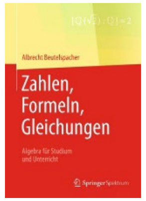
Jürgen Roth

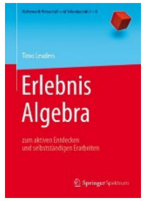
Grundlagen der Algebra und elem. Zahlentheorie

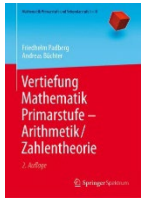
Modul 4b: Grundlagen der Mathematik C

Materialien zur Veranstaltung

- **Internetseite zur Veranstaltung und Skript**
  - https://juergen-roth.de/lehre/algebra-zahlentheorie/ → Skript unter **Material**
- **Vorausgesetzt wird:**
  - Fachwissenschaftliche Grundlagen
  - www.schulabakus.de/Arithmetik/
- **Literatur**
  - Beutelspacher, A. (2018). Zahlen, Formeln, Gleichungen. Algebra für Studium und Unterricht. Wiesbaden: Springer Spektrum. ISBN: 978-3-658-16105-7
  - Leuders, T. (2016). Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbständigen Erarbeiten. Berlin: Springer Spektrum. ISBN: 978-3-662-46296-6
  - Padberg, F.; Büchter, A. (2015). Vertiefung Mathematik Primarstufe – Arithmetik/ Zahlentheorie (2. Auflage). Berlin: Springer Spektrum. ISBN: 978-3-662-45986-7







1 : 2 Prinzip

- **Arbeitsverteilung in der Schule**

Unter-richt		Eigen-arbeit
3	**:**	**1**

- **Arbeitsverteilung an der Universität**
  - Verantwortung
    - Rahmen-bedingungen: Lehrende
    - Lernprozess: Studierende

Lehrveran-staltungen		Eigen-arbeit
1	**:**	**2**

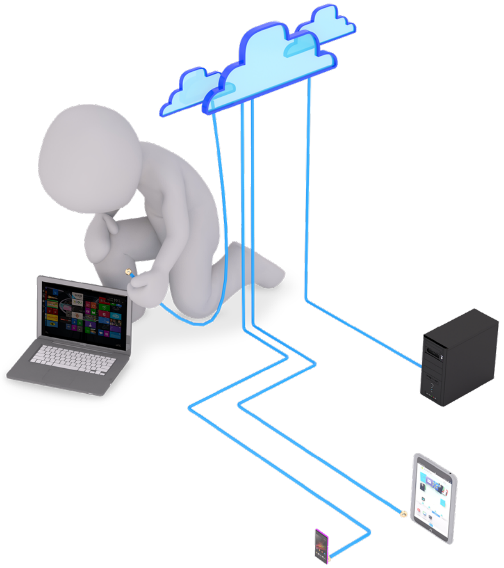
1 : 2 Prinzip

- Studienerfolg stellt sich ein, wenn **zu jeder Stunde Lehrveranstaltungen zwei Stunden Eigenarbeit** aufgewendet werden.

Beispiele für Eigenarbeit

- **aktive Beteiligung an den Übungen**
- **Bearbeitung der Übungsaufgaben**
- Inhalte selbst strukturieren (z.B. Zusammenfassung erstellen)
- Fachgespräche mit Kommilitonen (Arbeitsgruppen bilden)
- Fragen formulieren, stellen, diskutieren, beantworten
- Eigenständig Literatur rezipieren (Lehrbücher)
- Prüfungen vorbereiten

Information und Fragen zur Vorlesung

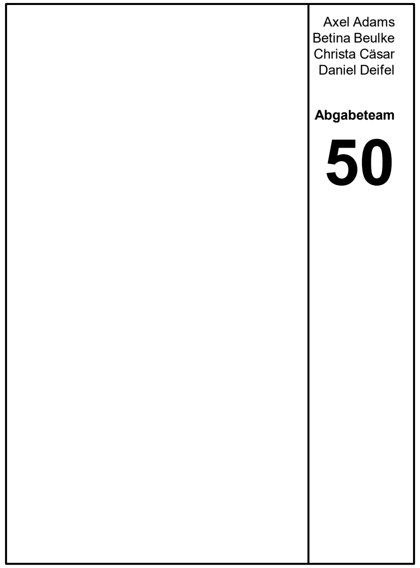


- **Informationen und Material zur Vorlesung**
  - https://juergen-roth.de/lehre/algebra-zahlentheorie/
  - Zeitplan für Vorlesung & Übungen → **Veranstaltungsplanung**
  - Vorlesungsvideos: In der **Veranstaltungsplanung** verlinkt.
  - Skript zur Vorlesung
  - Übungsblätter und Lösungshinweise dazu
  - Termine der Prüfungen und der Prüfungsanmeldung
  - Erläuterung zur Bonusregelung

- **Fragen zur Vorlesung**
  - in der Vorlesung direkt stellen,
  - notieren und in der Fragerunde zu Beginn der nächsten Vorlesung stellen,
  - im Vorlesungsforum im OLAT-Kurs posten.

Übungsblätter

- Können von der Veranstaltungshomepage heruntergeladen werden: https://juergen-roth.de/lehre/algebra-zahlentheorie/ → Material
- Abgabe in **festen 4er-Abgabeteams**.
- Einschreiben für Abgabeteams in OLAT.
- Bearbeitungen auf der ersten Seite rechts oben mit den **Namen der Gruppenmitglieder** und der **Nummer des Abgabeteams** (Im Beispiel Abgabeteam 50) beschriften.
- Bearbeitungen als **eine PDF-Datei pro Übungsblatt** mit allen Aufgaben des Übungsblatts abspeichern.
- **Abgabe** bis **spätestens Freitag, 10:00 Uhr** durch Hochladen der PDF-Datei im OLAT-Kurs im vorgesehenen Ordner Abgaben Übungsblätter.
- Rückgabe der korrigierten Übungsblätter ebenfalls im OLAT-Kurs.



Grundlagen der Algebra und elementaren Zahlentheorie

Jürgen Roth

Kapitel 0: Was ist Algebra bzw. Zahlentheorie?

