-
theoretischer
Aspekt**



**Pragmatischer
Aspekt**



**Schöpferischer
Aspekt**



Winter: Mathematikunterricht sollte drei Grunderfahrungen ermöglichen



Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, **in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen.**

Lesen Sie den Text von Winter!



Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, **als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenlernen und begreifen.**



In der Auseinandersetzung mit Aufgaben **Problemlösefähigkeiten erwerben**, die über die Mathematik hinaus gehen (heuristische Fähigkeiten).

Tragfähiges mentales Modell für
einen Begriff oder ein Verfahren

**Grund-
vorstellung**

Grundlage für die
Verständnisentwicklung

Wissen und Können, sowie die
Fähigkeit & Bereitschaft diese
flexibel & erfolgreich einzusetzen.

- Inhaltsbezogene Kompetenzen
- Prozessbezogene Kompetenzen

Kompetenz

**Begriffe
rund ums
Verständnis**

**Funda-
mentale
Idee**

- Weite (logische Allgemeinheit)
- Fülle (vielfältige Anwendbarkeit)
- Sinn (im Alltagsleben verankert)

- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens
in einer typischen Situation
(geforderte Operation vorgegeben)

**Grund-
fertigkeit**

**Grund-
wissen**

- für Inhalt grundlegende Fakten
(Begriffe, Definitionen, Formeln, Sätze, ...)
- sollte auswendig gewusst werden

Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungszusammenhängen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen** haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen** werden mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert



Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

Prototypisches
Beispiel als
Verständnisanker



Mentale Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik

Arithmetik und Algebra

Denken in Zahlen und Strukturen

Geometrie

Strukturieren von Raum und Form

Lineare Algebra

Linearisieren und Koordinatisieren

Funktionen und Analysis

Funktionales und infinitesimales Denken

Stochastik

Daten analysieren und Zufall modellieren

Modellieren und Angewandte Mathematik

Anwenden von Mathematik

Fachdidaktische Kompetenzen

Affin-lineare Grundstrukturen

- Vektorraum (Basis, Dimension, Austauschsatz)
- euklidischer Vektorraum (mit Skalarprodukt)
- affiner Punktraum (Koordinatensystem)
- euklidischer Punktraum (mit euklidischer Metrik)

Struktur- verträgliche Abbildungen

- lineare Abbildungen
- orthogonale Abbildungen
- affine Abbildungen
- Isometrien

Lineare Funktionale und ihre geometri- sche Bedeutung

- positiv definite symmetrische Bilinearform (Skalarprodukt)
- Determinante(nform)
- Metrik, Längen-, Winkelmaß
- orientiertes Volumen eines n -dimensionalen Spats

Klassifikation von Abbildungen und Quadriken

- Basistransformation
- Matrizen transformation, Matrizenklassifikation
- Klassifikation von linearen Abbildungen
- Eigenwerte, Eigenvektoren
- Koordinatentransformation
- Klassifikation von Quadriken
- Klassifikation von affinen Abbildungen
- Fixgeraden von Abbildungen

Gleichungssysteme und Gaußscher Algorithmus; Matrizenkalkül

Algebraisieren des Anschauungsraums

- Einführung eines Koordinatensystems
- Lage von Punkten durch Koordinaten erfassen
- Geometrische Objekte durch Gleichungen bzw. Gleichungssysteme beschreiben
- Streckenlängen & Winkel berechnen

Geometrisieren algebraischer Gleichungen bzw. Gleichungssysteme

- Lösungen algebraischer Gleichungen visualisieren

Übergreifende Strukturen

- geometrische Beziehungen über Dimensionsgrenzen hinweg vereinheitlichen

Objektstudien

- Unterricht auf interessante geometrische Objekte (Kurven, Flächen, Körper) aufbauen

Zurückführen räumlicher Probleme auf ebene Probleme

Schnittfiguren, Projektionen



Koordinatisieren

Wahl eines geeigneten
Koordinatensystems



Parametrisieren

Beschreibung von Bahnkurven
durch Parametergleichungen



Vektorisieren

Erfassen von Strecken
mit Hilfe von Vektoren

Kollinearität & Vielfachheit von Vektoren

Vektorielle Beschreibung für
die Parallelität zweier Geraden

Komplanarität von Vektoren

Vektorielle Beschreibung für die Parallelität
dreier Geraden zur selben Ebene

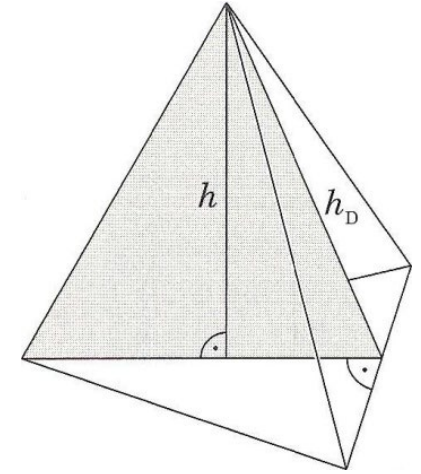
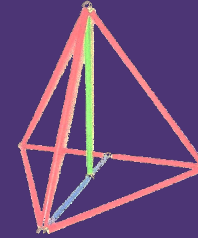
Skalarprodukt

