1. Übungsblatt – Lösungshinweise

1. Symbolisch, arithmetisch und in Worten beschreiben

a) Formulieren Sie symbolisch das Assoziativgesetz bzgl. einer zweistelligen Verknüpfung (Operation) auf $\mathbb{R}$, die wir Ⓟ nennen wollen.
(Tipp, falls Sie mit „symbolisch“ oder „arithmetisch“ nichts anfangen können:
symbolisch bedeutet hier: Begründung mit Variablen
arithmetisch bedeutet hier: Begründung anhand einer schriftlichen Rechnung.) *1 BE*

b) Formulieren Sie symbolisch das Kommutativgesetz bzgl. einer zweistelligen Verknüpfung (Operation) auf $\mathbb{Q}$, die wir © nennen wollen. *1 BE*

c) Erklären Sie möglichst präzise in Worten die Bedeutung der folgenden Aussage, GANZ OHNE die Verwendung von Formeln oder Variablennamen:
„Die Addition ist auf der Menge der natürlichen Zahlen kommutativ.“ *2 BE*

d) Erklären Sie möglichst präzise in Worten die Bedeutung der folgenden Aussage, GANZ OHNE die Verwendung von Formeln oder Variablennamen:
Die Multiplikation ist auf der Menge der natürlichen Zahlen assoziativ. *2 BE*

e) Nehmen Sie Stellung zur folgenden studentischen Rückfrage: „Warum muss man so viele Distributivitäten in Aufgabe 2e) überprüfen, es gibt doch nur ein Distributivgesetz in $\mathbb{N}$ nämlich $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.“ *3 BE*

f) Nehmen Sie Stellung zur folgenden studentischen Rückfrage: „Ist es nicht so, dass $\oplus$ in Aufgabe 2 assoziativ ist, weil in der Rechnung $2 \cdot (a + b)$ nur die Operationen $+$ und $\cdot$ verwendet werden und diese beiden Operationen assoziativ sind?“ *3 BE*

g) Führen Sie die Beispiele ein bis zwei Stufen weiter: 222*222 = 49284, 2222*2222=4937284. 22222*22222 …
Begründen Sie arithmetisch, d.h. unter Zuhilfenahme einer schriftlichen Rechnung: Die Endziffern dieser Rechnungen lauten immer „284“. *4 BE*

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

a) Formulieren Sie symbolisch das Assoziativgesetz bzgl. einer zweistelligen Verknüpfung (Operation) auf $\mathbb{R}$, die wir Ⓟ nennen wollen.

$$\forall_{a,b,c\in\mathbb{R}} \; a \text{Ⓟ} (b \text{Ⓟ} c) = (a \text{Ⓟ} b) \text{Ⓟ} c$$

b) Formulieren Sie symbolisch das Kommutativgesetz bzgl. einer zweistelligen Verknüpfung (Operation) auf $\mathbb{Q}$, die wir © nennen wollen.

$$\forall_{a,b\in\mathbb{Q}} \; a \copyright b = b \copyright a$$

c) Erklären Sie möglichst präzise in Worten die Bedeutung der folgenden Aussage, GANZ OHNE die Verwendung von Formeln oder Variablennamen:
„Die Addition ist auf der Menge der natürlichen Zahlen kommutativ.“

Addiert man zwei natürliche Zahlen, so erhält man als Ergebnis wieder eine natürliche Zahl. Nun kann man sich fragen, ob die Reihenfolge der Objekte (Zahlen, genannt Summanden) eine Rolle spielt. Man stellt fest, dass es keinen Unterschied macht, ob man 4 mit 2 addiert oder stattdessen 2 mit 4: Man wird als Ergebnis 6 erhalten. Die Vertauschbarkeit der Objekte (Zahlen, genannt Summanden) einer (endlichen) Addition ist eine Eigenschaft der Verknüpfung „Addition“ auf den natürlichen Zahlen. Die Addition auf den natürlichen Zahlen bezeichnet man deshalb auch als kommutativ.

d) Erklären Sie möglichst präzise in Worten die Bedeutung der folgenden Aussage, GANZ OHNE die Verwendung von Formeln oder Variablennamen:
Die Multiplikation ist auf der Menge der natürlichen Zahlen assoziativ.

