4. Übungsblatt – Lösungshinweise

1. *Eindeutigkeit des neutralen Elements*

Beweisen Sie, dass das neutrale Element e einer Gruppe $(G, \star)$ eindeutig ist. *3 BE*

Hinweis:

Führen Sie einen Widerspruchsbeweis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

Beweis:

Angenommen, es gäbe zwei verschiedene neutrale Elemente $e_1, e_2 \in G$ in einer Gruppe $(G,\star)$.
D. h.:

(1) $e_1 \neq e_2$

(2) $\forall_{g\in G}\ e_1 \star g = g \star e_1 = g$ (e_1 ist neutrales Element)

(3) $\forall_{g\in G}\ e_2 \star g = g \star e_2 = g$ (e_2 ist neutrales Element)

Dann gilt:

$$e_1 \overset{(3)\text{ und } e_1\in G}{\triangleq} e_1 \star e_2 \overset{(2)\text{ und } e_2\in G}{\triangleq} e_2,$$

also $e_1 = e_2$ und dies ist ein Widerspruch zu (1) $e_1 \neq e_2$. ∎

2. *Eine kleine Gruppe?*

Die Menge $\{-1, 0, 1\}$ ist Teilmenge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

$(\{-1, 0, 1\}, \ \cdot)$ ist bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.

(Gemeint ist die „normale" Multiplikation, die Sie aus der Grundschule kennen.) *3 BE*

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

Um die Aussage $(\{-1, 0, 1\}, \ \cdot)$ ist bezüglich der Multiplikation eine Gruppe zu widerlegen, reicht es aus eine der Gruppeneigenschaften zu widerlegen. Hier soll (G3) widerlegt werden, indem die Negation von (G3) gezeigt wird.

(G3) $\forall_{g\in G}\ \exists_{g^{-1}\in G}\ g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$ (Existenz inverser Elemente)

Es gilt:

Das neutrale Element e bzgl. der Multiplikation in $\mathbb{Z}$ ist die 1, auch in $\{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}$ ist die 1 das neutrale Element, denn:

- $-1 \cdot 1 = 1 \cdot (-1) = -1$
- $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$
- $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

Zu zeigen: $\exists_{g_0\in\{-1,0,1\}}\ \forall_{g\in\{-1,0,1\}}\ g_0 \cdot g \neq 1 \lor g \cdot g_0 \neq 1$

Wähle $g_0 = 0$ und sei $g \in \{-1, 0, 1\}$ beliebig, dann gilt:

$$g_0 \cdot g = g \cdot g_0 = 0 \neq 1$$

Somit ist (G3) widerlegt und $(\{-1, 0, 1\}, \ \cdot)$ ist keine Gruppe. ∎

Alternativer Lösungsweg:

Wenn $(\{-1, 0, 1\}, \ \cdot)$ eine Gruppe wäre, könnte nur 1 das neutrale Element sein (Das kann man entweder einsehen, weil die Eigenschaft neutrales Element zu sein sich von der Gruppe auf die Untergruppe vererbt, oder man rechnet es wie oben geschehen nach.). Da $(\{-1, 0, 1\}, \ \cdot)$ eine Gruppe sein soll, muss jedes Element, insbesondere auch die 0 ein inverses Element besitzen. Wir finden aber kein solches Inverses zur Null, obwohl wir alle möglichen Elemente getestet haben. ∎

3. *Diedergruppe D_4 und Vertauschbarkeit – Zentralisator*

Die Diedergruppe $(D_4, \circ)$ ist nicht kommutativ, d.h. im Allgemeinen gilt für Deckabbildungen φ und ψ des Quadrats: $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$

Zu jeder einzelnen Deckabbildung $\varphi \in D_4$ kann man die Deckabbildungen $\psi \in D_4$ finden, für die gilt $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, die also bzgl. der Verkettung von Abbildungen mit φ vertauscht werden dürfen. Die Menge aller Deckabbildungen aus D_4, die bzgl. der Verkettung $\circ$ mit φ vertauscht werden dürfen, nennt man Zentralisator $Z_{(D_4,\circ)}(\varphi)$ von φ bzgl. $(D_4, \circ)$: $Z_{(D_4,\circ)}(\varphi) := \{\psi \in D_4 | \varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi\}$

Bestimmen Sie für alle Deckabbildungen des Quadrats jeweils den Zentralisator bzgl. $(D_4, \circ)$ und erläutern Sie jeweils, was das Ergebnis bedeutet. *6 BE*