Grundlagen der Algebra und elementaren Zahlentheorie

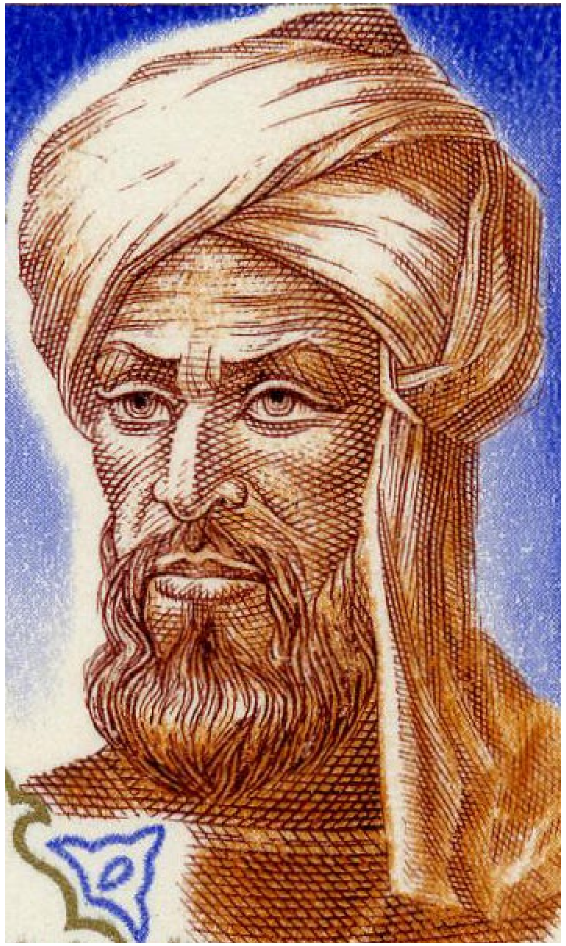
Algebra?!

Euler, Leonhard: Vollständige Anleitung zur Algebra. Neue Ausgabe, Reclam Verlag, Leipzig, o. J., S. 217

„Der Hauptzweck der Algebra sowie aller Theile der Mathematik besteht darin, den Werth solcher Größen zu bestimmen, die bisher unbekannt gewesen, was aus genauer Erwägung der Bedingungen geschieht. Daher wird die Algebra auch als die Wissenschaft definirt, welche zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet.“

Euler (1770)

Algebra?!



Al-Hwārizmī (Mohammed ben Musa)
persischer Mathematiker ca. 780 – ca. 850 n. Chr.

- **al-Kitāb al-muhtasar fī hisāb al-ğabr wa-l-muqābala**
  - „Das umfassende Buch vom Rechnen durch Ergänzung und Ausgleich"
  - „Algebra" entstammt obigem Titel des Rechen-Lehrbuchs von **Al-Hwārizmī**
- **Bedeutung von al-ğabr**
  - Wörtlich: „Ausüben von Zwang"
  - in der Gleichungslehre: „Ergänzen" einer Gleichung durch Addition negativer Glieder auf beiden Seiten

Algebra?!

(klassische) Algebra

- Lösen algebraischer Gleichungen (reelle oder komplexe Zahlen)
- Zentrales Resultat: Fundamentalsatz der Algebra

(abstrakte) Algebra

- Grundlagendisziplin der modernen Mathematik
- algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper) und deren Verknüpfung

Computeralgebra

- Symbolischen Manipulation algebraischer Ausdrücke
- Sucht effiziente Algorithmen & bestimmt die Komplexität (⇨ CAS)

(elementare) Algebra

- Algebra im Sinne der Schulmathematik
- Umgang mit Zahlen, Termen und Funktionen
- Wege zur Lösung einfacher algebraischer Gleichungen

Zahlentheorie?!

Elementare Zahlentheorie

- Eigenschaften ganzer Zahlen (Primfaktor-zerlegung, Teilbarkeit, Kongruenzen)
- kleiner Satz von Fermat, Satz von Euler, Chinesischer Restsatz, Satz von Wilson, Euklidischer Algorithmus

Analytische Zahlentheorie

- Nutzung von Methoden der Analysis und Funktionentheorie zur Lösung zahlentheoretischer Fragestellungen
- Verteilung von Primzahlen, Nachweis der Transzendenz von Zahlen

Algebraische Zahlentheorie

- Algebraische Zahlkörper
- quadratisches Reziprozitätsgesetz, diophantische Gleichungen, Zeta-Funktion

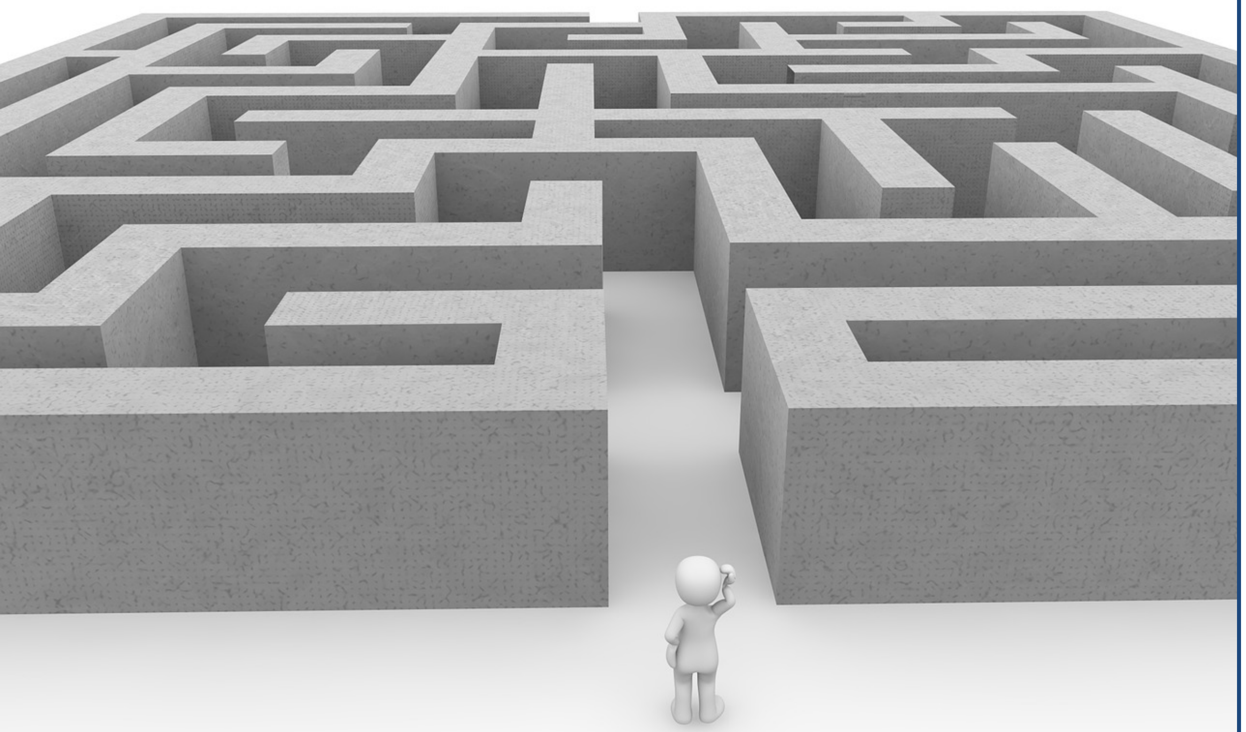
Algorithm. Zahlentheorie

- Algorithmisch effiziente Umsetzung zahlentheoretischer Probleme
- Große Zahlen: Faktorisierung, Primzahl?
- effiziente Berechnung des diskreten Logarithmus

Jürgen Roth

Kapitel 1: Muster und Strukturen

Grundlagen der Algebra und elementaren Zahlentheorie



Kapitel 1: Muster und Strukturen

1.1 Rechnen mit Resten

1.2 Rechnen mit Abbildungen

1.3 Mit allem rechnen: Algebraische Strukturen

Kapitel 1: Muster und Strukturen

1.1 Rechnen mit Resten

Additionstafel

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Eigenschaften der Additionstafel

- Auf den Diagonalen von rechts oben nach links unten sind die Ergebnisse jeweils gleich. Sie steigen von links oben nach rechts unten.
- Entlang der Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten) gibt es eine „Spiegelachse“, die sich aus der Kommutativität der Addition ergibt: $a + b = b + a$
- Die Zahlen steigen längs der diagonalen Spiegelachse und auch längs der zu ihr parallelen Achsen immer um 2.
- In jedem 2×2-Quadrat ist das Produkt der Nebendiagonale immer um eins größer als das Produkt der Hauptdiagonale:

$$7 \cdot 7 = 6 \cdot 8 + 1$$

6	7
7	8

- Können Sie begründen, warum das so ist?

