

# Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

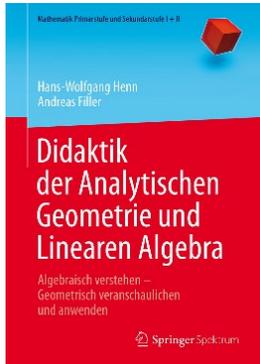
Modul 12a

Jürgen Roth

01.05.2024 [juergen-roth.de](http://juergen-roth.de)



**R**  
**TU**  
**P**  
Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau



## Internetseite zur Veranstaltung und Skript

[juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-linearen-algebra-und-analytischen-geometrie](http://juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-linearen-algebra-und-analytischen-geometrie)

**Textdatenbank:** [juergen-roth.de/lehre](http://juergen-roth.de/lehre) ⇒ Texte

**Zeitschriften:** [juergen-roth.de/zeitschriften](http://juergen-roth.de/zeitschriften)

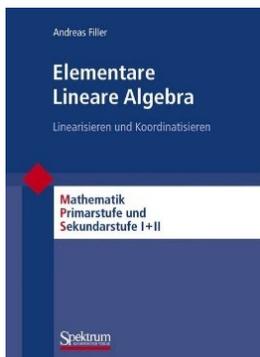
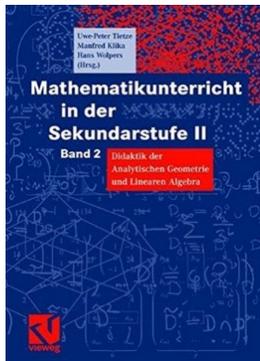
## Buchempfehlungen

Filler, A. (2011): Elementare Linearen Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Henn, H.-W.; Filler, A. (2015): Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden. Heidelberg: Springer Spektrum

Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H. (Hrsg.) (2000): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 2, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Wiesbaden: Vieweg

**Modul 12a-Prüfung:**    
Mündliche Portfolioprüfung



# Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

1. Ziele und Inhalte
2. Algebraisieren des Anschauungsraums
3. Skalarprodukt – Längen und Winkel messen
4. Modellieren und Angewandte Mathematik
5. Kegelschnitte



# 1

Didaktik der Linearen Algebra & Analytischen Geometrie

## Ziele und Inhalte

## Kapitel 1: Ziele und Inhalte

- 1.1 Das Zentrale ↪
- 1.2 KMK-Bildungsstandards ↪
- 1.3 Lehrplan MSS RLP ↪



## Kapitel 1: Ziele und Inhalte

### 1.1 Das Zentrale

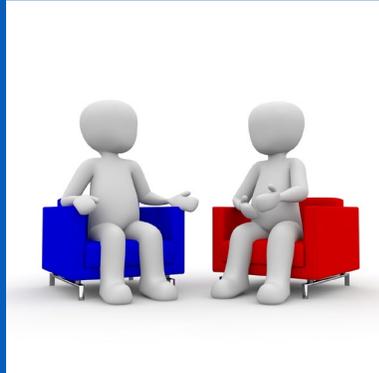
### 1.2 KMK-Bildungsstandards

### 1.3 Lehrplan MSS RLP

Selbststudium

Selbststudium





**Kultur-  
historischer  
Aspekt**



**Erkenntnis-  
theoretischer  
Aspekt**



**Pragmatischer  
Aspekt**



**Schöpferischer  
Aspekt**

# Winter: Mathematikunterricht sollte drei Grunderfahrungen ermöglichen



**Erscheinungen der Welt** um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, **in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen.**

Lesen Sie den  
Text von  
Winter!



**Mathematische Gegenstände und Sachverhalte**, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, **als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenlernen und begreifen.**



In der Auseinandersetzung mit Aufgaben **Problemlösefähigkeiten** (heuristische Fähigkeiten), die über die Mathematik hinaus gehen, **erwerben.**

## Kompetenz

Wissen und Können, sowie die Fähigkeit und Bereitschaft diese flexibel und erfolgreich einzusetzen.

- Inhaltsbezogene Kompetenzen
- Prozessbezogene Kompetenzen



## Grundvorstellung

- Tragfähiges mentales Modell für einen Begriff oder ein Verfahren
- Grundlage für die Verständnisentwicklung

## Fundamentale Ideen

- Weite (logische Allgemeinheit)
- Fülle (vielfältige Anwendbarkeit)
- Sinn (im Alltagsleben verankert)

## Grundfertigkeit

- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens in einer typischen Situation (geforderte Operation vorgegeben)

## Grundwissen

- für einen Inhaltsbereich grundlegende Fakten (Begriffe, Definitionen, Formeln, Sätze, ...)
- sollte auswendig gewusst werden



## Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und bilden die Grundlage für das Verstehen
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

## Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen**  
haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen**  
werden mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert

## Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

Prototypisches Beispiel als Verständnisanker 

## Mentale Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen

## Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

# Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik

## Arithmetik und Algebra

Denken in Zahlen und Strukturen

## Geometrie

Strukturieren von Raum und Form

## Lineare Algebra

Linearisieren und Koordinatisieren

## Funktionen und Analysis

Funktionales und infinitesimales Denken

## Stochastik

Daten analysieren und Zufall modellieren

## Modellieren und Angewandte Mathematik

Anwenden von Mathematik

## Fachdidaktische Kompetenzen

## Affin-lineare Grundstrukturen

- Vektorraum (Basis, Dimension, Austauschatz)
- euklidischer Vektorraum (mit Skalarprodukt)
- affiner Punktraum (Koordinatensystem)
- euklidischer Punktraum (mit euklidischer Metrik)

## Struktur- verträgliche Abbildungen

- lineare Abbildungen
- orthogonale Abbildungen
- affine Abbildungen
- Isometrien

## Lineare Funktionale und ihre geometri- sche Bedeutung

- positiv definite symmetrische Bilinearform (Skalarprodukt)
- Determinante(nform)
- Metrik, Längen-, Winkelmaß
- orientiertes Volumen eines  $n$ -dimensionalen Spats

## Klassifikation von Abbildungen und Quadriken

- Basistransformation
- Matrizen transformation, Matrizenklassifikation
- Klassifikation von linearen Abbildungen
- Eigenwerte, Eigenvektoren
- Koordinatentransformation
- Klassifikation von Quadriken
- Klassifikation von affinen Abbildungen
- Fixgeraden von Abbildungen

## Gleichungssysteme und Gaußscher Algorithmus; Matrizenkalkül

## Algebraisieren des Anschauungsraums

- Einführung eines Koordinatensystems
- Lage von Punkten durch Koordinaten erfassen
- Geometrische Objekte durch Gleichungen bzw. Gleichungssysteme beschreiben
- Streckenlängen & Winkel berechnen

## Geometrisieren algebraischer Gleichungen bzw. Gleichungssysteme

- Lösungen algebraischer Gleichungen visualisieren

## Übergreifende Strukturen

- geometrische Beziehungen über Dimensionsgrenzen hinweg vereinheitlichen

## Objektstudien

- Unterricht auf interessante geometrische Objekte (Kurven, Flächen, Körper) aufbauen

## Zurückführen räumlicher Probleme auf ebene Probleme

Schnittfiguren, Projektionen



## Koordinatisieren

Wahl eines geeigneten  
Koordinatensystems



## Parametrisieren

Beschreibung von Bahnkurven  
durch Parametergleichungen



## Vektorisieren

Erfassen von Strecken  
mit Hilfe von Vektoren

## Kollinearität & Vielfachheit von Vektoren

Vektorielle Beschreibung für  
die Parallelität zweier Geraden

## Komplanarität von Vektoren

Vektorielle Beschreibung für die Parallelität  
dreier Geraden zur selben Ebene

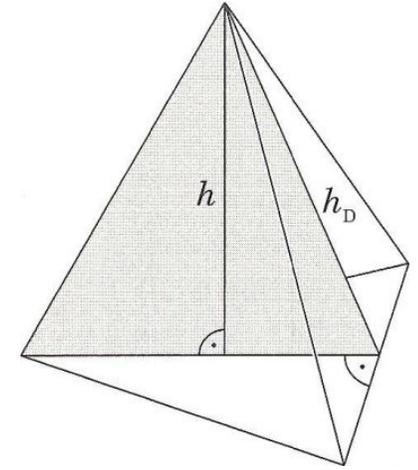
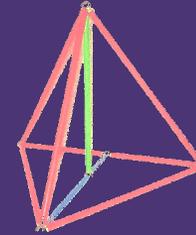
## Skalarprodukt