Lösungshinweise zu Aufgabe 3

Betrachtet man die Verknüpfungstafel der Diedergruppe $(D_4,\circ)$, dann lassen sich folgende Zentralisatoren ablesen:

$\circ$	id	d	d^2	d^3	s	ds	d^2s	d^3s
id	id	d	d^2	d^3	s	ds	d^2s	d^3s
d	d	d^2	d^3	id	d^3s	s	ds	d^2s
d^2	d^2	d^3	id	d	d^2s	d^3s	s	ds
d^3	d^3	id	d	d^2	ds	d^2s	d^3s	s
s	s	ds	d^2s	d^3s	id	d	d^2	d^3
ds	ds	d^2s	d^3s	s	d^3	id	d	d^2
d^2s	d^2s	d^3s	s	ds	d^2	d^3	id	d
d^3s	d^3s	s	ds	d^2s	d	d^2	d^3	id

(1) $Z_{(D_4,\circ)}(id) = D_4$

Die identische Abbildung id lässt sich mit allen Deckabbildungen des Quadrats vertauschen, weil id das neutrale Element bzgl. $\circ$ ist und dafür nach (G3) gilt:

$$\forall_{\varphi \in D_4}\ id \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ id$$

(2) $Z_{(D_4,\circ)}(d^2) = D_4$

$d^2 = d_{M,180°}$, die Drehung um 180° um den Mittelpunkt des Quadrats lässt sich mit allen Deckdrehungen des Quadrats vertauschen, weil Z_4 kommutativ bzw. abelsch ist und mit allen Deckspiegelungen des Quadrats, da die Drehung um 180° eine Punktspiegelung ist, die mit jeder Achsenspiegelung an einer Achse durch das Spiegelzentrum der Punktspiegelung vertauschbar ist.

(3) $Z_{(D_4,\circ)}(d) = Z_{(D_4,\circ)}(d^3) = \{id, d, d^2, d^3\} = Z_4$

Die Drehung um 90° und die Drehung um 270° vertauschen nur mit den anderen Drehungen wegen $d_{Z,\alpha} \circ d_{Z,\beta} = d_{Z,\alpha+\beta} = d_{Z,\beta+\alpha} = d_{Z,\beta} \circ d_{Z,\alpha}$.

(4) $Z_{(D_4,\circ)}(s) = \{id, d^2, s, d^2s\} = Z_{(D_4,\circ)}(d^2s)$

(5) $Z_{(D_4,\circ)}(ds) = \{id, d^2, ds, d^3s\} = Z_{(D_4,\circ)}(d^3s)$

Die Spiegelung an einer Geraden vertauscht wegen (1) und (2) immer mit id und d^2 und, weil eine Spiegelung involutorisch ist, auch mit sich selbst, sowie mit Spiegelungen an Geraden, die senkrecht auf der Ausgangsgeraden stehen (vgl. Vorlesung und $s \perp d^2s$ sowie $ds \perp d^3s$).

4. Untergruppenkriterium

Beweisen Sie folgende Aussage, bei der es sich um eine Richtung des Satzes 2.2.1 aus dem Skript handelt:

Wenn für eine Teilmenge $U \subseteq G$ einer Gruppe $(G, \star)$ folgendes gilt

(UG1) $\forall_{a,b \in U}\ a \star b \in U$ (Abgeschlossenheit) und

(UG2) $\forall_{a \in U}\ a^{-1} \in U$ (Inverse in U enthalten),

dann ist $(U, \star)$ eine Gruppe.

Hinweis: Sie müssen also nachweisen, dass aus $U \subseteq G$, (UG1) und (UG2) alle Gruppeneigenschaften (G0), (G1), (G2) und (G3) folgen. *6 BE*

Lösungshinweise zu Aufgabe 4

Voraussetzung: $U \subseteq G$, $(G,\star)$ ist eine Gruppe und es gilt:

(UG1) $\forall_{a,b \in U}\ a \star b \in U$ (Abgeschlossenheit) (*)

(UG2) $\forall_{a \in U}\ a^{-1} \in U$ (Inverse in U enthalten) (**)

Zu zeigen: In $(U,\circ)$ gelten alle vier Eigenschaften einer Gruppe:

(G0) $\forall_{a,b \in U}\ a \star b \in U$ (Abgeschlossenheit)

(G1) $\forall_{a,b,c \in U}\ a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ (Assoziativität)

(G2) $\exists_{e \in U}\ \forall_{a \in U}\ a \star e = e \star a = a$ (Existenz eines neutralen Elements)

(G3) $\forall_{a \in U}\ \exists_{a^{-1} \in U}\ a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$ (Existenz inverser Elemente)

Beweis:

(G0) gilt wegen Voraussetzung (UG1).