Additions- und Multiplikationstafel

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Multiplikationstafel

Eigenschaften der Multiplikationstafel

- Entlang der Hauptdiagonalen gibt es wegen der Kommutativität der Multiplikation eine Spiegelachse: $a \cdot b = b \cdot a$
- In jeder Zeile (Spalte) stehen die Endziffern der Vielfachenreihe des Zeilen- bzw. Spaltenkopfs.
- Manchmal sind das nur bestimmte Ziffern, wie z.B. $2, 4, 6, 8, 0$, manchmal aber auch alle Ziffern in scheinbar beliebiger Reihenfolge (z.B. $3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 0$).
- Letzteres geschieht bei den Vielfachen einer Zahl, die keinen gemeinsamen Teiler mit 10 hat, die also weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist.
- Können Sie begründen warum das so ist?
- Wenn man die Tafel nach rechts fortsetzt, wiederholen sich die Endziffernmuster wieder.

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Multiplikationstafel

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100

Egal ob man $3 \cdot 2$, $3 \cdot 12$ oder $3 \cdot 22$ rechnet, das Ergebnis endet immer auf 6.

Das gilt natürlich auch für die Fortsetzung nach unten, also z. B. $13 \cdot 2$, $13 \cdot 22$ usw.

Für die Multiplikation (und die Addition, vgl. Folie 1.15) hängen die Endziffern der Ergebnisse nur von den Endziffern der Ursprungszahlen ab.

Und auch nach links kann man die Tabelle mit einer Spalte 0 fortsetzen: Für die Endziffer des Ergebnisses ist die Multiplikation mit 0 oder mit 10 von gleicher Wirkung.

Additionstafel

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Egal ob man $3 + 2$, $3 + 12$ oder $3 + 22$ rechnet, das Ergebnis endet immer auf 5.

Das gilt natürlich auch für die Fortsetzung nach unten, also z. B. $13 + 2$, $13 + 22$ usw.

Für die Addition (und die Multiplikation, vgl. Folie 1.16) hängen die Endziffern der Ergebnisse nur von den Endziffern der Ursprungszahlen ab.

Und auch nach links kann man die Tabelle mit einer Spalte 0 fortsetzen: Für die Endziffer des Ergebnisses hat die Addition von 0 oder von 10 die gleiche Wirkung.

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Begründungen

Sie haben erkannt, dass sich die Endziffern regelmäßig wiederholen und dass das Schema vollständig durch die Werte im ersten 10×10-Quadrat bestimmt sind.

Symbolische Begründung:

$$(10a + b) \cdot (10c + d)$$
$$= 100ac + 10ad + 10bc + bd$$
$$= 10 \cdot (10ac + ad + bc + y) + x$$

mit $bd = 10y + x$

Für Kinder, die mit Variablen nicht vertraut sind, ist das evtl. über die schriftliche Multiplikation, zugänglicher:

Arithmetische Begründung:

$$\begin{array}{cccccccc}
* & * & 3 & \cdot & * & * & * & 4 \\
\hline
* & * & * & * & * & & & \\
 & * & * & * & * & * & & \\
 & & * & * & * & * & * & \\
 & & & * & * & * & * & 2 \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & 2
\end{array}$$

Mit Resten rechnen

Man kann also mit den Zehnerresten von Zahlen rechnen:

$$(\text{Zahl mit Zehnerrest } 3) \cdot (\text{Zahl mit Zehnerrest } 4)$$
$$= (\text{Zahl mit Zehnerrest } 2)$$

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Hinweis: Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen beinhaltet die Null. Es gilt also: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Geraden und ungeraden Zahlen

Gerade & ungerade Zahlen

Gerade Zahl: $\boldsymbol{g}$

Ungerade Zahl: $\boldsymbol{u}$

Addieren

$\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}$

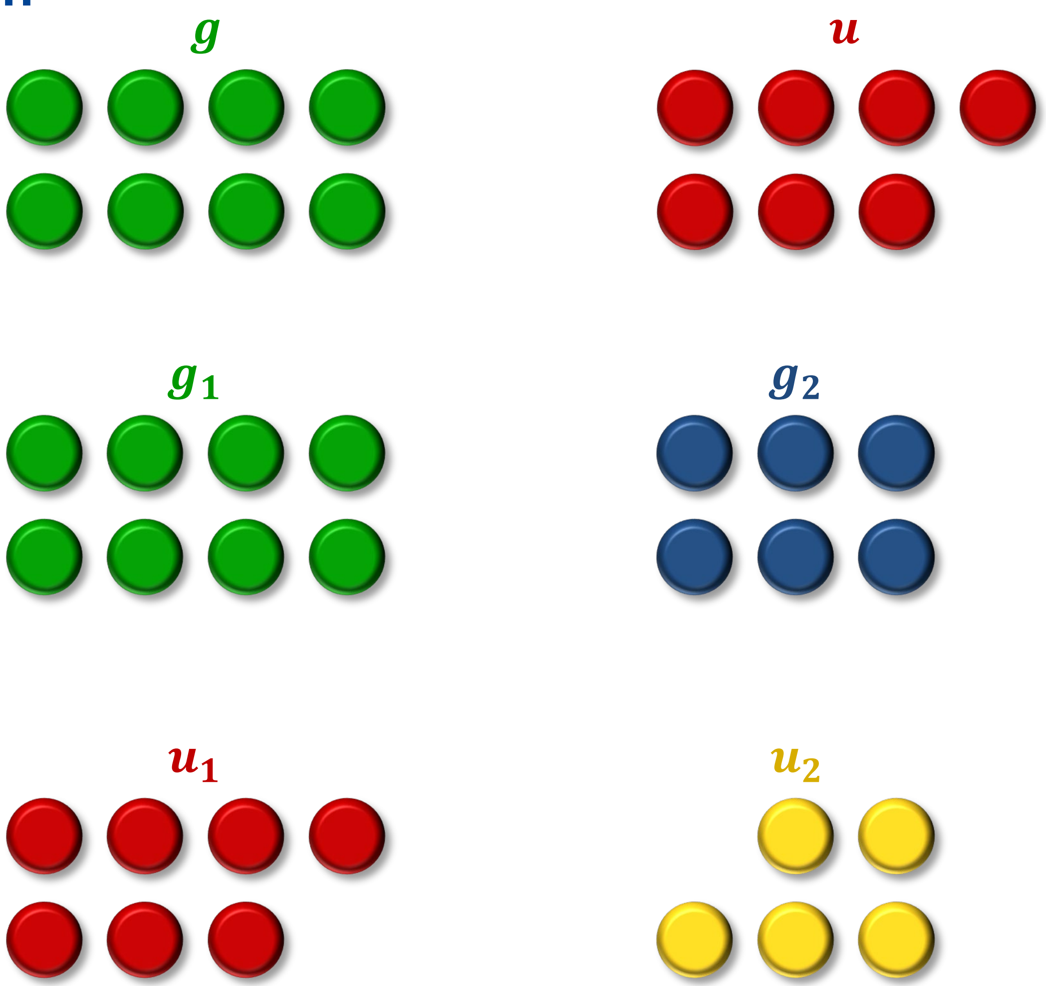
$\boldsymbol{g} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}$