Multipliziert man drei natürliche Zahlen, so erhält man als Ergebnis wieder eine natürliche Zahl. Man kann ja immer nur eine Multiplikation von zwei Zahlen durchführen, d.h. das Ergebnis der Multiplikation von drei natürlichen Zahlen wird zwei Rechnungen benötigen. Nun kann man sich fragen, ob es eine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge die Rechnungen ausgeführt werden. Man hat zwei Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Man multipliziert zuerst die hinteren beiden Zahlen, und abschließend multipliziert man das Ergebnis mit der vorderen Zahl
2. Möglichkeit: Man multipliziert zuerst die vorderen beiden Zahlen und anschließend multipliziert man das Ergebnis mit der hinteren Zahl.

Man stellt fest: Bei der Multiplikation von natürlichen Zahlen ist die Reihenfolge der hier beschriebenen Rechnungen tatsächlich egal. Die Multiplikation auf der Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet man deshalb auch als assoziativ.

e) Nehmen Sie Stellung zur folgenden studentischen Rückfrage: „Warum muss man so viele Distributivitäten in Aufgabe 2e) überprüfen, es gibt doch nur ein Distributivgesetz in $\mathbb{N}$ nämlich $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$“

Die Aussage „es gibt nur ein Distributivgesetz“ bezieht sich auf Zahlbereiche die in der Schule systematisch kennengelernt werden. Dort gilt im Bereich der Natürlichen Zahlen das beschriebene Gesetz
„$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$“ für alle natürlichen Zahlen a, b, c
Dies ist ein spezielles Distributivgesetz, es ist formuliert für die Verknüpfungen Addition und Multiplikation auf den Natürlichen Zahlen. Da wir über Addition und Multiplikation auf den Natürlichen Zahlen einiges wissen, lassen sich die Distributivitäten in Zeile 2 und 4 durch die Verwendung von anderen Gesetzen ineinander überführen und müssen daher bezüglich der Multiplikation nicht getrennt betrachtet werden.
Über selbst erdachte weitere Verknüpfungen wie etwa $\oplus$ und $\otimes$ ist jedoch noch gar nichts bekannt, wir haben sie in 2e erst ganz neu definiert. Deshalb wissen wir auch nicht, ob und wenn ja welche Distributivitäten gelten. Deshalb untersuchen wir alle möglichen Kombinationen.

f) Nehmen Sie Stellung zur folgenden studentischen Rückfrage: „Ist es nicht so, dass $\oplus$ in Aufgabe 2 assoziativ ist, weil in der Rechnung $2 \cdot (a + b)$ nur die Operationen $+$ und $\cdot$ verwendet werden und diese beiden Operationen assoziativ sind?“

Zwar ist es richtig, dass in der Definition von $\oplus$ nur die Addition und Multiplikation verwendet werden. Aber es geht nicht darum zu beurteilen, ob zur Definition von $\oplus$ nur Verknüpfungen verwendet wurden, die selbst assoziativ sind. Es geht um die neue Verknüpfung $\oplus$. Ist diese neue Verknüpfung assoziativ? Das können wir nur herausfinden, indem wir überprüfen, ob es einen Unterschied macht, in welcher Reihenfolge 3 natürliche Zahlen mit der $\oplus$ Operation verknüpft werden. Wenn wir feststellen würden, dass es keinen Unterschied macht, so wäre $\oplus$ assoziativ auf den natürlichen Zahlen. Wenn wir feststellen würden, dass es (auch nur manchmal) einen Unterschied macht, so wäre $\oplus$ nicht assoziativ auf den natürlichen Zahlen.

g) Führen Sie die Beispiele ein bis zwei Stufen weiter: 222*222 = 49284, 2222*2222=4937284. 22222*22222 …
Begründen Sie arithmetisch, d.h. unter Zuhilfenahme einer schriftlichen Rechnung: Die Endziffern dieser Rechnungen lauten immer „284“

$22.222 \cdot 22.222 = 493.817.284$

$222.222 \cdot 222.222 = 49.382.617.284$

```
222*222
 444
  444
   444
 49284
```

```
2222*2222
 4444
  4444
   4444
    4444
 4937284
```

```
22222*22222
 44444
  44444
   44444
    44444
     44444
 493817284
```