Grundlage von Längen-, Abstands-
und Winkelberechnungen

Beispiel: Tetraeder

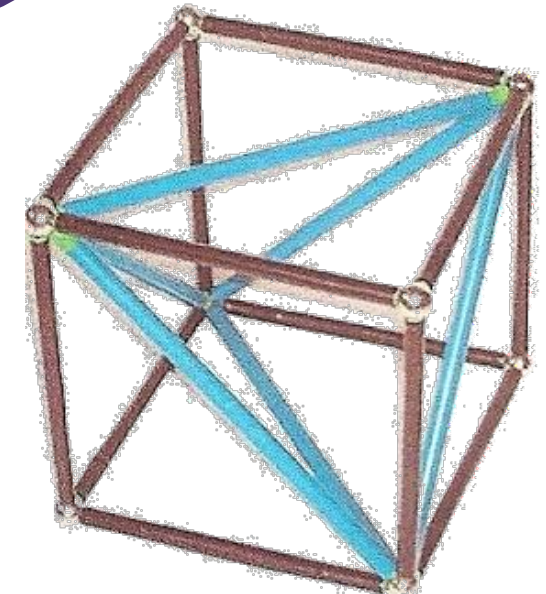
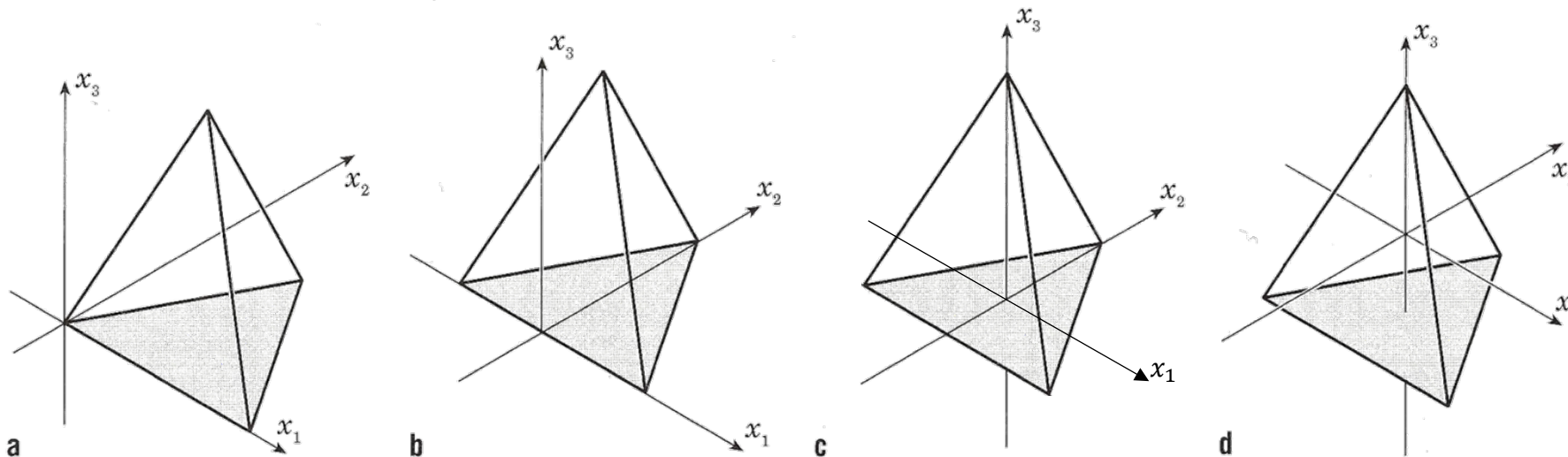
Aufgabe 1

Wie hoch ist ein gleichseitiger Tetraeder.



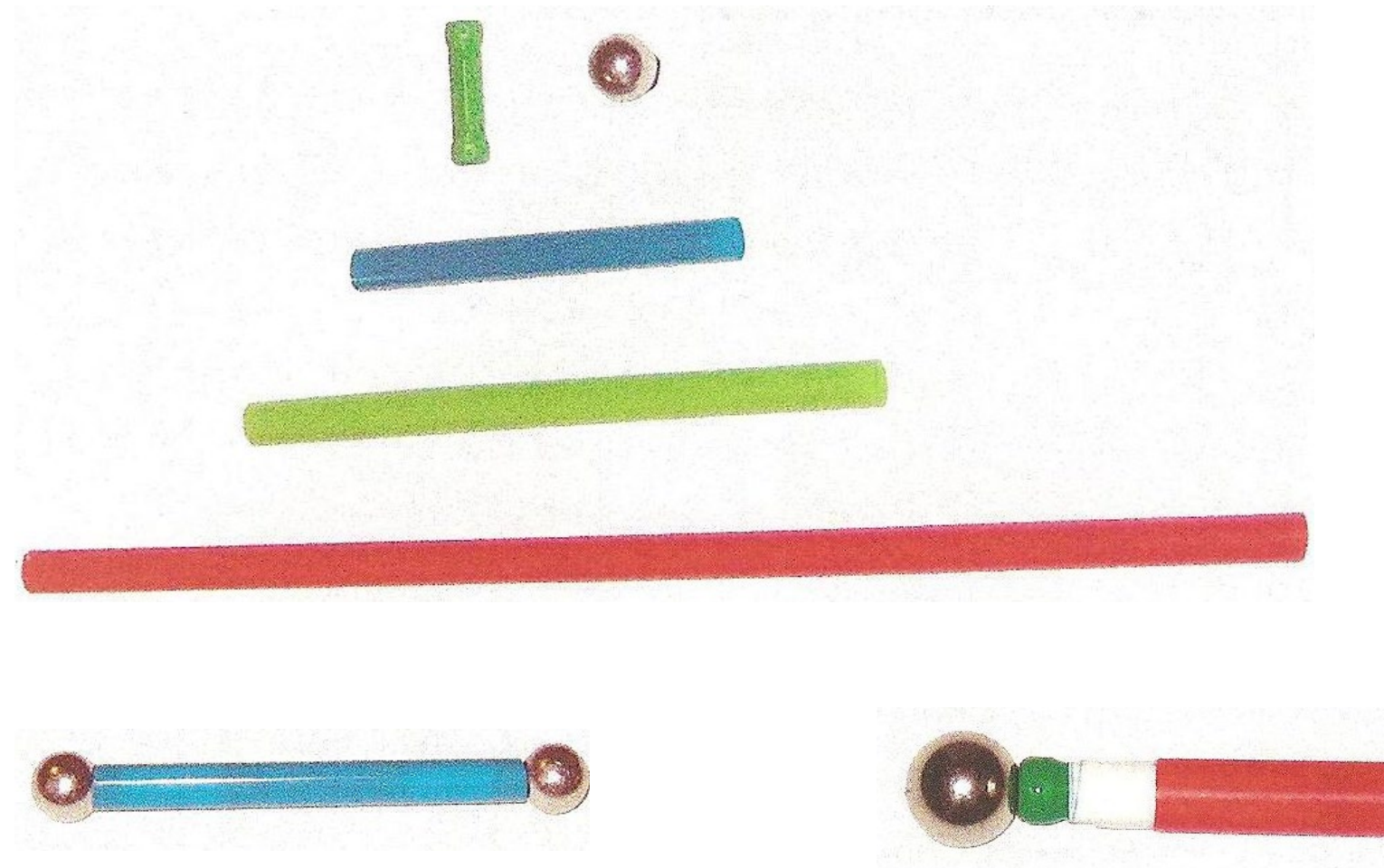
Aufgabe 2:

Wie können die Eckpunkte eines gleichseitigen Tetraeders der Kantenlänge a durch ein kartesisches Koordinatensystem beschrieben werden?