Grundlage von Längen-, Abstands-  
und Winkelberechnungen

# Beispiel: Tetraeder

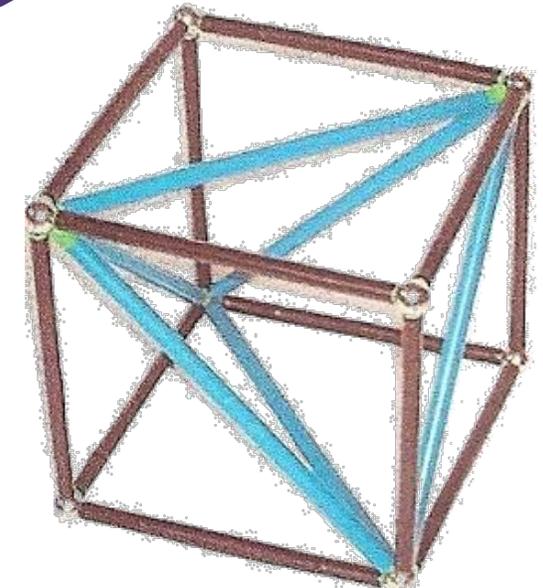
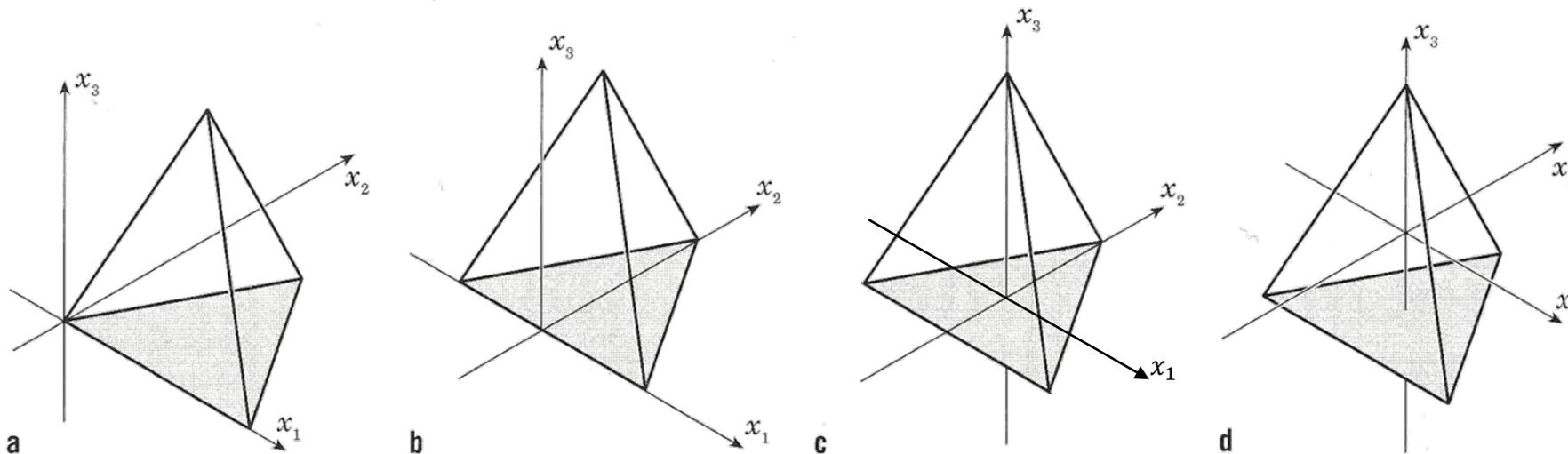
## Aufgabe 1

Wie hoch ist ein gleichseitiger Tetraeder.



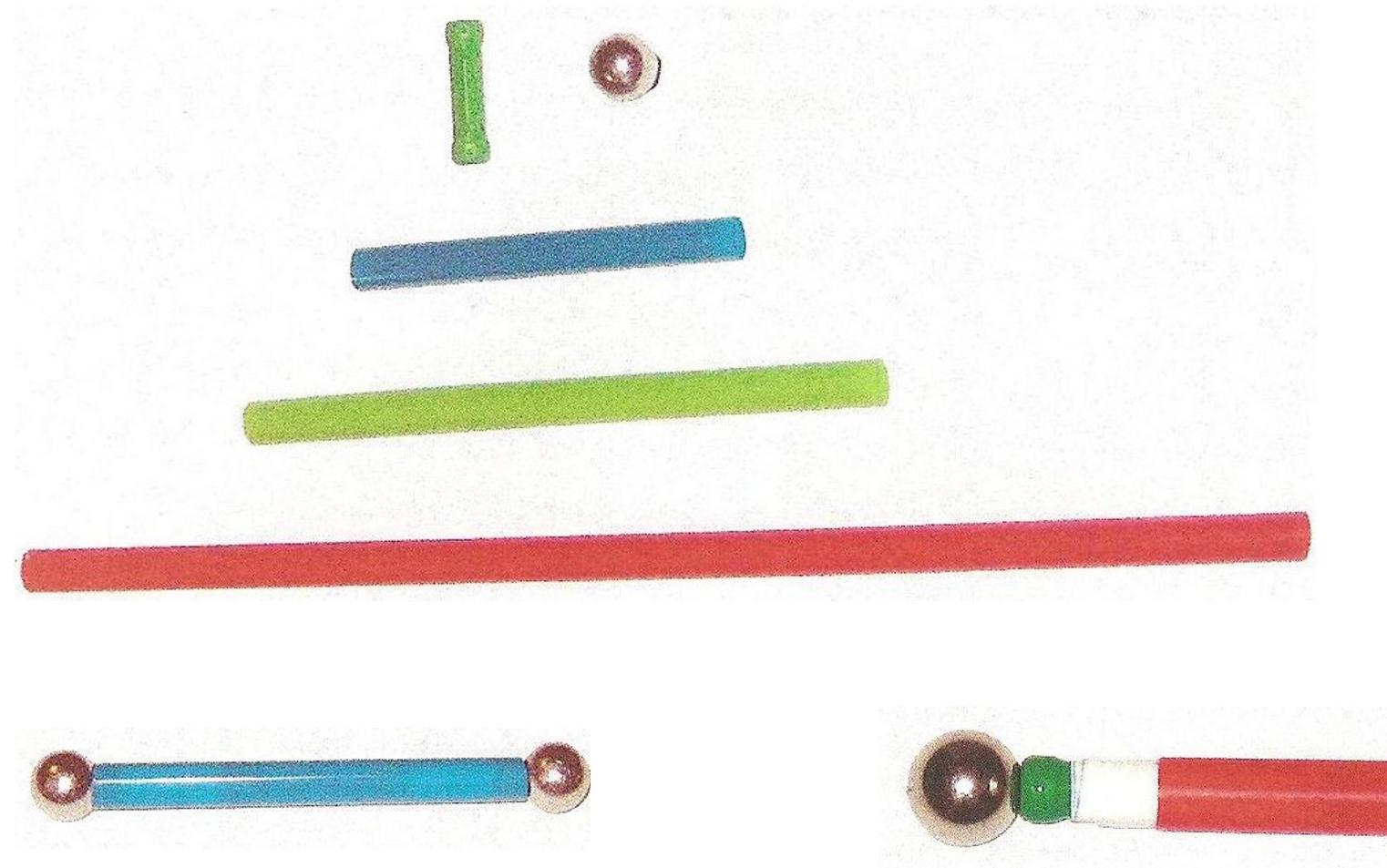
## Aufgabe 2:

Wie können die Eckpunkte eines gleichseitigen Tetraeders der Kantenlänge  $a$  durch ein kartesisches Koordinatensystem beschrieben werden?