(G1) Die Gültigkeit von (G1) ergibt sich wie folgt:

(1) Da $U \subseteq G$, ist jedes Element von U auch ein Element von G.

(2) Weil nach Voraussetzung $(G,\star)$ eine Gruppe ist, gilt (G1) für alle Elemente $a, b, c \in G$ und damit insbesondere für alle Elemente $a, b, c \in U \subseteq G$.

Damit ist U bzgl. der Verknüpfung $\star$ assoziativ.

(G2) Die Gültigkeit von (G2) ergibt sich wie folgt:

(1) Wegen Voraussetzung (UG2) liegt das Inverse jedes Elements $a \in U$ wieder in U $(a^{-1} \in U)$.

(2) Nach der Eigenschaft (G3) in $(G,\star)$ gilt: $\forall_{a \in U \subseteq G}\ \exists_{a^{-1} \in U \subseteq G} a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$, wobei e das inverse Element von $(G,\star)$ ist.

(3) Da die Teilmenge $U \subseteq G$ nach Voraussetzung (UG1) bezüglich der Verknüpfung von $(G,\star)$ abgeschlossen ist, muss das neutrale Element $e \in G$ auch Element von $U \subseteq G$ sein.

(4) Da $U \subseteq G$ und für jedes Element a aus G gilt $a \star e = e \star a = a$, folgt, dass auch für jedes Element a aus U gilt: $a \star e = e \star a = a$

Das bedeutet aber, dass das neutrale Element e von G auch neutrales Element von U ist.

(G3) Die Gültigkeit von (G3) ergibt sich wie folgt:

(1) Für jedes $a \in U$ ist nach (UG2) auch $a^{-1} \in U$. Das ist aber das inverse Element zu a aus G.

(2) Da wie unter (G2) gezeigt das neutrale Element e von G auch neutrales Element von U ist und wegen (UG1) auch in U liegt, folgt direkt: $\forall_{a,a^{-1} \in U}\ a \star a^{-1} = e \in U$ ■

5. *Spezielle Gruppen*

Es sei

- $M := (id, d, d^3)$ eine Teilmenge von Z_6,
- $N := (id, d^2, d^4)$ eine Teilmenge von Z_6 und
- $4\mathbb{Z} := \{z \in \mathbb{Z} \,|\, \exists_{t\in\mathbb{Z}}\; z = 4 \cdot t\}$.

Beweisen Sie:

a) $(M, \circ)$ ist keine Gruppe. ***1 BE***

Lösungshinweise zu Aufgabe 5a

$(M, \circ)$ ist keine Gruppe.

$(M, \circ)$ ist keine Gruppe, denn $(M, \circ)$ ist nicht abgeschlossen.

Zu zeigen: $\exists_{a,b\in M}\; a \circ b \notin M$

Wähle $a = b = d$, dann gilt

$$a \circ b = d \circ d = d^2 \notin M$$

■

b) $(N, \circ)$ ist eine Gruppe. ***3 BE***

Lösungshinweise zu Aufgabe 5b

$(N, \circ)$ ist eine Gruppe.

Betrachtet man die Verknüpfungstafel von $(N, \circ)$, dann lässt sich an der Tafel erkennen:

$\circ$	id	d^2	d^4
id	id	d^2	d^4
d^2	d^2	d^4	id
d^4	d^4	id	d^2

(G0): Die Menge ist abgeschlossen bzgl. $\circ$, denn als Ergebnisse treten nur Elemente von N auf.

(G2): id ist das neutrale Element von $\circ$, denn die Zeile mit id ist identisch mit der Zeile der Abbildungen, die zuerst ausgeführt werden und die Spalte ist identisch mit den Abbildungen, die danach ausgeführt werden.

(G3): Jede der Abbildungen hat ein inverses Element in N, denn in jeder Zeile und jeder Spalte tritt das neutrale Element einmal an der passenden Stelle (kommutativ) auf.

(G1): Die Assoziativität lässt sich an der Verknüpfungstafel nicht erkennen, jedoch wird die Assoziativität geerbt von der Gruppe $(Z_6,\circ)$, denn $N \subseteq Z_6$. Siehe Lösungshinweise zu Aufgabe 4.