Modellbaukasten

Mit Hilfe bunter Strohhalme und eines Magnetbaukastens lassen sich auf einfache Weise Kantenmodelle herstellen. Die Magnetstäbchen müssen ggf. mit etwas Papier umwickelt werden, so dass sie nicht so leicht herausrutschen. Damit alles zusammen passt, müssen vorher die Kantenlängen berechnet und die Strohhalme entsprechend zugeschnitten werden.



Beispiel: Viviani-Kurve

Vincenzo Viviani

(* 5.4.1622, † 22.09.1703 in Florenz),
italienischer Mathematiker und Physiker



Viviani-Kurve

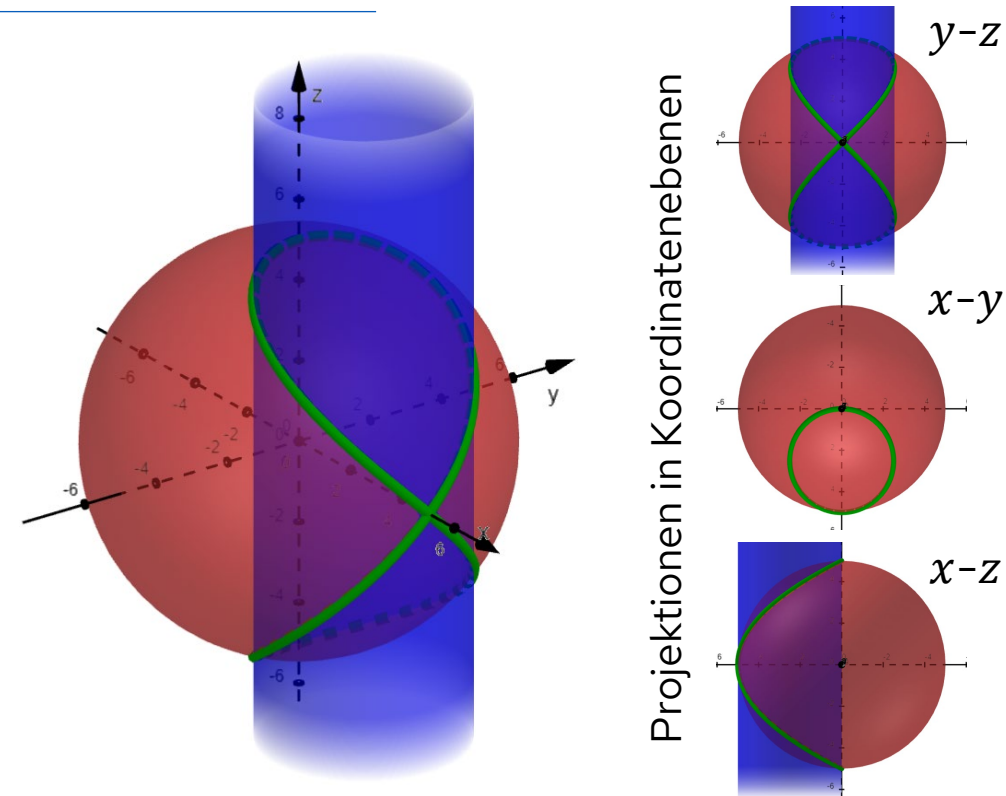
Die Viviani-Kurve ist gegeben durch folgende beiden kartesischen Gleichungen ($r = \text{konst.}$):

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

und

$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 = rx$$

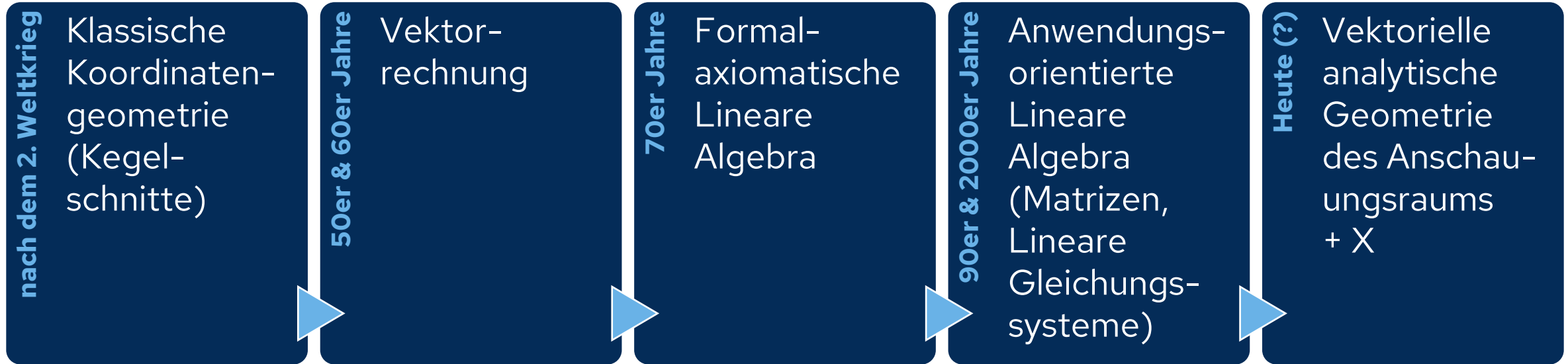
- Welche Bedeutung haben diese beiden Gleichungen?
- Welche Konsequenzen ergeben sich für die Viviani-Kurve?