## Modellbaukasten

Mit Hilfe bunter Strohhalm und eines Magnetbaukastens lassen sich auf einfache Weise Kantenmodelle herstellen. Die Magnetstäbchen müssen ggf. mit etwas Papier umwickelt werden, so dass sie nicht so leicht herausrutschen. Damit alles zusammen passt, müssen vorher die Kantenlängen berechnet und die Strohhalm entsprechend zugeschnitten werden.



# Beispiel: Viviani-Kurve

## Vincenzo Viviani

(\* 5.4.1622, † 22.09.1703 in Florenz),  
italienischer Mathematiker und Physiker



## Viviani-Kurve

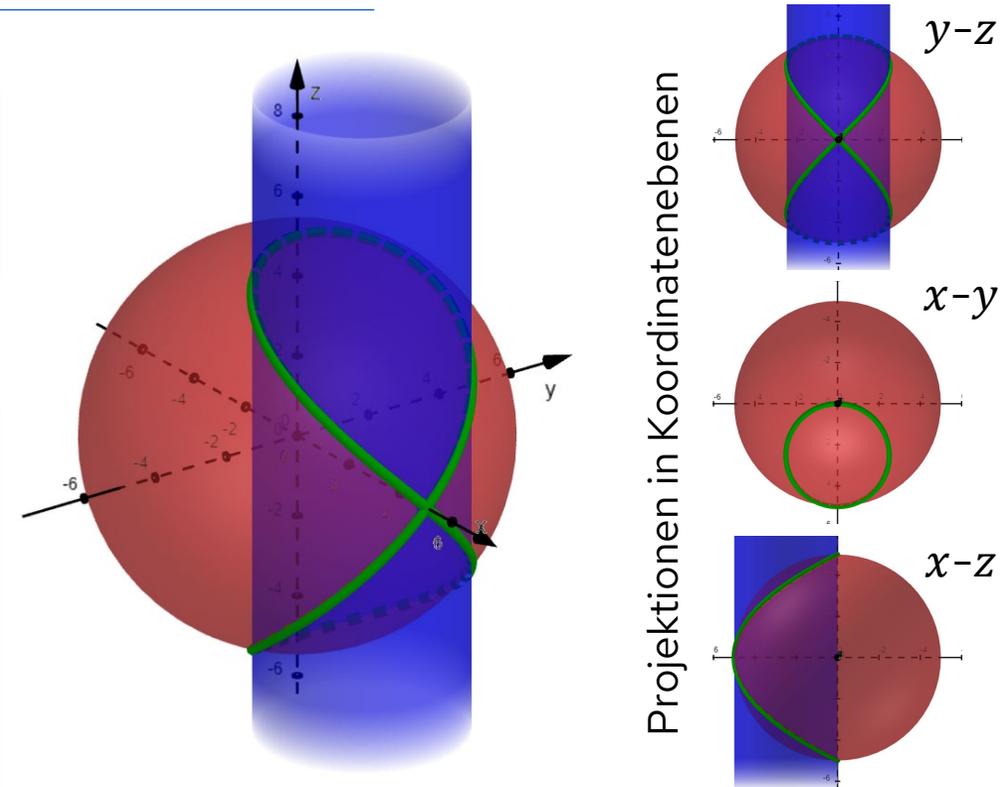
Die Viviani-Kurve ist gegeben durch folgende beiden kartesischen Gleichungen ( $r = \text{konst.}$ ):

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

und

$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 = rx$$

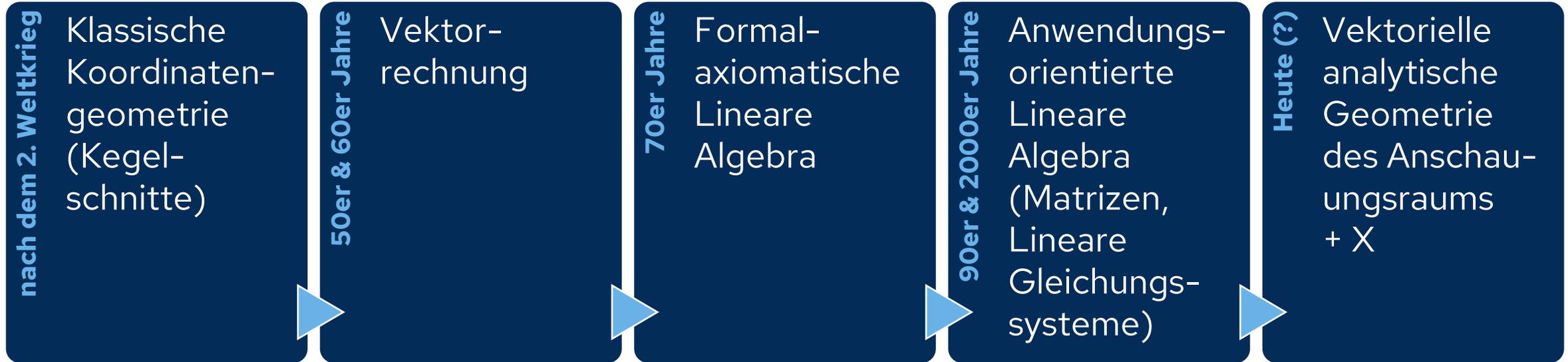
- Welche Bedeutung haben diese beiden Gleichungen?
- Welche Konsequenzen ergeben sich für die Viviani-Kurve?



## Parameter- gleichungen der Viviani- Kurve

$$\begin{aligned}x &= \frac{r}{2} \cdot (1 + \cos(t)) \\y &= \frac{r}{2} \cdot \sin(t) \\z &= r \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

# Geschichte: Analytische Geometrie in der Schule



Aber auch:

**Aufgabeninseln durch  
das Zentralabitur**

- Enger Kanon an Standardaufgaben (Lage-, Schnitt- & Abstandbeziehungen)
- Wird häufig kritisiert

## Kapitel 1: Ziele und Inhalte

1.1 Das Zentrale

1.2 **KMK-Bildungsstandards**

Selbststudium

1.3 Lehrplan MSS RLP

Selbststudium



# KMK-Bildungsstandards

## Kompetenzbereiche

### Allgemeine mathematische Kompetenzen

[K1] Mathematisch argumentieren

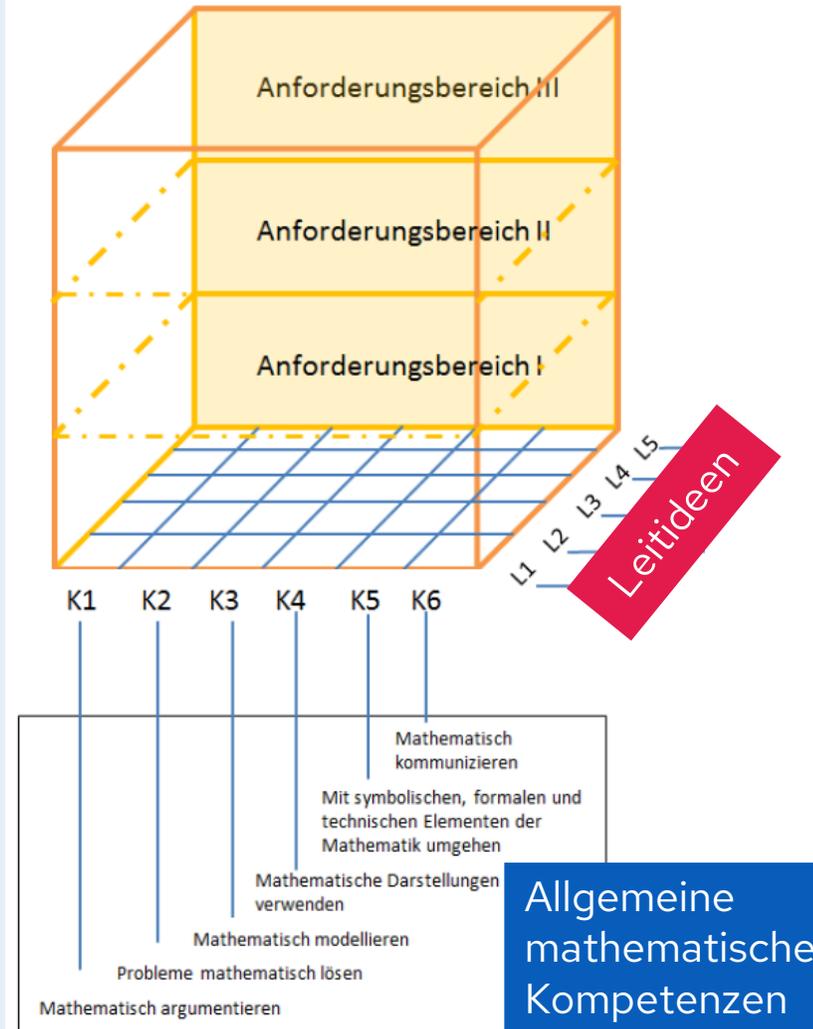
[K2] Probleme  
mathematisch lösen

[K3] Mathematisch modellieren

[K4] Mathematische Darstellungen  
verwenden

[K5] Mit symbolischen, formalen  
und technischen Elementen  
der Mathematik umgehen