+	**g**	**u**
g	g	u
u	u	g

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0



g gerade
$\Leftrightarrow \; \exists_{n \in \mathbb{N}} \; g = 2n$

u ungerade
$\Leftrightarrow \; \exists_{k \in \mathbb{N}} \; u = 2k + 1$

$$\begin{aligned} g + u &= 2n + (2k + 1) \\ &= (2n + 2k) + 1 \\ &= 2 \cdot \underbrace{(n + k)}_{\in \mathbb{N}} + 1 \end{aligned}$$

ist ungerade.

$$\begin{aligned} g_1 + g_2 &= 2n + 2k \\ &= 2 \cdot \underbrace{(n + k)}_{\in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

ist gerade.

Geraden und ungeraden Zahlen

Gerade & ungerade Zahlen

Gerade Zahl: $\boldsymbol{g}$

Ungerade Zahl: $\boldsymbol{u}$

Multiplizieren

$\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}$

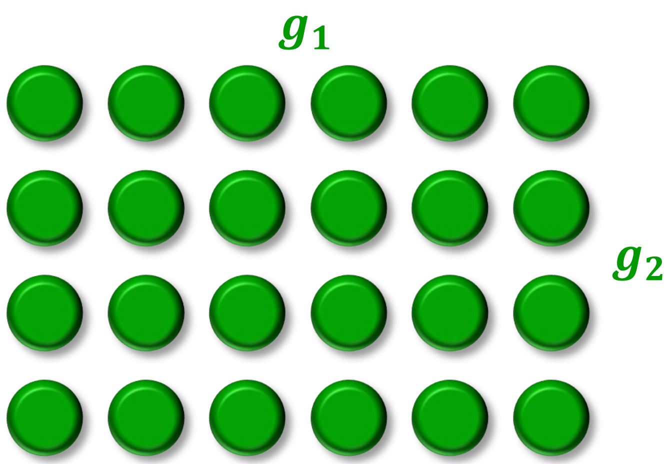
$\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}$

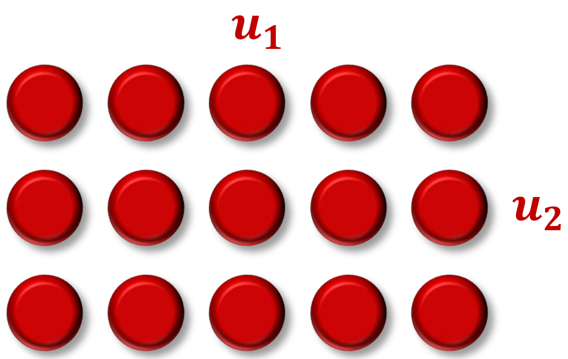
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

$\cdot$	$\boldsymbol{g}$	$\boldsymbol{u}$
$\boldsymbol{g}$	g	g
$\boldsymbol{u}$	g	u

$\cdot$	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1





g gerade
$\Leftrightarrow \ \exists_{n\in\mathbb{N}} \ g = 2n$

u ungerade
$\Leftrightarrow \ \exists_{k\in\mathbb{N}} \ u = 2k+1$

$$\begin{aligned} g \cdot u &= 2n \cdot (2k+1) \\ &= 2 \cdot \underbrace{(2kn+n)}_{\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

ist gerade.

$$\begin{aligned} u_1 \cdot u_2 &= (2n+1)\cdot(2k+1) \\ &= (2n \cdot 2k + 2n + 2k + 1) \\ &= 2 \cdot \underbrace{(2kn+n+k)}_{\in\mathbb{N}} + 1 \end{aligned}$$

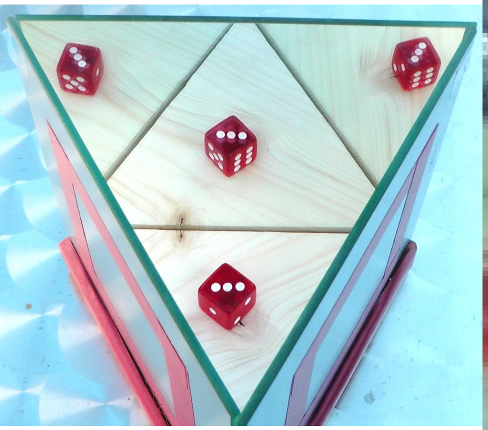
ist ungerade.