Parameter- gleichungen der Viviani- Kurve

$$\begin{aligned}x &= \frac{r}{2} \cdot (1 + \cos(t)) \\y &= \frac{r}{2} \cdot \sin(t) \\z &= r \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

Geschichte: Analytische Geometrie in der Schule



Aber auch:

**Aufgabeninseln durch
das Zentralabitur**

- Enger Kanon an Standardaufgaben (Lage-, Schnitt- & Abstandbeziehungen)
- Wird häufig kritisiert

Kapitel 1: Ziele und Inhalte

1.1 Das Zentrale

1.2 **KMK-Bildungsstandards**

Selbststudium

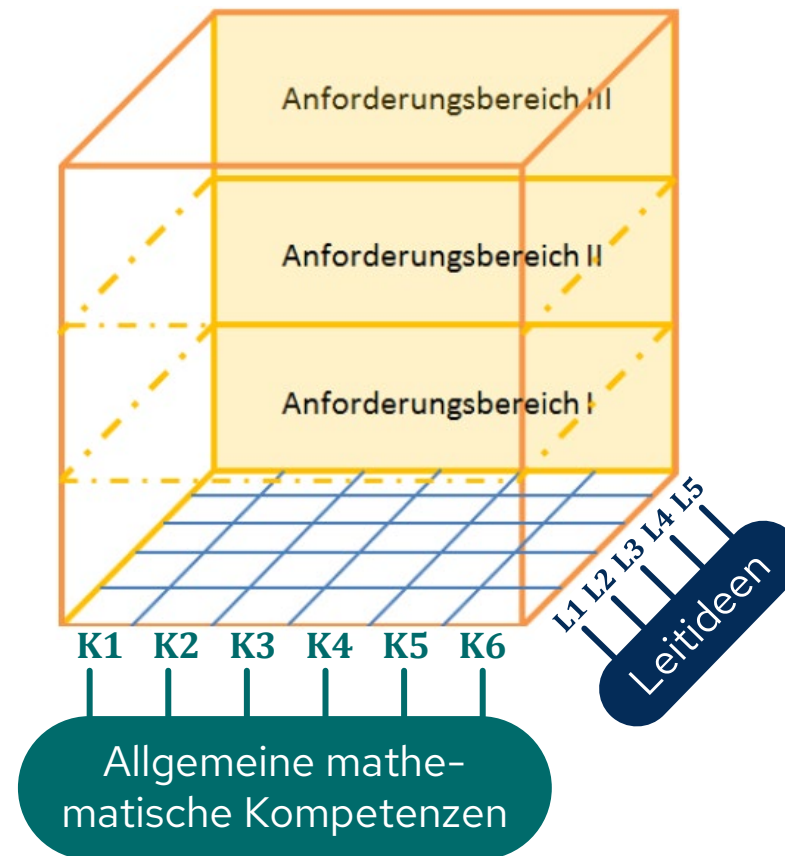
1.3 Lehrplan MSS RLP

Selbststudium



Allgemeine mathematische Kompetenzen

- [K1] Mathematisch argumentieren
- [K2] Probleme mathematisch lösen
- [K3] Mathematisch modellieren
- [K4] Mathematische Darstellungen verwenden
- [K5] Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- [K6] Mathematisch kommunizieren



Leitideen

- [L1] Algorithmus und Zahl
- [L2] Messen
- [L3] Raum und Form
- [L4] Funktionaler Zusammenhang
- [L5] Daten und Zufall

Grundlegendes Anforderungsniveau (Grundkurs)

Erhöhtes Anforderungsniveau (Leistungskurs)

Leitidee

Umfang mathematischer Inhalte

- Grundkenntnisse
- in Leitideen ausgewiesen

Umfang mathematischer Inhalte

- größer
- in Leitideen ausgewiesen
- erhöhter Komplexitäts-, Vertiefungs-, Präzisierungs- & Formalisierungsgrad

Anforderungs- bereiche bzgl. allgemeiner mathematischer Kompetenzen

Prüfungsleistungen

- Schwerpunkt: Anforderungsbereich II
- Anforderungsbereiche I & III berücksichtigen
- Anforderungsbereiche I und II stärker akzentuieren

Prüfungsleistungen

- Schwerpunkt: Anforderungsbereich II
- Anforderungsbereiche I & III berücksichtigen
- Anforderungsbereiche II und III stärker akzentuieren

Digitale Mathematikwerkzeuge

Entwicklung mathematischer Kompetenzen durch sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützen



Unterricht und Prüfungen

Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung.

Potenzial digitaler Werkzeuge

entfaltet sich im Mathematikunterricht

- beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,
- durch Verständnisförderung für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,
- durch Reduktion schematischer Abläufe und Verarbeitung größerer Datenmengen,
- durch Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich reflektierter Nutzung von Kontrollmöglichkeiten.

[K1] Mathematisch Argumentieren

- Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen
- Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen

Spektrum

- einfache Plausibilitätsargumente
- inhaltlich-anschauliche Begründungen
- formales Beweisen

Typische Formulierungen

- „Begründen Sie ...!“
- „Widerlegen Sie ...!“
- „Gibt es ...?“
- „Gilt das immer?“

Anforderungsbereich I

- Routineargumentationen (bekannte Sätze, Verfahren, Herleitungen, ...) wiedergeben und anwenden
- einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen
- auf der Basis von Alltagswissen argumentieren

Anforderungsbereich II

überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen, erläutern oder entwickeln

Anforderungsbereich III

- Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln
- verschiedene Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit bewerten

[K2] Probleme mathematisch lösen

- Erkennen & Formulieren math. Probleme
- Auswählen geeigneter Lösungsstrategien
- Finden & Ausführen geeigneter Lösungswege

Spektrum

- bekannte Strategien anwenden
- komplexe/neuartige Strategien konstruieren

Heuristische Prinzipien

- „Skizze anfertigen“
- „systematisch probieren“
- „zerlegen und ergänzen“
- „Symmetrien verwenden“
- „Extremalprinzip“; „Invarianten finden“
- „vorwärts und rückwärts arbeiten“

Anforderungsbereich I

Lösungsweg einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation & Auswahl einer naheliegenden Strategie finden (z. B. Analogiebetrachtung)