[K6] Mathematisch kommunizieren



### Leitideen

[L1] Algorithmus  
und Zahl

[L2] Messen

[L3] Raum und Form

[L4] Funktionaler  
Zusammenhang

[L5] Daten und Zufall

	<b>Grundlegendes Anforderungsniveau (Grundkurs)</b>	<b>Erhöhtes Anforderungsniveau (Leistungskurs)</b>
<b>Leitidee</b>	<p>Umfang mathematischer Inhalte</p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Grundkenntnisse</li><li>▪ in Leitideen ausgewiesen</li></ul>	<p>Umfang mathematischer Inhalte</p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ größer</li><li>▪ in Leitideen ausgewiesen</li><li>▪ erhöhter Komplexitäts-, Vertiefungs-, Präzisierungs- &amp; Formalisierungsgrad</li></ul>
<b>Anforderungsbereiche</b> bzgl. allgemeiner mathematischer Kompetenzen	<p>Prüfungsleistungen</p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Schwerpunkt: Anforderungsbereich II</li><li>▪ Anforderungsbereiche I und III berücksichtigen</li><li>▪ Anforderungsbereiche I und II stärker akzentuieren</li></ul>	<p>Prüfungsleistungen</p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Schwerpunkt: Anforderungsbereich II</li><li>▪ Anforderungsbereiche I und III berücksichtigen</li><li>▪ Anforderungsbereiche II und III stärker akzentuieren</li></ul>

### Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Entwicklung mathematischer Kompetenzen durch sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützen.
- Potenzial der Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht
  - Entdecken mathematischer Zusammenhänge (interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen)
  - Verständnisförderung für mathematische Zusammenhänge (vielfältige Darstellungsmöglichkeiten)
  - Reduktion schematischer Abläufe und Verarbeitung großer Datensätze
  - Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben (reflektierte Nutzung von Kontrollmöglichkeiten)
- Durchgängige Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht ⇒ Einsatz in Prüfungen