Wie man an den drei Rechnungen erkennen kann, addiert man im Zuge des schriftlichen Rechnens immer Zahlen, die vollständig aus der Ziffer 4 bestehen, da man stellenweise immer 2*2 rechnet. Diese Rechnungen ergeben nie einen „Übertrag“. Erst durch die Summierung der Zahlen, die aus der Ziffer 4 bestehen, ergeben sich dann für die Berechnung des Ergebnisses immer wieder „Überträge“, die verrechnet werden müssen. Die letzten Ziffern 284 verändern sich nicht. Egal wie viele 2en noch vorne an die Zahlen zur Multiplikation angehängt werden, offenbar wird die Notation im eingezeichneten Dreieck erhalten bleiben. Außerdem werden alle 4en, die dazu kommen, weiter vorne stehen, also die Ergebnisberechnung der letzten 3 Ziffern nicht beeinflussen. Die letzte Ziffer wird also 4 sein. Die vorletzte Ziffer 4+4=8 und die Ziffer davor wird 2 sein, denn 4+4+4= 12

Hier gibt es noch mehr zu entdecken, denn nicht nur die letzten 3 Ziffern bleiben identisch, führt man das Beispiel weiter, sieht man, dass auch die nächste Ziffer die 7 ab der Rechnung 2222*2222 erhalten bleiben wird. Warum?

2. *Rechengesetze in $\mathbb{N}$ bzgl. der Operationen $\oplus$ und $\otimes$*

Eine Schülerin hat sich folgende Rechenoperationen ausgedacht:

$$a \oplus b := 2 \cdot (a + b)$$
$$a \otimes b := 2 \cdot a \cdot b$$

Untersuchen Sie, welche der folgenden Rechengesetze für diese Rechenoperationen auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gelten und begründen Sie dies jeweils:

a) Ist $\oplus$ assoziativ? Gilt also: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ ***2 BE***

b) Ist $\oplus$ kommutativ? Gilt also: $a \oplus b = b \oplus a$ ***2 BE***

c) Ist $\otimes$ assoziativ? Gilt also: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ ***2 BE***

d) Ist $\otimes$ kommutativ? Gilt also: $a \otimes b = b \otimes a$ ***2 BE***

e) Gelten bzgl. $\otimes$ und $\oplus$ die folgenden Distributivitäten?

$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$ ***1 BE***

$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ ***1 BE***

$(a \otimes b) \oplus c = (a \oplus c) \otimes (b \oplus c)$ ***1 BE***

$(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ ***1 BE***

a) Ist $\oplus$ assoziativ? Gilt also: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

Wegen

$$a \oplus (b \oplus c) \overset{\text{Definition von } \oplus}{\triangleq} 2 \cdot \big(a + (b \oplus c)\big) \overset{\text{Definition von } \oplus}{\triangleq} 2 \cdot \big(a + 2 \cdot (b + c)\big) = 2a + 4b + 4c$$

$$(a \oplus b) \oplus c \overset{\text{Definition von } \oplus}{\triangleq} 2 \cdot \big((a \oplus b) + c\big) \overset{\text{Definition von } \oplus}{\triangleq} 2 \cdot (2 \cdot (a + b) + c) = 4a + 4b + 2c$$

ist $\oplus$ **nicht assoziativ**. Beispiel: $1 \oplus (0 \oplus 0) = 2 \neq 4 = (1 \oplus 0) \oplus 0$

(Hinweis für diese und die kommenden Teilaufgaben b) bis d): Entweder gibt man hier nun abschließend ein Beispiel für a, b und c an (hier z.B. 1,0,0) und führt dieses als Gegenbeispiel aus oder man sollte einen Koeffizientenvergleich durchführen und feststellen, dass beide Ausdrücke daher nicht algebraisch identisch sind, insbesondere nicht auf der Definitionsmenge der Operationen.

(Das kommentierte Ausführen eines Gegenbeispiels würde hier ausreichen, hilft aber nicht weiter, wenn man sich nicht sicher ist, dass die Aussage nicht gilt)

b) Ist $\oplus$ kommutativ? Gilt also: $a \oplus b = b \oplus a$

Wegen

$$a \oplus b \overset{\text{Definition von } \oplus}{\triangleq} 2 \cdot (a + b) \overset{\text{Kommutativität von } +}{\triangleq} 2 \cdot (b + a) \overset{\text{Def. von } \oplus}{\triangleq} b \oplus a$$

ist $\oplus$ **kommutativ**.

c) Ist $\otimes$ assoziativ? Gilt also: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