Kapitel 1: Muster und Strukturen

1.2 Rechnen mit Abbildungen

Spiegeln: Abbilden

Spiegeln: Abbilden



https://juergen-roth.de/vortraege/#2010

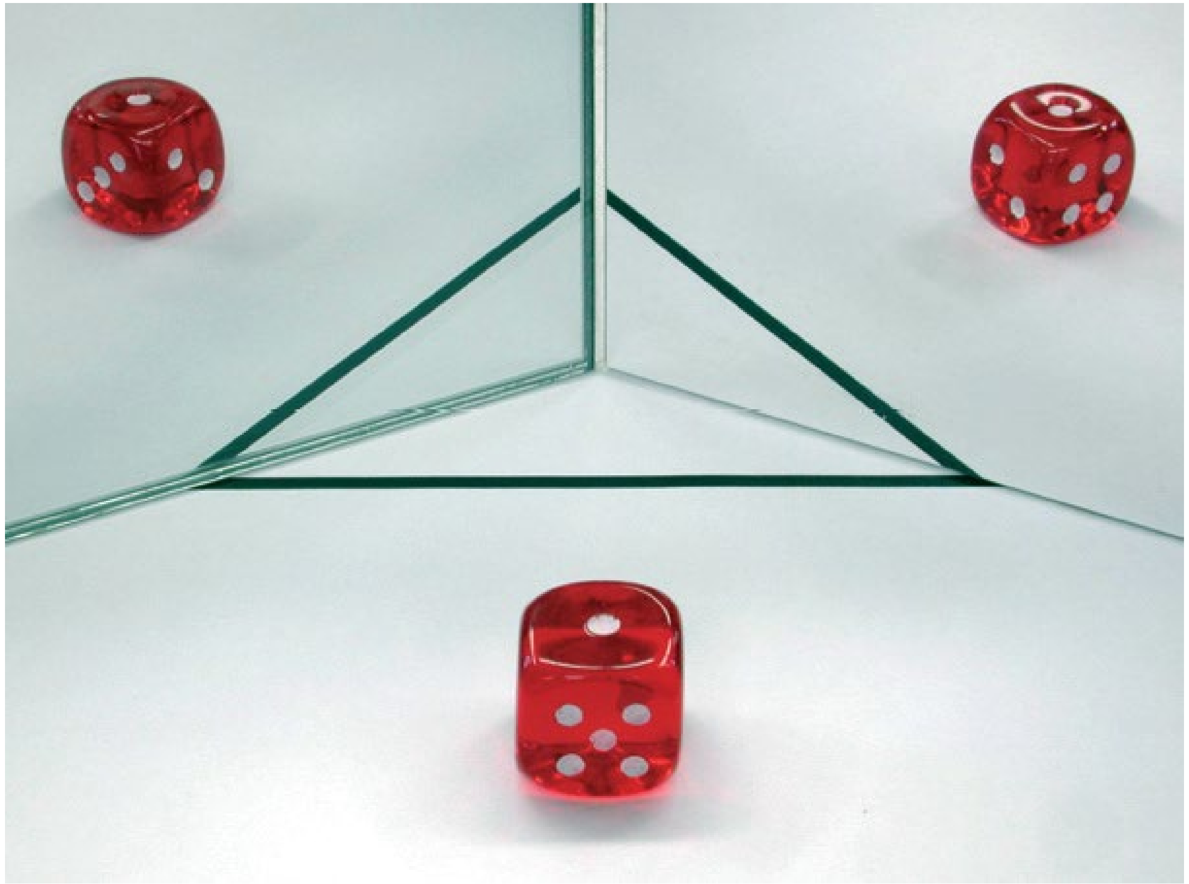
https://youtu.be/WC16tcDwOAA

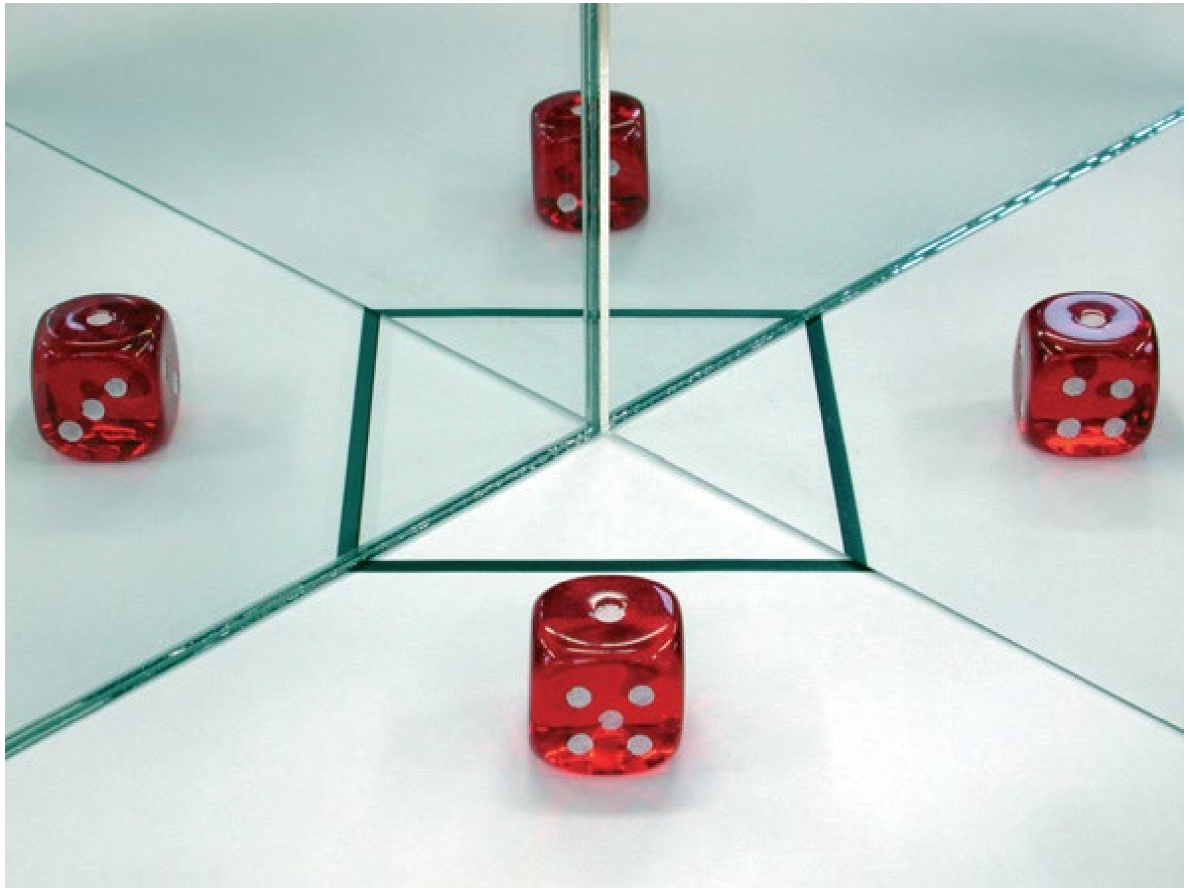
Spiegelbuch: Abbilden mit zwei Spiegeln

- **Zwei Aspekte von Symmetrie**
  - „Symmetrie ist eine Eigenschaft einer Figur, man findet in der Figur ‚das Gleiche woanders' – und das auf ganz verschiedene Weisen."
  - „Symmetrie ist eine Operation, also eine Handlung, die man an einer Figur ausführt, und die einen Teil der Figur identisch an einen anderen Ort transportiert – auch das ist wieder auf verschiedene Weisen möglich."