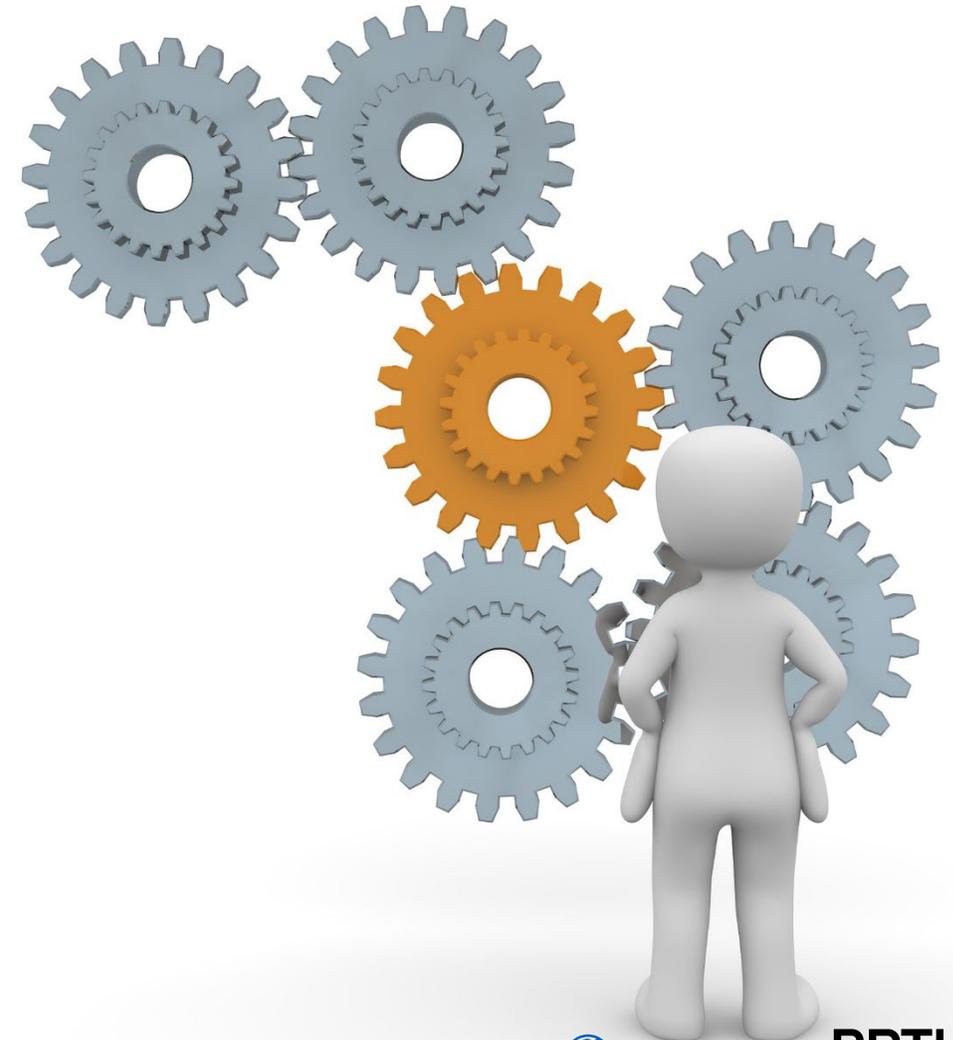


# KMK-Bildungsstandards

## Allgemeine mathematische Kompetenzen

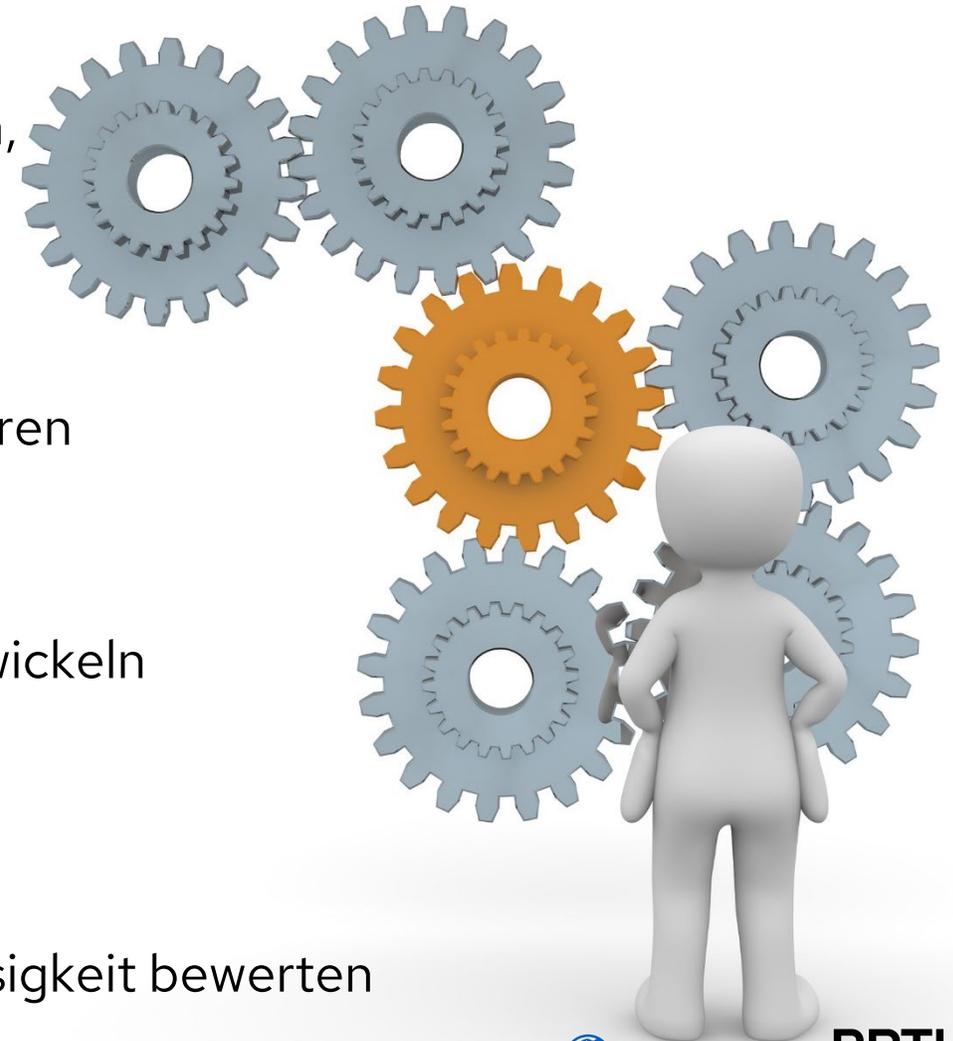
### Mathematisch argumentieren (K1)

- Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen
- Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen
- Spektrum:
  - einfache Plausibilitätsargumente
  - inhaltlich-anschauliche Begründungen
  - formales Beweisen
- Typische Formulierungen:
  - „Begründen Sie!“
  - „Widerlegen Sie!“
  - „Gibt es?“
  - „Gilt das immer?“



### Mathematisch argumentieren (K1)

- **Anforderungsbereich I:** Die Schüler/innen können ...
  - Routineargumentationen (bekannte Sätze, Verfahren, Herleitungen, usw.) wiedergeben und anwenden
  - einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen
  - Argumentationen auf der Basis von Alltagswissen führen
- **Anforderungsbereich II:** Die Schüler/innen können ...
  - überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen, erläutern oder entwickeln
- **Anforderungsbereich III:** Die Schüler/innen können ...
  - Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln
  - Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit bewerten



# KMK-Bildungsstandards

## Allgemeine mathematische Kompetenzen

### Probleme mathematisch lösen (K2)

- Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme
- Auswählen geeigneter Lösungsstrategien
- Finden und Ausführen geeigneter Lösungswege
- Spektrum:
  - Anwendung bekannter Strategien
  - Konstruktion komplexer und neuartiger Strategien
- Heuristische Prinzipien
  - „Skizze anfertigen“
  - „systematisch probieren“
  - „zerlegen und ergänzen“
  - „Symmetrien verwenden“
  - „Extremalprinzip“
  - „Invarianten finden“
  - „vorwärts und rückwärts arbeiten“



### Probleme mathematisch lösen (K2)

- **Anforderungsbereich I:** Die Schüler/innen können ...
  - Lösungsweg einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie finden (z. B. Analogiebetrachtung)
- **Anforderungsbereich II:** Die Schüler/innen können ...
  - Lösungsweg zu einer Problemstellung finden (z. B. durch mehrschrittiges, strategiestütztes Vorgehen)
- **Anforderungsbereich III:** Die Schüler/innen können ...
  - Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems oder zur Beurteilung verschiedener Lösungswege entwickeln und anwenden (z. B. Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung, durch Anwenden mehrerer Heuristiken)



# KMK-Bildungsstandards

## Allgemeine mathematische Kompetenzen

### Mathematisch modellieren (K3)

- Wechsel zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden
  - Konstruieren passender mathematischer Modelle
  - Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle
- Spektrum:
  - Standardmodelle (z. B. bei linearen Zusammenhängen)
  - Komplexe Modellierungen
- Typische Teilschritte des Modellierens
  - Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen
  - Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle
  - Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen
  - Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation



### Mathematisch modellieren (K3)

- **Anforderungsbereich I:** Die Schüler/innen können ...
  - vertraute und direkt erkennbare Modelle anwenden
  - Realsituation direkt in ein mathematisches Modell überführen
  - mathematisches Resultat auf eine gegebene Realsituation übertragen
- **Anforderungsbereich II:** Die Schüler/innen können ...
  - mehrschrittige Modellierungen mit wenigen und klar formulierten Einschränkungen vornehmen
  - Ergebnisse einer solchen Modellierung interpretieren
  - mathematisches Modell an veränderte Umstände anpassen
- **Anforderungsbereich III:** Die Schüler/innen können ...
  - komplexe Realsituation modellieren, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen
  - Mathem. Modelle im Kontext einer Realsituation überprüfen, vergleichen und bewerten



# KMK-Bildungsstandards

## Allgemeine mathematische Kompetenzen

### Mathematische Darstellungen verwenden (K4)

- Auswählen geeigneter Darstellungsformen
- Erzeugen mathematischer Darstellungen
- Umgehen mit gegebenen Darstellungen
- Spektrum:
  - Standarddarstellungen (z. B. Wertetabellen)
  - eigenen Darstellungen, die dem Strukturieren & Dokumentieren individueller Überlegungen dienen und die Argumentation und das Problemlösen unterstützen
- Typische mathematische Darstellungen
  - Diagramme
  - Graphen
  - Tabellen
  - Formeln



### Mathematische Darstellungen verwenden (K4)

- **Anforderungsbereich I:** Die Schüler/innen können ...
  - Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen
- **Anforderungsbereich II:** Die Schüler/innen können ...
  - gegebene Darstellungen verständig interpretieren oder verändern
  - zwischen verschiedenen Darstellungen wechseln
- **Anforderungsbereich III:** Die Schüler/innen können ...
  - mit unvertrauten Darstellungen und Darstellungsformen sachgerecht und verständig umgehen
  - eigene Darstellungen problemadäquat entwickeln
  - verschiedene Darstellungen und Darstellungsformen zweckgerichtet beurteilen



# KMK-Bildungsstandards

## Allgemeine mathematische Kompetenzen

### Mit Mathematik symbolisch/formal/technisch umgehen (K5)

- Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten (Z. B. Zahlen, Größen, Variablen, Terme, Gleichungen, Funktionen, Vektoren, geometrische Objekte)
- Spektrum:
  - einfache und überschaubare Routineverfahren
  - komplexen Verfahren einschließlich deren reflektierender Bewertung
- Weitere Aspekte dieser Kompetenz
  - Faktenwissen und grundlegendes Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen – auch mit eingeführten Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen



### Mit Mathematik symbolisch/formal/technisch umgehen (K5)

- **Anforderungsbereich I:** Die Schüler/innen können ...
  - elementare Lösungsverfahren verwenden
  - Formeln und Symbole anwenden
  - mathem. Hilfsmittel & digitale Mathematikwerkzeuge nutzen
- **Anforderungsbereich II:** Die Schüler/innen können ...
  - formale mathematische Verfahren anwenden
  - mit mathematischen Objekten im Kontext umgehen
  - mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt auswählen & effizient einsetzen
- **Anforderungsbereich III:** Die Schüler/innen können ...
  - komplexe Verfahren durchführen
  - verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren bewerten
  - Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Verfahren, Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge reflektieren zweckgerichtet beurteilen