Wegen

$$a \otimes (b \otimes c) \overset{\text{Definition von } \otimes}{\triangleq} 2 \cdot a \cdot (b \otimes c) \overset{\text{Definition von } \otimes}{\triangleq} 2 \cdot a \cdot (2 \cdot b \cdot c) = 4 \cdot a \cdot b \cdot c$$

$$(a \otimes b) \otimes c \overset{\text{Definition von } \otimes}{\triangleq} 2 \cdot (a \otimes b) \cdot c \overset{\text{Definition von } \otimes}{\triangleq} 2 \cdot (2 \cdot a \cdot b) \cdot c = 4 \cdot a \cdot b \cdot c$$

ist $\otimes$ **assoziativ**.

d) Ist $\otimes$ kommutativ? Gilt also: $a \otimes b = b \otimes a$

Wegen

$$a \otimes b \overset{\text{Definition von } \otimes}{\triangleq} 2 \cdot a \cdot b \overset{\text{Kommutativität von } \cdot}{\triangleq} 2 \cdot b \cdot a \overset{\text{Definition von } \otimes}{\triangleq} b \otimes a$$

ist $\otimes$ **kommutativ**.

e) Gelten bzgl. $\otimes$ und $\oplus$ die folgenden Distributivitäten?

$$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$$

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

$$(a \otimes b) \oplus c = (a \oplus c) \otimes (b \oplus c)$$

$$(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$$

$$a \oplus (b \otimes c) \overset{\text{Def. von } \oplus}{\triangleq} 2 \cdot \big(a + (b \otimes c)\big) \overset{\text{Def. von } \otimes}{\triangleq} 2 \cdot (a + 2 \cdot b \cdot c) = 2a + 4bc$$

$$(a \oplus b) \otimes (a \oplus c) \overset{\text{Def. } \otimes}{\triangleq} 2 \cdot (a \oplus b) \cdot (a \oplus c)$$

$$\overset{\text{Def. } \oplus}{\triangleq} 2 \cdot 2 \cdot (a + b) \cdot 2 \cdot (a + c) = 8 \cdot (a^2 + ab + ac + bc)$$

$\Rightarrow\ a \oplus (b \otimes c) \neq (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$

Konkretes Gegenbeispiel: (a, b, c) sei $(1, 0, 0)$:
$2a + 4bc = 2$ und $8 \cdot (a^2 + ab + ac + bc) = 8$; aber $2 \neq 8$

$$a \otimes (b \oplus c) \overset{\text{Def. } \otimes}{\triangleq} 2 \cdot a \cdot (b \oplus c) \overset{\text{Definition von } \oplus}{\triangleq} 2 \cdot a \cdot 2 \cdot (b + c) = 4ab + 4ac$$

$$(a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \overset{\text{Definition von } \oplus}{\triangleq} 2 \cdot \big((a \otimes b) + (a \otimes c)\big)$$

$$\overset{\text{Definition von } \otimes}{\triangleq} 2 \cdot (2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c) = 4ab + 4ac$$

$\Rightarrow\ a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

$$(a \otimes b) \oplus c \overset{\text{Def. von } \otimes}{\triangleq} (2 \cdot a \cdot b) \oplus c \overset{\text{Def. von } \oplus}{\triangleq} 2 \cdot (2 \cdot a \cdot b + c) = 4ab + 2c$$

$$(a \oplus c) \otimes (b \oplus c) \overset{\text{Definition von } \oplus}{\triangleq} \big(2 \cdot (a + c)\big) \otimes \big(2 \cdot (b + c)\big)$$

$$\overset{\text{Def. } \otimes}{\triangleq} 2 \cdot 2 \cdot (a + c) \cdot 2 \cdot (b + c) = 8ab + 8ac + 8bc + 8c^2$$

$\Rightarrow\ (a \otimes b) \oplus c \neq (a \oplus c) \otimes (b \oplus c)$

Konkretes Gegenbeispiel: (a, b, c) sei $(0, 0, 1)$:
$4ab + 2c = 2$ und $8ab + 8ac + 8bc + 8c^2 = 8$; aber $2 \neq 8$

$$(a \oplus b) \otimes c \overset{\text{Def. von} \otimes}{\widehat{=}} 2 \cdot (a \oplus b) \cdot c \overset{\text{Def. von} \oplus}{\widehat{=}} 2 \cdot \big(2 \cdot (a + b)\big) \cdot c = 4ac + 4bc$$

$$(a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \overset{\text{Definition von} \oplus}{\widehat{=}} 2 \cdot \big((a \otimes c) + (b \otimes c)\big)$$

$$\overset{\text{Definition von} \otimes}{\widehat{=}} 2 \cdot (2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c) = 4ac + 4bc$$

$\Rightarrow\ (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: 28 BE