Anforderungsbereich II

Lösungsweg zu einer Problemstellung finden (z. B. durch mehrschrittiges, strategiestütztes Vorgehen)

Anforderungsbereich III

Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems oder zur Beurteilung verschiedener Lösungswege entwickeln und anwenden (z. B. Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung, durch Anwenden mehrerer Heuristiken)

[K3] Mathematisch modellieren

Wechsel zwischen Realsituationen und math. Begriffen, Resultaten oder Methoden

- Konstruieren passender math. Modelle
- Verstehen oder Bewerten vorgegeb. Modelle

Spektrum

- Standardmodelle (z. B. bei linearen Zusammenhängen)
- Komplexe Modellierungen

Typische Teilschritte des Modellierens

- Strukturieren & Vereinfachen geg. Realsituationen
- Übersetzen realer Situation in math. Modell
- Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen
- Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bzgl. der Realsituation

Anforderungsbereich I

- vertraute und direkt erkennbare Modelle anwenden
- Realsituation direkt in ein math. Modell überführen
- Mathem. Resultat auf geg. Realsituation übertragen

Anforderungsbereich II

- mehrschrittige Modellierungen mit wenigen und klar formulierten Einschränkungen vornehmen
- Ergebnisse solcher Modellierungen interpretieren
- Mathem. Modell an veränderte Umstände anpassen

Anforderungsbereich III

- komplexe Realsituation modellieren, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen
- Mathematische Modelle im Kontext einer Realsituation überprüfen, vergleichen und bewerten

[K4] Mathematische Darstellungen verwenden

- Auswählen geeigneter Darstellungsformen
- Erzeugen mathematischer Darstellungen
- Umgehen mit gegebenen Darstellungen

Spektrum

- Standarddarstellungen (z. B. Wertetabellen)
- eigene Darstellungen, die Strukturieren und Dokumentieren individueller Überlegungen sowie Argumentation und Problemlösen unterstützen

Typische mathem. Darstellungen

- Diagramme
- Graphen
- Tabellen
- Formeln

Anforderungsbereich I

Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen

Anforderungsbereich II

- gegebene Darstellungen verständig interpretieren oder verändern
- zwischen verschiedenen Darstellungen wechseln

Anforderungsbereich III

- mit unvertrauten Darstellungen und Darstellungsformen sachgerecht und verständig umgehen
- eigene Darstellungen problemadäquat entwickeln
- verschiedene Darstellungen und Darstellungsformen zweckgerichtet beurteilen

[K5] Mit symbolischen, formalen & technischen Elementen der Mathematik umgehen

[K5] Mit symbolischen, formalen & technischen Elementen der Mathematik umgehen

Ausführen von Operationen mit math. Objekten (z. B. Zahlen, Größen, Variablen, Terme, Gleichungen, Funktionen, Vektoren, geometrische Objekte)

Spektrum

- einfache & überschaubare Routineverfahren
- komplexen Verfahren einschließlich deren reflektierender Bewertung

Weitere Aspekte dieser Kompetenz

Faktenwissen und grundlegendes Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten math. Aufgabenstellungen, auch mit eingeführten Hilfsmitteln & digitalen Werkzeugen

Anforderungsbereich I

- elementare Lösungsverfahren verwenden
- Formeln und Symbole anwenden
- Math. Hilfsmittel & digitale Mathewerkzeuge nutzen

Anforderungsbereich II

- formale mathematische Verfahren anwenden
- mit mathematischen Objekten im Kontext umgehen
- math. Hilfsmittel & digitale Mathematikwerkzeuge je nach Situation/Zweck gezielt auswählen & einsetzen

Anforderungsbereich III

- komplexe Verfahren durchführen
- verschiedene Lösungs- & Kontrollverfahren bewerten
- Möglichkeiten & Grenzen math. Verfahren, Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge reflektieren

[K6] Mathematisch kommunizieren

- Entnehmen von Informationen aus Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen
- Überlegungen und Resultate unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache darlegen

Spektrum

- direkten Informationsentnahme aus Alltagstexten bzw. Aufschreiben einfacher Lösungswege
- sinnentnehmendes Erfassen fachsprachlicher Texte bzw. strukturierte Darlegung oder Präsentation eigener Überlegungen

Anforderungsbereich I

- einfache math. Sachverhalte darlegen
- Informationen aus kurzen (mathematischen) Texten identifizieren und auswählen
(Informationsanordnung \cong math. Bearbeitungsschritte)

Anforderungsbereich II

- Mehrschr. Lösungswege & Ergebnisse verst. darlegen
- Math. Äußerungen (auch fehlerhafte) interpretieren
- math. Informationen aus Texten identifizieren/auswählen
(Informationsanordnung \neq math. Bearbeitungsschritte)

Anforderungsbereich III

- komplexe math. Lösung oder Argumentation kohärent und vollständig darlegen oder präsentieren
- mathematische Fachtexte sinnentnehmend erfassen
- mündliche & schriftliche mathematische Äußerungen miteinander vergleichen, bewerten und ggf. korrigieren

Mathematische Leitideen

- Unter „**Inhalten**“ werden insbesondere auch adäquate **Grundvorstellungen** verstanden, die ein Verständnis dieser Inhalte erst konstituieren.
- Die **inhaltsbezogenen Kompetenzen** werden jeweils **übergreifenden Leitideen** zugeordnet, die nicht auf bestimmte klassische mathematische Themenbereiche (Analysis, Lineare Algebra & Analytische Geometrie, Stochastik) begrenzt sind. Die Leitideen tragen damit zur Vernetzung dieser traditionellen klassischen Sachgebiete bei.
- Bei den Leitideen wird zuerst ein **inhaltlicher Kernbereich** beschrieben, der das **grundlegende Anforderungsniveau** charakterisiert. Danach werden die zusätzlichen Inhalte für das erhöhte Anforderungsniveau aufgeführt.
- Die Länder können den Schwerpunkt alternativ auf die Beschreibung mathematischer Prozesse durch Matrizen (Alternative A1) oder die vektorielle Analytische Geometrie (Alternative A2) setzen.
- Die Länder können den Schwerpunkt auf die Schätzung von Parametern (B1) oder die Testung von Hypothesen (B2) setzen.