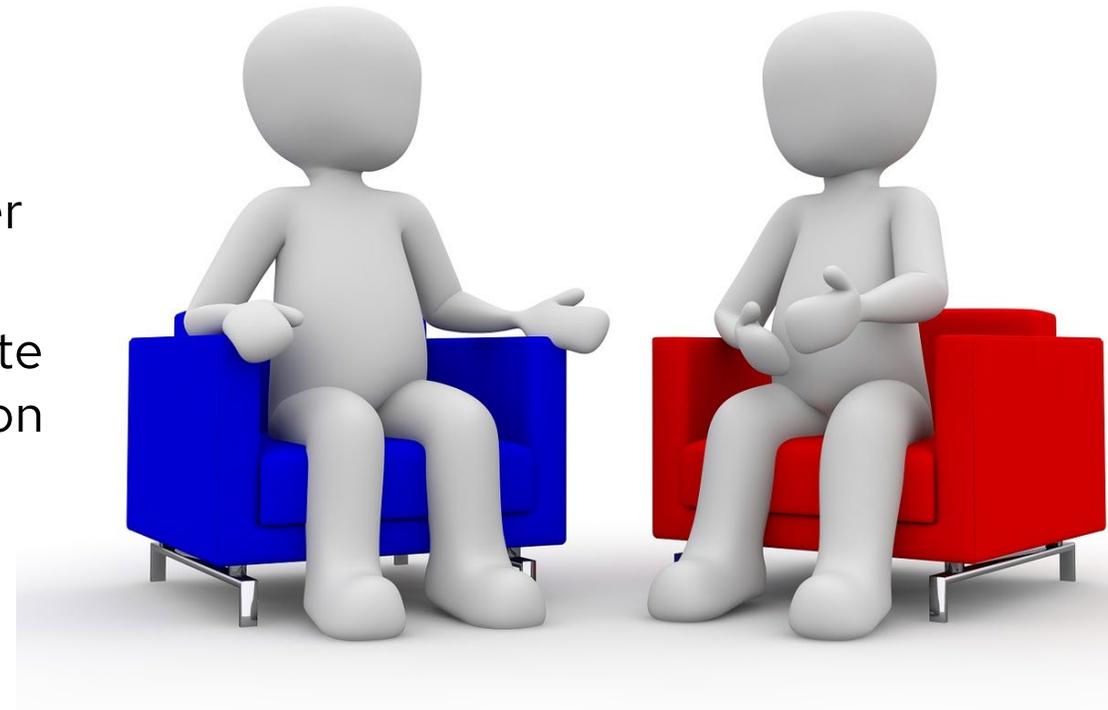


# KMK-Bildungsstandards

## Allgemeine mathematische Kompetenzen

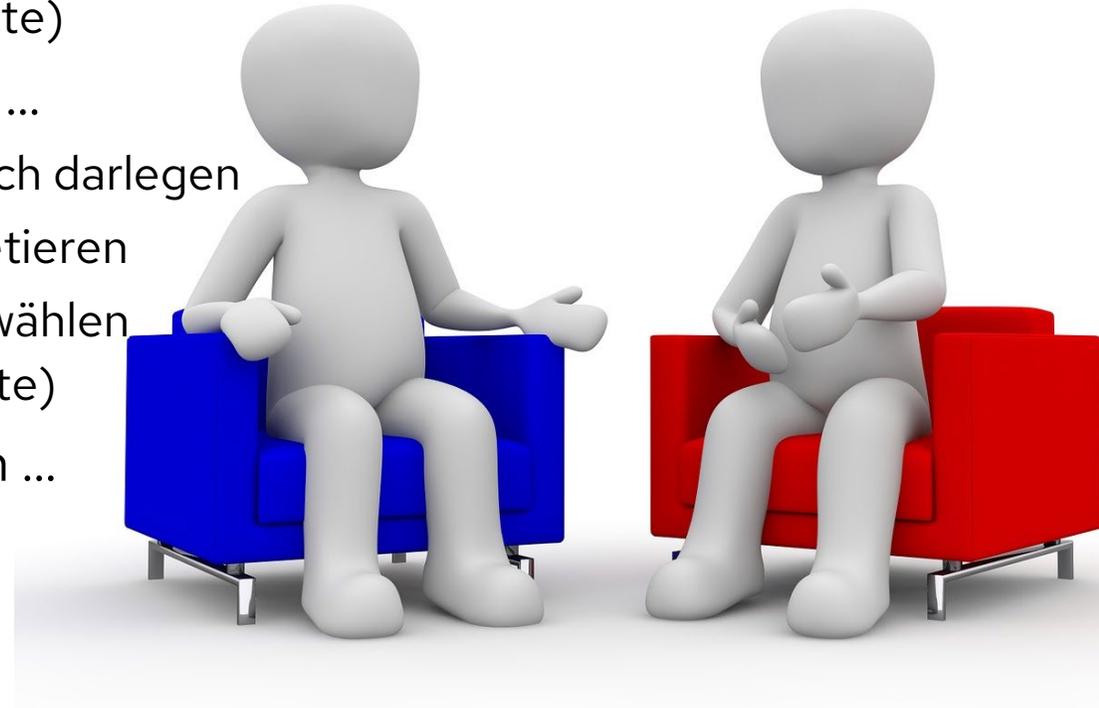
### Mathematisch kommunizieren (K6)

- Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen
- Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache
- Spektrum:
  - direkten Informationsentnahme aus Texten des Alltagsgebrauchs bzw. vom Aufschreiben einfacher Lösungswege
  - sinnentnehmenden Erfassen fachsprachlicher Texte bzw. zur strukturierten Darlegung oder Präsentation eigener Überlegungen
- Sprachliche Anforderungen spielen hier eine besondere Rolle



### Mathematisch kommunizieren (K6)

- **Anforderungsbereich I:** Die Schüler/innen können ...
  - einfache mathematische Sachverhalte darlegen
  - Informationen aus kurzen (mathematischem) Texten identifizieren und auswählen (Informationsanordnung  $\cong$  mathem. Bearbeitungsschritte)
- **Anforderungsbereich II:** Die Schüler/innen können ...
  - mehrschrittige Lösungswege und Ergebnisse verständlich darlegen
  - mathematische Äußerungen (auch fehlerhafte) interpretieren
  - mathem. Informationen aus Texten identifizieren & auswählen (Informationsanordnung  $\neq$  mathem. Bearbeitungsschritte)
- **Anforderungsbereich III:** Die Schüler/innen können ...
  - komplexe mathematische Lösung oder Argumentation kohärent und vollständig darlegen oder präsentieren
  - mathematische Fachtexte sinnentnehmend erfassen
  - mündliche & schriftliche mathematische Äußerungen vergleichen, bewerten und ggf. korrigieren



### Mathematische Leitideen

- Unter „**Inhalten**“ werden insbesondere auch adäquate **Grundvorstellungen** verstanden, die ein Verständnis dieser Inhalte erst konstituieren.
- Die **inhaltsbezogenen Kompetenzen** werden jeweils **übergreifenden Leitideen** zugeordnet, die nicht auf bestimmte klassische mathematische Themenbereiche (Analysis, Lineare Algebra & Analytische Geometrie, Stochastik) begrenzt sind. Die Leitideen tragen damit zur Vernetzung dieser traditionellen klassischen Sachgebiete bei.
- Bei den Leitideen wird zuerst ein **inhaltlicher Kernbereich** beschrieben, der das **grundlegende Anforderungsniveau** charakterisiert. Danach werden die zusätzlichen Inhalte für das erhöhte Anforderungsniveau aufgeführt.
- Die Länder können den Schwerpunkt alternativ auf die Beschreibung mathematischer Prozesse durch Matrizen (Alternative A1) oder die vektorielle Analytische Geometrie (Alternative A2) setzen.
- Die Länder können den Schwerpunkt auf die Schätzung von Parametern (B1) oder die Testung von Hypothesen (B2) setzen.

### Algorithmus und Zahl (L1)

- verallgemeinert den Zahlbegriff der Sekundarstufe I zu Tupeln und Matrizen einschließlich zugehöriger Operationen
- erweitert die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden
- Kenntnis, Verstehen und Anwenden mathematischer Verfahren, die automatisierbar und einer Rechnernutzung zugänglich sind
- Sachgebiete der Sekundarstufe II mit Bezügen zur Leitidee
  - Analysis
  - **Lineare Algebra**



### Algorithmus und Zahl (L1)

#### ■ **Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau:**

Die Schüler/innen können ...

- geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen auswählen
- ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme erläutern und es anwenden
- Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffes insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen
- einfache Sachverhalte mit Tupeln oder Matrizen beschreiben
- mathematische Prozesse durch Matrizen unter Nutzung von Matrizenmultiplikation und inverser Matrizen beschreiben (A1)

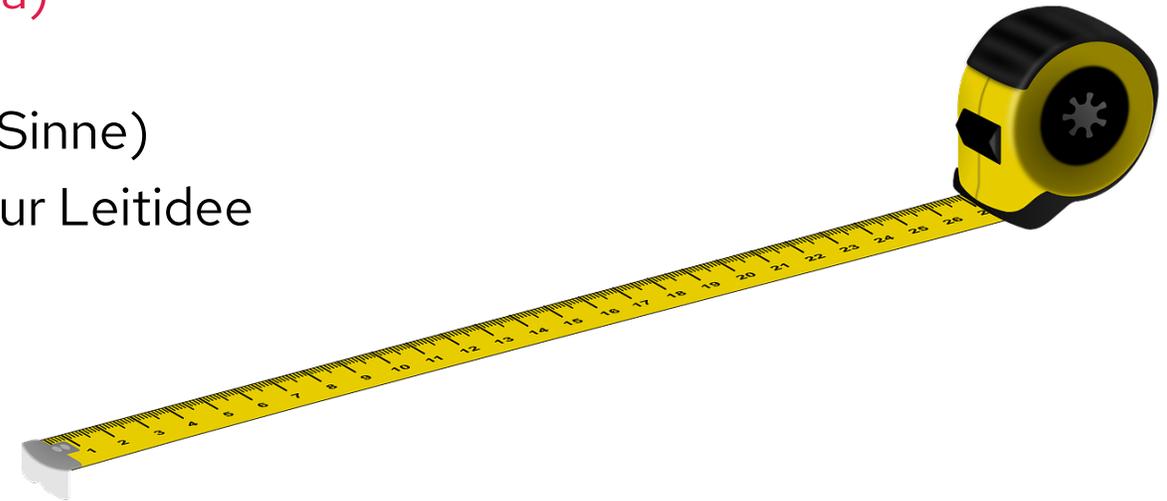
#### ■ **Erhöhtes Anforderungsniveau:** Die Schüler/innen können ...

- Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen nutzen (A1)
- Grenzmatrizen sowie Fixvektoren interpretieren (A1)



### Messen (L2)

- erweitert das Bestimmen und Deuten von Größen aus der Sekundarstufe I um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden
  - funktionale Größen  
(Änderungsraten und (re-)konstruierte Bestände)
  - Größen im Koordinatensystem  
(Winkel, Längen, Flächeninhalte und Volumina)
  - stochastische Kenngrößen  
(Ergebnisse von Messprozessen im weiteren Sinne)
- Sachgebiete der Sekundarstufe II mit Bezügen zur Leitidee
  - Analysis
  - Analytische Geometrie
  - Stochastik



### Messen (L2)

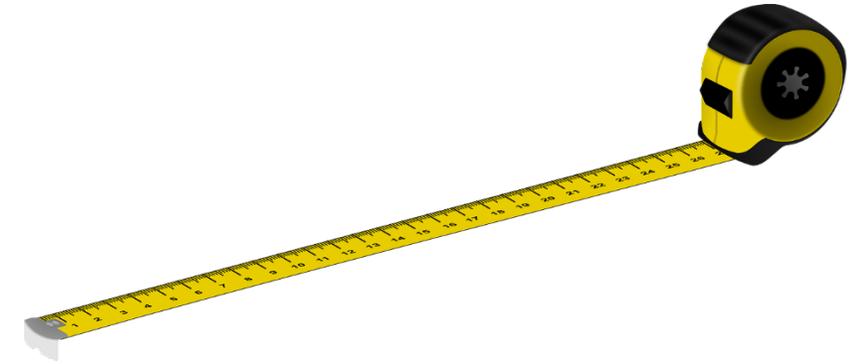
#### ■ Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau:

Die Schüler/innen können ...

- Streckenlängen und Winkelgrößen im Raum auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen
- Sekanten- & Tangentensteigungen an Funktionsgraphen bestimmen
- Änderungsraten berechnen und deuten
- Inhalte von durch Funktionsgraphen begrenzten Flächen bestimmen
- Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen
- Lage- und Streumaße einer Stichprobe bestimmen und deuten
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen bestimmen und deuten

#### ■ Erhöhtes Anforderungsniveau: Die Schüler/innen können ...

- Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen (A2)
- Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen



### Raum und Form (L3)

- Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens aus der Sekundarstufe I
- Umgang mit Objekten im Raum
  - Eigenschaften und Beziehungen dieser Objekte
  - Darstellungen mit geeigneten Hilfsmitteln einschließlich Geometriesoftware
- Sachgebiete der Sekundarstufe II mit Bezügen zur Leitidee
  - **Analytische Geometrie**



### Raum und Form (L3)

#### ■ **Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau:**

Die Schüler/innen können ...

- geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren
- elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen und Vektoren auf Kollinearität untersuchen
- das Skalarprodukt geometrisch deuten
- Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten anwenden (A2)
- Geraden und Ebenen analytisch beschreiben und die Lagebeziehungen von Geraden untersuchen (A2)

#### ■ **Erhöhtes Anforderungsniveau:** Die Schüler/innen können ...

- die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen untersuchen (A2)



### Funktionaler Zusammenhang (L4)

- funktionalen Vorstellungen aus der Sekundarstufe I mit Begriffen und Verfahren der elementaren Analysis zu vertiefen
- Funktionsbegriff durch vielfältige Beispiele zu erweitern (auch in stochastischen Kontexten)
- funktionale Beziehungen
  - zwischen Zahlen bzw. Größen
  - Darstellungen und Eigenschaften
  - Nutzung von infinitesimalen Methoden und geeigneter Software
- Sachgebiete der Sekundarstufe II mit Bezügen zur Leitidee
  - Analysis
  - Stochastik



### Funktionaler Zusammenhang (L4)

#### ■ Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau – Teil 1:

Die Schüler/innen können ...

- Funktionsklassen aus der Sekundarstufe I zur Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen
- in einfachen Fällen Verknüpfungen und Verkettungen von Funktionen zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen
- Ableitung insbesondere als lokale Änderungsrate deuten
- Änderungsraten funktional beschreiben (Ableitungsfunktion) und interpretieren
- Funktionen der Sek. I ableiten (auch mit Faktor- und Summenregel)
- Produktregel zum Ableiten von Funktionen verwenden
- Ableitung zur Bestimmung von Monotonie und Extrema nutzen
- Ableitungsgraphen aus Funktionsgraphen entwickeln und umgekehrt



### Funktionaler Zusammenhang (L4)

#### ■ Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau – Teil 2:

Die Schüler/innen können ...

- bestimmtes Integral deuten ((re-)konstruierter Bestand)
- geometrisch-anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen
- Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren
- Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen

#### ■ Erhöhtes Anforderungsniveau: Die Schüler/innen können ...

- Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten
- Kettenregel zum Ableiten von Funktionen verwenden
- In-Funktion als Stammfunktion von  $x \mapsto \frac{1}{x}$  und als Umkehrfunktion der  $e$ -Funktion nutzen



### Daten und Zufall (L5)

- vernetzt Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten mit solchen zur Beschreibung und Modellierung von zufallsabhängigen Situationen
- Ausweitung und Vertiefung stochastischer Vorstellungen der Sekundarstufe I
  - Umgang mit mehrstufigen Zufallsexperimenten
  - Untersuchung und Nutzung von Verteilungen
  - Einblick in Methoden der beurteilenden Statistik (mithilfe von Simulationen und unter Verwendung einschlägiger Software)
- Sachgebiete der Sekundarstufe II mit Bezügen zur Leitidee
  - Stochastik



### Daten und Zufall (L5)

#### ■ Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau:

Die Schüler/innen können ...

- exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen
- Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln untersuchen und lösen
- Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen (einfache Beispiele)
- Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen
- Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
- von Stichproben auf die Gesamtheit schließen (bei einfachen Fällen)



### Daten und Zufall (L5)

- **Erhöhtes Anforderungsniveau:** Die Schüler/innen können ...
  - Binomialverteilte Zufallsgrößen: Aussagen über unbekannte Wahrscheinlichkeit, Unsicherheit und Genauigkeit der Aussagen begründen (B1)
  - Hypothesentests interpretieren und die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen (B2)
  - exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen
  - stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen



## Kapitel 1: Ziele und Inhalte

- 1.1 Das Zentrale
- 1.2 KMK-Bildungsstandards
- 1.3 Lehrplan MSS RLP**

Selbststudium

Selbststudium



## L1 Leitidee „Algorithmus und Zahl“

- 1.01g geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen auswählen
- 1.02g ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme erläutern und es anwenden
- 1.03g Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen
- 1.04g einfache Sachverhalte mit Tupeln oder Matrizen beschreiben
- 1.05g mathematische Prozesse durch Matrizen unter Nutzung von Matrizenmultiplikation und inverser Matrizen beschreiben
- 1.06e Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen nutzen
- 1.07e Grenzmatrizen sowie Fixvektoren interpretieren

## L2 Leitidee „Messen“

- 2.01g Streckenlängen und Winkelgrößen im Raum auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen
- 2.02g Sekanten-/Tangentensteigungen an Funktionsgraphen
- 2.03g Änderungsraten berechnen und deuten
- 2.04g Inhalte von durch Funktionsgraphen begrenzte Flächen
- 2.05g Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand
- 2.06g Lage- und Streumaße einer Stichprobe bestimmen & deuten
- 2.07g Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen bestimmen & deuten
- 2.08e Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen
- 2.09e Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen

## L3 Leitidee „Raum und Form“

- 3.01g geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren
- 3.02g elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen und Vektoren auf Kollinearität untersuchen
- 3.03g das Skalarprodukt geometrisch deuten
- 3.04g Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächlich begrenzten geometrischen Objekten anwenden
- 3.05g Geraden und Ebenen analytisch beschreiben und die Lagebeziehungen von Geraden untersuchen
- 3.06e die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen untersuchen

## L4 Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“

- 4.01g die sich aus den Funktionen der Sekundarstufe I ergebenden Funktionsklassen zur Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen
- 4.02g in einfachen Fällen Verknüpfungen und Verkettungen von Funktionen zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen
- 4.03g die Ableitung insbesondere als lokale Änderungsrate deuten
- 4.04g Änderungsraten funktional beschreiben (Ableitungsfunktion) und interpretieren
- 4.05g die Funktionen der Sekundarstufe I ableiten, auch unter Nutzung der Faktor- und Summenregel
- 4.06g die Produktregel zum Ableiten von Funktionen verwenden
- 4.07g die Ableitung zur Bestimmung von Monotonie und Extrema von Funktionen nutzen
- 4.08g den Ableitungsgraphen aus dem Funktionsgraphen und umgekehrt entwickeln

## L4 Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ (Fortsetzung)

- 4.09g das bestimmte Integral deuten, insbesondere als (re-)konstruierten Bestand
- 4.10g geometrisch-anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen
- 4.11g Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren
- 4.12g Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen
- 4.13e die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten
- 4.14e Kettenregel zum Ableiten von Funktionen verwenden
- 4.15e In-Funktion als Stammfunktion von  $x \mapsto \frac{1}{x}$  & als Umkehrfunktion der  $e$ -Funktion nutzen

## L5 Leitidee „Daten und Zufall“

- 5.01g exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen
- 5.02g Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln untersuchen und damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen
- 5.03g Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente anhand einfacher Beispiele auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen
- 5.04g die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen
- 5.05g Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
- 5.06g in einfachen Fällen aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen

## L5 Leitidee „Daten und Zufall“ (Fortsetzung)

- 5.07e für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen
- 5.08e Hypothesentests interpretieren und die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen
- 5.09e exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen
- 5.10e stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen

## Grundkurs

(ca. 44 Stunden)

Lineare Algebra  
und Analytische  
Geometrie

wahlweise

A1: Matrizen in  
praktischer  
Anwendung

A2: Geraden  
und Ebenen  
im Raum

## Leistungskurs

(ca. 75 Stunden)

Lineare Algebra  
und Analytische  
Geometrie

wahlweise

A1: Vektoren  
und Matrizen

A2: Geraden  
und Ebenen  
im Raum

## Wahlpflichtgebiet A1: Matrizen in praktischen Anwendungen

- Zu einer Problemstellung ein lineares Gleichungssystem aufstellen
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren

- In Sachzusammenhängen folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen und ausführen:
  - Produkt einer Matrix mit einem Vektor
  - Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen
  - Inverse Matrix
- Komplexere Aufgaben aus mindestens zwei Anwendungsfeldern von Matrizen bearbeiten
- Erfahren, dass Matrizen auch zur Beschreibung von geometrischen Abbildungen dienen

## Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

- Begriff „Linearkombination“ kennen & anwenden
- Parameterform von Geraden- & Ebenengleichung verstehen
- Gegenseitige Lage von Geraden & Ebenen bestimmen
- Lage gegebener Geraden & Ebenen durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen
- Skalarprodukt zweier Vektoren bestimmen und in geometrischen Fragestellungen anwenden
- Allg. Normalengleichung der Ebene kennen & anwenden
- Wissen und begründen:
  - eine Koordinatengleichung mit drei Variablen beschreibt eine Ebene
  - die vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit drei Variablen bekannten Fälle „eine Lösung“, „keine Lösung“ oder „unendlich viele Lösungen“ geometrisch deuten

**In allen Wahlpflichtgebieten enthalten!**

## Wahlpflichtgebiet A1: Vektoren und Matrizen

## Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

### Lineare Gleichungssysteme

- Zu einer Problemstellung ein lineares Gleichungssystem aufstellen
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Das Gauß-Verfahren als Beispiel für eine algorithmische Problemlösung verstehen
- Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit mehr als einer Lösung angeben und interpretieren

**In allen Wahl-  
pflichtgebieten  
enthalten!**

### Matrizen

- Folgende Operationen mit Matrizen und Vektoren verstehen, sowie für Abbildungen und in nichtgeometrischen Sachbezügen anwenden:
  - Produkt einer Matrix mit einem Vektor
  - Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen, Inverse Matrix

### Vektoralgebra

- Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren
- Die Begriffe „Linearkombination“ und „linear abhängig/unabhängig“ verstehen & anwenden
- Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts verstehen
- Elementargeometrische Sätze mit vektorialen Methoden beweisen

## Wahlpflichtgebiet A1: Vektoren und Matrizen

### Matrizen (Fortsetzung)

- Eigenschaften der affinen Abbildungen beweisen
- Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen als spezielle affine Abbildungen verstehen
- Affine Abbildungen nach ihren Fixelementen untersuchen
- In mindestens einem nichtgeometrischen Anwendungsfeld von Matrizen Sachaufgaben lösen

## Wahlpflichtgebiet A2: Geraden und Ebenen im Raum

### Analytische Geometrie

- Parameterform der Geraden- und Ebenengleichung verstehen
- Gegenseitige Lage von Geraden & Ebenen
  - bestimmen und die Verfahren begründen
  - durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen
- Allgemeine und Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung herleiten und anwenden
- Winkel und Abstände im Raum berechnen
- Kreis- und Kugelgleichung herleiten und zur Untersuchung von Lagebeziehungen anwenden
- Vektorprodukt:  
Definition & Eigenschaften kennen & anwenden

---

# Kontakt

---

**Prof. Dr. Jürgen Roth**

**RPTU**

Rheinland-Pfälzische Technische Universität  
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Fortstraße 7, 76829 Landau

[j.roth@rptu.de](mailto:j.roth@rptu.de)

[juergen-roth.de](http://juergen-roth.de)

[dms.nuw.rptu.de](http://dms.nuw.rptu.de)



**RPTU**