■

c) $(4\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe. ***3 BE***

Hinweise: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe, $4\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ und $(Z_6, \circ)$ ist eine Gruppe.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5c

$(4\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe.

Laut dem Hinweis gelten die Voraussetzungen , $4\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe, weshalb die Untergruppenkriterien zum Beweis genutzt werden können.

(UG1): (4ℤ ist abgeschlossen bzgl. +)

Zu zeigen ist: $\forall_{a,b\in 4\mathbb{Z}}\ a + b \in 4\mathbb{Z}$

Seien $a, b \in 4\mathbb{Z}$ beliebig, dann gibt es aufgrund der Definition von $4\mathbb{Z}$ $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a = 4 \cdot t_1$ und $b = 4 \cdot t_2$ $(*)$.

Es gilt:

$$a + b \overset{(*)}{\hat{=}} 4 \cdot t_1 + 4 \cdot t_2 \overset{Distributivgesetz\ in\ (\mathbb{Z},+,\cdot)}{\hat{=}} 4 \cdot (t_1 + t_2) \overset{t_3 := t_1 + t_2}{\hat{=}} 4 \cdot t_3.$$

Da $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$ abgeschlossen bzgl. + ist, folgt $t_3 \in \mathbb{Z}$ und somit $a + b = 4 \cdot t_3 \in 4\mathbb{Z}$.

(UG2): (inverse Elemente in $4\mathbb{Z}$: $\forall_{a\in 4\mathbb{Z}}\ -a \in 4\mathbb{Z}$)

Für jedes beliebige $a \in 4\mathbb{Z}$ sei das Inverse $-a$ definiert durch $(-1) \cdot a$.
$-a$ ist dann auch ein Element von $4\mathbb{Z}$, denn für jedes $a \in 4\mathbb{Z}$ gibt es ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $a = 4 \cdot t$.

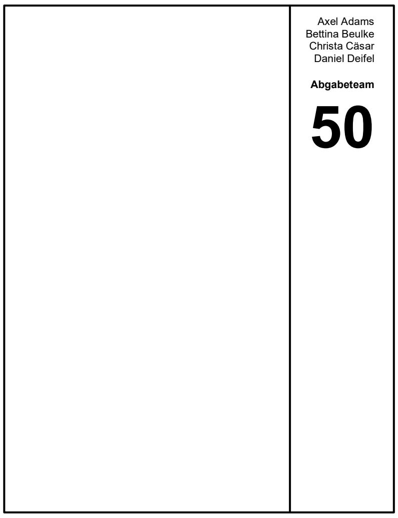
$-a = (-1) \cdot a = (-1) \cdot 4 \cdot t = 4 \cdot (-1) \cdot t = 4 \cdot (-t)$ und $-t \in \mathbb{Z}$, denn $t \in \mathbb{Z}$ und da $(\mathbb{Z}, +)$ Gruppe ist, ist $-t$ (als Inverses) ein Element von $\mathbb{Z}$ und somit $-a \in \mathbb{Z}$.
Da $4\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ gilt $a + (-a) = (-a) + a = 0$, denn $-a$ ist auch invers in $(\mathbb{Z}, +)$.

Somit ist $(4\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe. ■

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: ***25 BE***

Abgabetermin und Hinweise

- Bitte laden Sie Ihre Bearbeitung dieses Übungsblatts bis spätestens
  Freitag, 17.06.2022, 10:00 Uhr
  im OLAT-Ordner [Abgaben Übungsblätter] hoch.



- Bilden Sie zur Bearbeitung Ihrer Übungsblätter **Abgabeteams** aus jeweils 4 Personen, die im gesamten Semester zusammenarbeiten. Schreiben Sie sich umgehend im [OLAT-Kurs] in ein Abgabeteam ein.
- Bearbeitungen auf der ersten Seite rechts oben mit den Namen der Gruppenmitglieder und der Nummer des Abgabe-teams (im Beispiel Abgabeteam 50) beschriften.
- Geben Sie pro Übungsblatt nur **eine PDF-Datei** mit Ihren Bearbeitungen aller Aufgaben des Übungsblatts ab. Benennen Sie diese Datei wie folgt:
  {Abgabenteamnummer}_Uebungsblatt_{Übungsblattnr}.pdf
  Ersetzen Sie die geschweiften Klammern mit Ihren jeweiligen Daten.
- Informationen und Materialien zur Vorlesung finden Sie im Internet unter folgender Adresse:
  https://juergen-roth.de/lehre/algebra-zahlentheorie