Leuders, T. (2016). Erlebnis Algebra. Berlin: Springer Spektrum, S. 7

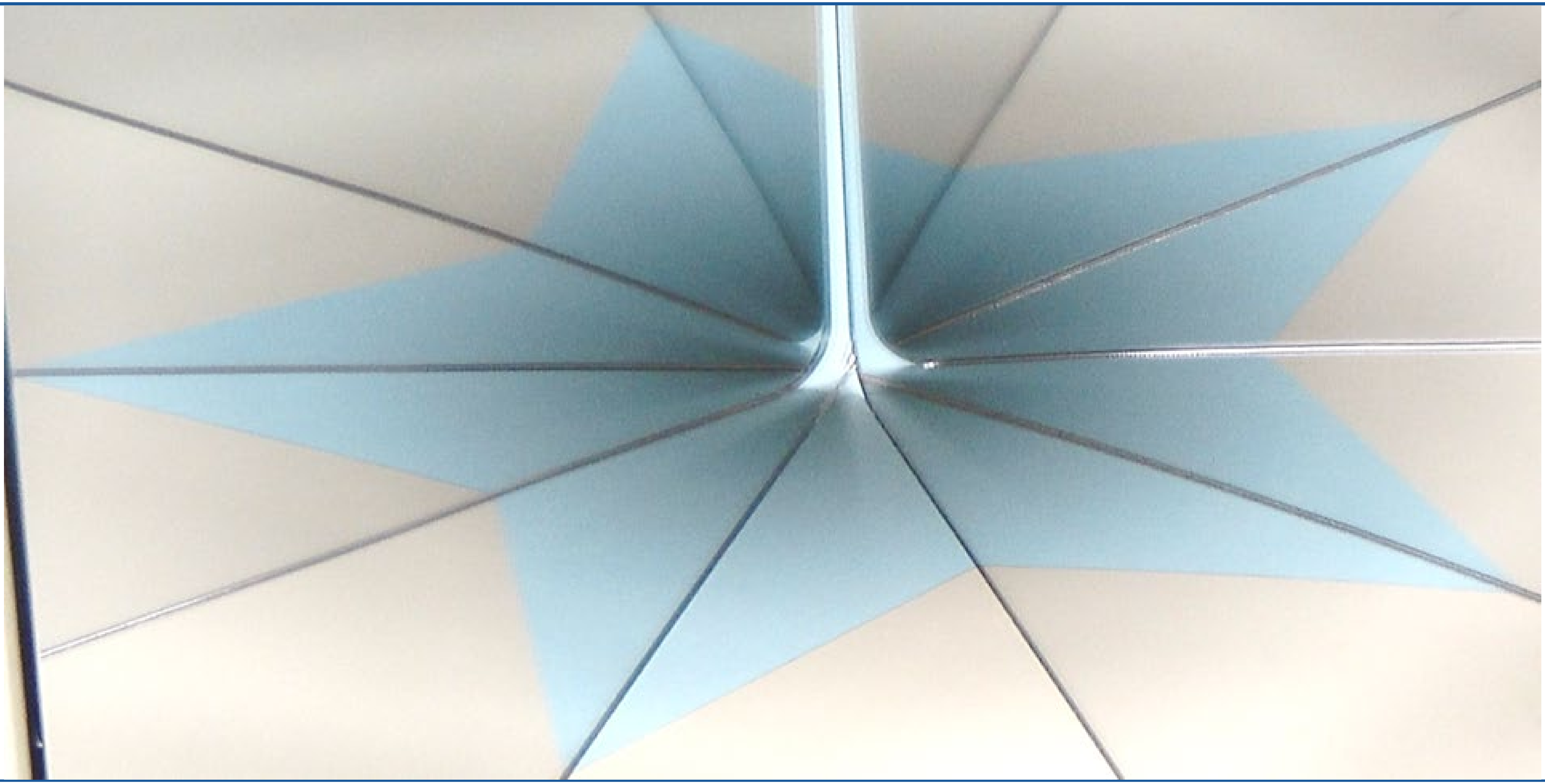
Spiegelbuch: Spiegeln mit zwei Spiegeln



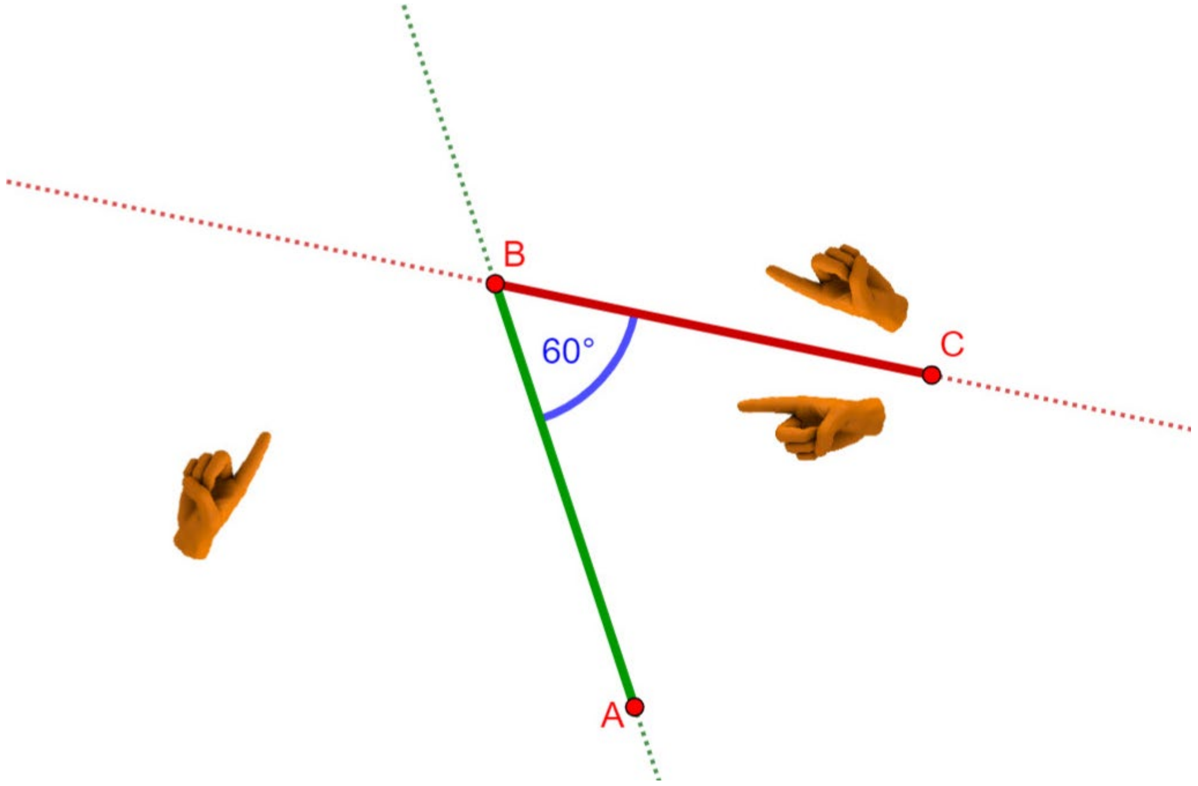


https://juergen-roth.de/vortraege/#2010

Spiegelbuch: Abbilden mit zwei Spiegeln



Experimentieren mit dem Winkelspiegel



$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s_a"] \arrow[rr, bend right, "?"'] & A' \arrow[r, "s_b"] & A'' \arrow[r, "s_a"] & A' \end{tikzcd}$$

Legt man etwas zwischen zwei Spiegel, die an einer Kante in einem festen Winkel miteinander verbunden sind, dann wird nicht nur der Gegenstand an den beiden Spiegeln gespiegelt, sondern auch die Spiegelbilder werden wieder gespiegelt …

- Untersuchen Sie diese Situation geometrisch, indem Sie einen Gegenstand (vielleicht erst einmal einen Punkt) möglichst oft spiegeln.
- Was ist das Ergebnis, wenn man mehrere Spiegelungen hintereinander ausführt?
- Benennen Sie die Spiegelung an der Achse a mit $\boldsymbol{s_a}$, die Spiegelung an der Achse b mit $\boldsymbol{s_b}$ und untersuchen Sie Verknüpfungen der Spiegelungen.
- Welche Abbildung versteckt sich z. B. hinter dem Fragezeichen?