Algorithmus und Zahl (L1)

- verallgemeinert den Zahlbegriff der Sekundarstufe I zu Tupeln und Matrizen einschließlich zugehöriger Operationen
- erweitert die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden
- Kenntnis, Verstehen und Anwenden mathematischer Verfahren, die automatisierbar und einer Rechnernutzung zugänglich sind
- Sachgebiete der Sekundarstufe II mit Bezügen zur Leitidee
 - Analysis
 - **Lineare Algebra**



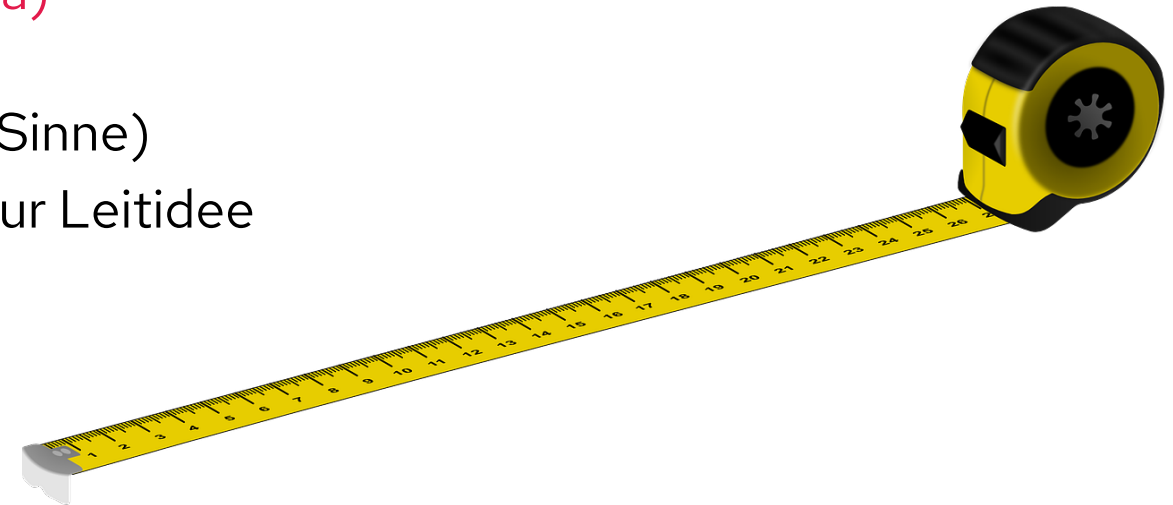
Algorithmus und Zahl (L1)

- **Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau:** Die Schüler/innen können ...
 - geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen auswählen
 - ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme erläutern und es anwenden
 - Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffes insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen
 - einfache Sachverhalte mit Tupeln oder Matrizen beschreiben
 - mathematische Prozesse durch Matrizen unter Nutzung von Matrizenmultiplikation und inverser Matrizen beschreiben (A1)
- **Erhöhtes Anforderungsniveau:** Die Schüler/innen können ...
 - Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen nutzen (A1)
 - Grenzmatrizen sowie Fixvektoren interpretieren (A1)



Messen (L2)

- erweitert das Bestimmen und Deuten von Größen aus der Sekundarstufe I um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden
 - funktionale Größen
(Änderungsraten und (re-)konstruierte Bestände)
 - Größen im Koordinatensystem
(Winkel, Längen, Flächeninhalte und Volumina)
 - stochastische Kenngrößen
(Ergebnisse von Messprozessen im weiteren Sinne)
- Sachgebiete der Sekundarstufe II mit Bezügen zur Leitidee
 - Analysis
 - Analytische Geometrie
 - Stochastik



Messen (L2)

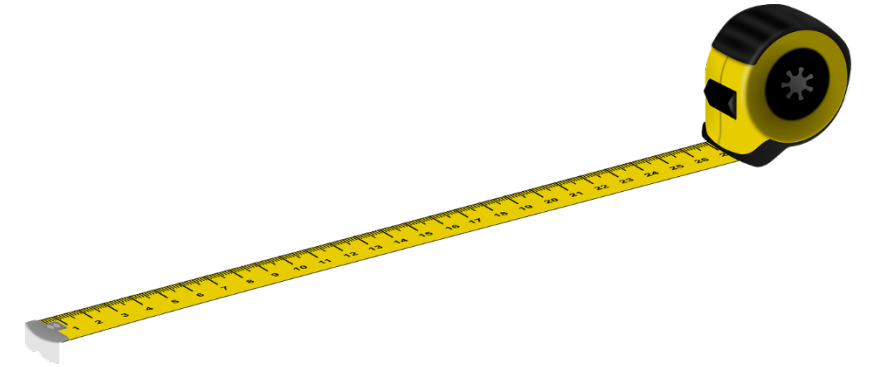
■ Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau:

Die Schüler/innen können ...

- Streckenlängen und Winkelgrößen im Raum auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen
- Sekanten- & Tangentensteigungen an Funktionsgraphen bestimmen
- Änderungsraten berechnen und deuten
- Inhalte von durch Funktionsgraphen begrenzten Flächen bestimmen
- Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen
- Lage- und Streumaße einer Stichprobe bestimmen und deuten
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen bestimmen und deuten

■ Erhöhtes Anforderungsniveau: Die Schüler/innen können ...

- Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen (A2)
- Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen



Raum und Form (L3)

- Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens aus der Sekundarstufe I
- Umgang mit Objekten im Raum
 - Eigenschaften und Beziehungen dieser Objekte
 - Darstellungen mit geeigneten Hilfsmitteln einschließlich Geometriesoftware
- Sachgebiete der Sekundarstufe II mit Bezügen zur Leitidee
 - **Analytische Geometrie**



Raum und Form (L3)

■ Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau:

Die Schüler/innen können ...

- geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren
- elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen und Vektoren auf Kollinearität untersuchen
- das Skalarprodukt geometrisch deuten
- Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten anwenden (A2)
- Geraden und Ebenen analytisch beschreiben und die Lagebeziehungen von Geraden untersuchen (A2)

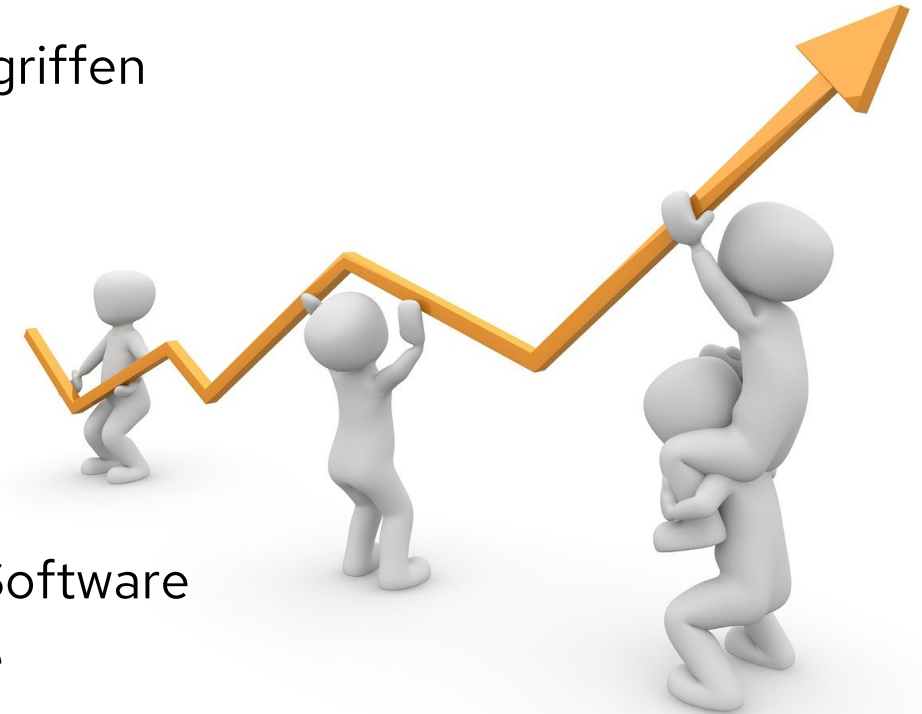
■ Erhöhtes Anforderungsniveau: Die Schüler/innen können ...

- die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen untersuchen (A2)



Funktionaler Zusammenhang (L4)

- funktionalen Vorstellungen aus der Sekundarstufe I mit Begriffen und Verfahren der elementaren Analysis zu vertiefen
- Funktionsbegriff durch vielfältige Beispiele zu erweitern (auch in stochastischen Kontexten)
- funktionale Beziehungen
 - zwischen Zahlen bzw. Größen
 - Darstellungen und Eigenschaften
 - Nutzung von infinitesimalen Methoden und geeigneter Software
- Sachgebiete der Sekundarstufe II mit Bezügen zur Leitidee
 - Analysis
 - Stochastik



Funktionaler Zusammenhang (L4)

■ Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau – Teil 1:

Die Schüler/innen können ...

- Funktionsklassen aus der Sekundarstufe I zur Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen
- in einfachen Fällen Verknüpfungen und Verkettungen von Funktionen zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen
- Ableitung insbesondere als lokale Änderungsrate deuten
- Änderungsraten funktional beschreiben (Ableitungsfunktion) und interpretieren
- Funktionen der Sek. I ableiten (auch mit Faktor- und Summenregel)
- Produktregel zum Ableiten von Funktionen verwenden
- Ableitung zur Bestimmung von Monotonie und Extrema nutzen
- Ableitungsgraphen aus Funktionsgraphen entwickeln und umgekehrt



Funktionaler Zusammenhang (L4)

■ Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau – Teil 2:

Die Schüler/innen können ...

- bestimmtes Integral deuten ((re-)konstruierter Bestand)
- geometrisch-anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen
- Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren
- Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen

■ Erhöhtes Anforderungsniveau: Die Schüler/innen können ...

- Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten
- Kettenregel zum Ableiten von Funktionen verwenden
- In-Funktion als Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ und als Umkehrfunktion der e-Funktion nutzen



Daten und Zufall (L5)

- vernetzt Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten mit solchen zur Beschreibung und Modellierung von zufallsabhängigen Situationen
- Ausweitung und Vertiefung stochastischer Vorstellungen der Sekundarstufe I
 - Umgang mit mehrstufigen Zufallsexperimenten
 - Untersuchung und Nutzung von Verteilungen
 - Einblick in Methoden der beurteilenden Statistik (mithilfe von Simulationen und unter Verwendung einschlägiger Software)
- Sachgebiete der Sekundarstufe II mit Bezügen zur Leitidee
 - Stochastik



Daten und Zufall (L5)

■ Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau:

Die Schüler/innen können ...

- exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen
- Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln untersuchen und lösen
- Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen (einfache Beispiele)
- Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen
- Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
- von Stichproben auf die Gesamtheit schließen (bei einfachen Fällen)



Daten und Zufall (L5)

- **Erhöhtes Anforderungsniveau:** Die Schüler/innen können ...
 - Binomialverteilte Zufallsgrößen: Aussagen über unbekannte Wahrscheinlichkeit, Unsicherheit und Genauigkeit der Aussagen begründen (B1)
 - Hypothesentests interpretieren und die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen (B2)
 - exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen
 - stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen



Kapitel 1: Ziele und Inhalte

- 1.1 Das Zentrale
- 1.2 KMK-Bildungsstandards
- 1.3 Lehrplan MSS RLP**

Selbststudium

Selbststudium



Grundkurs

(ca. 44 Stunden)

Lineare Algebra
und Analytische
Geometrie

wahlweise

A1: Matrizen in
praktischer
Anwendung

A2: Geraden
und Ebenen
im Raum

Leistungskurs

(ca. 75 Stunden)

Lineare Algebra
und Analytische
Geometrie

wahlweise

A1: Vektoren
und Matrizen

A2: Geraden
und Ebenen
im Raum

Wahlpflichtgebiet A1: Matrizen in praktischen Anwendungen

- Zu einer Problemstellung ein lineares Gleichungssystem aufstellen
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren

- In Sachzusammenhängen folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen und ausführen:
 - Produkt einer Matrix mit einem Vektor
 - Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen
 - Inverse Matrix
- Komplexere Aufgaben aus mindestens zwei Anwendungsfeldern von Matrizen bearbeiten
- Erfahren, dass Matrizen auch zur Beschreibung von geometrischen Abbildungen dienen

Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

- Begriff „Linearkombination“ kennen & anwenden
- Parameterform von Geraden- & Ebenengleichung verstehen
- Gegenseitige Lage von Geraden & Ebenen bestimmen
- Lage gegebener Geraden & Ebenen durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen
- Skalarprodukt zweier Vektoren bestimmen und in geometrischen Fragestellungen anwenden
- Allg. Normalengleichung der Ebene kennen & anwenden
- Wissen und begründen:
 - eine Koordinatengleichung mit drei Variablen beschreibt eine Ebene
 - die vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit drei Variablen bekannten Fälle „eine Lösung“, „keine Lösung“ oder „unendlich viele Lösungen“ geometrisch deuten

**In allen Wahlpflichtgebieten
enthalten!**

Lehrplanalternativen RLP: Leistungskurs

(ca. 75 Stunden)

Wahlpflichtgebiet A1: Vektoren und Matrizen

Lineare Gleichungssysteme

- Zu einer Problemstellung ein lineares Gleichungssystem aufstellen
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Das Gauß-Verfahren als Beispiel für eine algorithmische Problemlösung verstehen
- Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als einer Lösung angeben und interpretieren

Matrizen

- Folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen, sowie für Abbildungen und in nichtgeometrischen Sachbezügen anwenden:
 - Produkt einer Matrix mit einem Vektor
 - Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen, Inverse Matrix

Vektoralgebra

- Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren
- Die Begriffe „Linearkombination“ und „linear abhängig/unabhängig“ verstehen & anwenden
- Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts verstehen
- Elementargeometrische Sätze mit vektorialen Methoden beweisen

**In allen Wahl-
pflichtgebieten
enthalten!**

Wahlpflichtgebiet A1: Vektoren und Matrizen

Matrizen (Fortsetzung)

- Eigenschaften der affinen Abbildungen beweisen
- Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen als spezielle affine Abbildungen verstehen
- Affine Abbildungen nach ihren Fixelementen untersuchen
- In mindestens einem nichtgeometrischen Anwendungsfeld von Matrizen Sachaufgaben lösen

Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

Analytische Geometrie

- Parameterform der Geraden- und Ebenengleichung verstehen
- Gegenseitige Lage von Geraden & Ebenen
 - bestimmen und die Verfahren begründen
 - durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen
- Allgemeine und Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung herleiten und anwenden
- Winkel und Abstände im Raum berechnen
- Kreis- und Kugelgleichung herleiten und zur Untersuchung von Lagebeziehungen anwenden
- Vektorprodukt:
Definition & Eigenschaften kennen & anwenden

L1 Leitidee „Algorithmus und Zahl“

- 1.01g geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen auswählen
- 1.02g ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme erläutern und es anwenden
- 1.03g Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen
- 1.04g einfache Sachverhalte mit Tupeln oder Matrizen beschreiben
- 1.05g mathematische Prozesse durch Matrizen unter Nutzung von Matrizenmultiplikation und inverser Matrizen beschreiben
- 1.06e Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen nutzen
- 1.07e Grenzmatrizen sowie Fixvektoren interpretieren

L2 Leitidee „Messen“

- 2.01g Streckenlängen und Winkelgrößen im Raum auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen
- 2.02g Sekanten-/Tangentensteigungen an Funktionsgraphen
- 2.03g Änderungsraten berechnen und deuten
- 2.04g Inhalte von durch Funktionsgraphen begrenzte Flächen
- 2.05g Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand
- 2.06g Lage- und Streumaße einer Stichprobe bestimmen & deuten
- 2.07g Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen bestimmen & deuten
- 2.08e Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen
- 2.09e Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen

L3 Leitidee „Raum und Form“

- 3.01g geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren
- 3.02g elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen und Vektoren auf Kollinearität untersuchen
- 3.03g das Skalarprodukt geometrisch deuten
- 3.04g Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten anwenden
- 3.05g Geraden und Ebenen analytisch beschreiben und die Lagebeziehungen von Geraden untersuchen
- 3.06e die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen untersuchen

L4 Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“

- 4.01g die sich aus den Funktionen der Sekundarstufe I ergebenden Funktionsklassen zur Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen
- 4.02g in einfachen Fällen Verknüpfungen und Verkettungen von Funktionen zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen
- 4.03g die Ableitung insbesondere als lokale Änderungsrate deuten
- 4.04g Änderungsraten funktional beschreiben (Ableitungsfunktion) und interpretieren
- 4.05g die Funktionen der Sekundarstufe I ableiten, auch unter Nutzung der Faktor- und Summenregel
- 4.06g die Produktregel zum Ableiten von Funktionen verwenden
- 4.07g die Ableitung zur Bestimmung von Monotonie und Extrema von Funktionen nutzen
- 4.08g den Ableitungsgraphen aus dem Funktionsgraphen und umgekehrt entwickeln

L4 Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“

- 4.09g das bestimmte Integral deuten, insbesondere als (re-)konstruierten Bestand
- 4.10g geometrisch-anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen
- 4.11g Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren
- 4.12g Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen
- 4.13e die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten
- 4.14e Kettenregel zum Ableiten von Funktionen verwenden
- 4.15e In-Funktion als Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ & als Umkehrfunktion der e -Funktion nutzen

L5 Leitidee „Daten und Zufall“

- 5.01g exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen
- 5.02g Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln untersuchen und damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen
- 5.03g Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente anhand einfacher Beispiele auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen
- 5.04g die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen
- 5.05g Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
- 5.06g in einfachen Fällen aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen

L5 Leitidee „Daten und Zufall“

- 5.07e für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen
- 5.08e Hypothesentests interpretieren und die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen
- 5.09e exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen
- 5.10e stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de

dms.nuw.rptu.de



RPTU