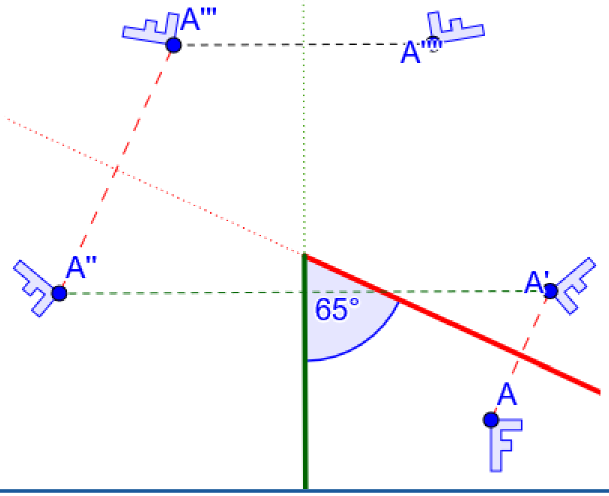
https://www.geogebra.org/m/rdxfawhh

Experimentieren mit dem Winkelspiegel
Ergebnisse

- Spiegelt man einen Punkt zweimal an derselben Gerade, so landet der Punkt wieder am Ausgangspunkt:

$$s_a(s_a(A)) = A$$
$$s_b(s_b(A)) = A$$

- Spiegelt man einen Punkt abwechselnd an den zwei Geraden a und b, so entsteht in der Regel immer wieder ein neuer Punkt.

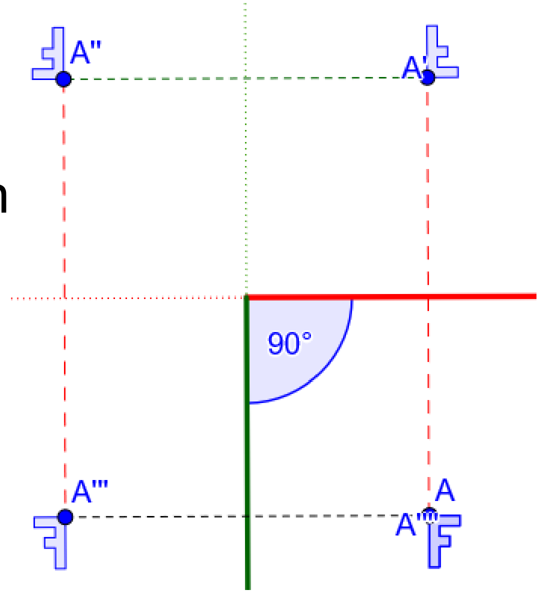


$$s_a(A) = A'$$
$$s_b(s_a(A)) = A''$$
$$s_a\left(s_b(s_a(A))\right) = A'''$$
$$s_b\left(s_a\left(s_b(s_a(A))\right)\right) = A''''$$

- Wenn die Geraden a und b einen Winkel von $90°$ einschließen, dann landet man nach vier Spiegelungen wieder am Ausgangspunkt.

$$s_b\left(s_a\left(s_b(s_a(A))\right)\right) = A$$

wenn $b \perp a$



- Schließen die Geraden a und b einen Winkel von $60°$ ein, dann landet man nach sechs Spiegelungen wieder am Ausgangspunkt.

$$s_b\left(s_a\left(s_b\left(s_a\left(s_b(s_a(A))\right)\right)\right)\right) = A$$

wenn $|\angle(b, a)| = 60°$

https://www.geogebra.org/m/zynpn4mh

Experimentieren mit dem Winkelspiegel
Ergebnisse

- Welche Abbildungen entstehen, wenn man Achsenspiegelungen nacheinander ausführt?
- An der Lage der Buchstaben konnte man erkennen: Die *Verkettung* $s_b \circ s_a$ (sprich: „s_b nach s_a") von Achsenspiegelungen an zwei sich in einem Punkt Z schneidenden Geraden a und b ist eine Drehung $d_{Z,\alpha}$ um einen Winkel α.

$$(s_b \circ s_a)(A) := s_b\big(s_a(A)\big) = d_{Z,\alpha}(A)$$

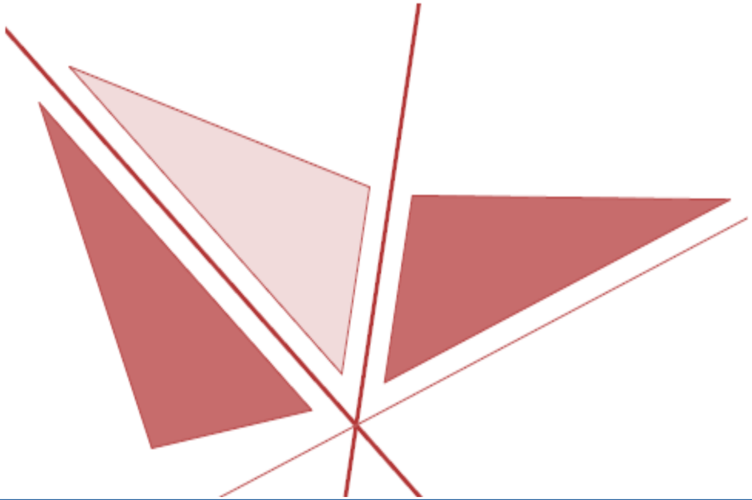
- Ist $a \perp b$, gilt also $|\angle(b,a)| = 90°$, dann ist $s_b \circ s_a$ eine Drehung $d_{Z,180°}$ um $180°$ bzw. eine Punktspiegelung p_Z an Z.

$$|\angle(b,a)| = 90° \Rightarrow (s_b \circ s_a)(A) = s_b\big(s_a(A)\big) = d_{Z,180°}(A) = p_Z(A)$$

- Der Drehwinkel scheint also gerade doppelt so groß zu sein wie der Winkel zwischen den Spiegelachsen.

Satz 1.2.1
Schneiden sich zwei Geraden a und b im Punkt Z unter einem Zwischenwinkel $\angle(b,a)$ mit $|\angle(b,a)| = \alpha$, dann folgt: $s_b \circ s_a = d_{Z,2\alpha}$

- **Beweis**
  Übungsaufgabe



Experimentieren mit dem Winkelspiegel
Ergebnisse

- Mit Satz 1.2.1 lässt sich erklären, wann welche geschlossenen Figuren entstehen:

$$(s_b \circ s_a \circ s_b \circ s_a)(A) = s_b\left(s_a\left(s_b(s_a(A))\right)\right) = s_b\left(s_a\left(d_{Z,\alpha}(A)\right)\right) = d_{Z,\alpha}\left(d_{Z,\alpha}(A)\right) = d_{Z,2\alpha}(A)$$

mit $|\angle(b,a)| = \frac{\alpha}{2}$

- Wenn die Achsen in Z aufeinander senkrecht stehen, also gilt $|\angle(b,a)| = \frac{\alpha}{2} = 90°$, dann ist $\alpha = 2 \cdot 90° = 180°$.
- Die Drehung $d_{Z,2\alpha} = d_{Z,2\cdot 180°} = d_{Z,360°}$ ist also eine um $360°$, die alle Punkte auf sich selbst abbildet.

$$s_b\left(s_a\left(s_b(s_a(A))\right)\right) = d_{Z,180°}\left(d_{Z,180°}(A)\right) = d_{Z,360°}(A) = d_{Z,0°}(A) = id(A) = A$$

- Die „Nulldrehung“ $d_{Z,0°}$ nennt man auch „identische Abbildung“ id.
- Spiegelungen an zwei Achsen a und b in unterschiedlicher Reihenfolge ergeben in der Regel unterschiedliche Bilder:

$$(s_b \circ s_a)(A) \neq (s_a \circ s_b)(A)$$

- Die Verkettung von Achsenspiegelungen ist also nicht kommutativ!

Abbildungen

Zusammenfassung

- Die Aussagen der letzten Folien gelten für alle Punkte der Ebene. Es handelt sich um Eigenschaften der Abbildungen und deren Beziehungen untereinander.
- Aus zwei Abbildungen entsteht durch Hintereinanderausführung eine neue Abbildung, wenn man sie als eine Verknüpfung der beiden Abbildungen auffasst.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & y \arrow[r, "g"] & z \end{tikzcd}$$

$$\forall_{x\in\mathbb{D}}\ h(x) = (g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

Sprich: g nach f

Eigenschaften der Abbildungen

- Identische Abbildung: $\forall_{A\in\mathbb{R}^2}\ id(A) = A$
- Achsenspiegelung an der Gerade a: s_a
- Drehung um Z mit Drehwinkel α: $d_{Z,\alpha}$
- $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s_a"] \arrow[rr, bend right, "d_{Z,\alpha}"'] & A' \arrow[r, "s_b"] & A'' \end{tikzcd}$ mit $\alpha = 2 \cdot |\angle(b,a)|$ und $a \cap b = \{Z\}$
- $s_a \circ s_a = id$
- $s_b \circ s_b = id$
- $s_b \circ s_a = d_{Z,\alpha} = d_{Z,2\cdot|\angle(b,a)|}$
- $s_b \circ s_a \neq s_a \circ s_b$

Verkettungen von Achsenspiegelungen sind *nicht kommutativ*!

Ausnahme: Für $a \perp b$ ist $s_b \circ s_a = s_a \circ s_b$.

- **Sind Verkettungen von Achsenspiegelungen assoziativ?**
  - Kann man bei Verkettungen von Achsenspiegelungen beliebig Klammern setzen?
  - Was bedeuten $s_c \circ (s_b \circ s_a)$, $(s_c \circ s_b) \circ s_a$ und $s_c \circ s_b \circ s_a$?
  - $$\begin{aligned}\big(s_c \circ (s_b \circ s_a)\big)(A) &= s_c\big((s_b \circ s_a)(A)\big)\\ &= s_c\Big(s_b\big(s_a(A)\big)\Big)\end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned}\big((s_c \circ s_b) \circ s_a\big)(A) &= (s_c \circ s_b)\big(s_a(A)\big)\\ &= s_c\Big(s_b\big(s_a(A)\big)\Big)\end{aligned}$$
  - $$(s_c \circ s_b \circ s_a)(A) = s_c\Big(s_b\big(s_a(A)\big)\Big)$$
  - Verkettungen von Achsenspiegelungen sind also assoziativ!
  - Dies lässt sich auch bildlich darstellen:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s_a"] \arrow[rrr, bend left=50, "(s_c \circ s_b) \circ s_a"] \arrow[rr, bend right, "s_b \circ s_a"'] \arrow[rrr, bend right=50, "s_c \circ (s_b \circ s_a)"'] & A' \arrow[r, "s_b"] \arrow[rr, bend left, "s_c \circ s_b"] & A'' \arrow[r, "s_c"] & A'''
\end{tikzcd}$$

Kapitel 1: Muster und Strukturen

1.3 Mit allem rechnen: Algebraische Strukturen

Mengen von Objekten und Operationen
Algebraische Strukturen

Definition 1.3.1

- Eine **binäre, innere Verknüpfung** $\circ$ weist jeweils zwei Elementen x und y einer Menge M eine Element z aus derselben Menge M zu:
$$x \circ y = z$$
- Eine binäre Operation kann man auch als Funktion auf der Menge $M \times M$ aller Paare (x, y) mit x und y aus M auffassen.
$$\circ : M \times M \to M, (x, y) \mapsto \circ\,(x, y)$$
- Eine Menge M zusammen mit einer Operation $\circ$ bezeichnet man auch als **algebraische Struktur** $(M, \circ)$.

Bemerkungen

- Es ist eine Konvention, dass man bei binären Operationen den Namen der Operation zwischen die Elemente schreibt:
$$a + b = c$$
- Ebenso könnte man sie als Funktion aufschreiben, dann stünde der Name der Operation vor den Elementen:
$$+(a, b) = c$$
- Binäre Operationen kann man als Verallgemeinerungen der sogenannten „unären Operationen“ verstehen, die nur einem Element aus M ein anderes Element aus M zuweisen, also dem, was Ihnen schon lange als „Funktionen“ vertraut ist.
$$f : M \to M, x \mapsto f(x)$$

Mögliche Eigenschaften algebraischer Strukturen

Eigenschaftskatalog

- Für jede Operation kann man fragen, welche Eigenschaften sie besitzt.
- Zu den möglichen Eigenschaften gehören die vom Operieren mit Zahlen vertrauten Eigenschaften.

Allgemeine Eigenschaften

- Kommutativität: $\forall_{a,b\in M}\ a\circ b=b\circ a$
- Assoziativität:
$$\forall_{a,b,c\in M}\ (a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$$

Eigenschaften spezieller Elemente

- Neutrale Elemente: $\forall_{a\in M}\ a\circ id=a$
- Involutorische Elemente: $a\circ a=id$

Vereinfachende Schreibweisen

- $a\circ b\circ c=(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ wenn das Assoziativgesetz gilt
- $a^n:=\underbrace{a\circ a\circ\cdots\circ a}_{n\text{ mal}}$

Bei mehreren Operationen

- Sind für eine Menge mehrere Operationen definiert, kann man untersuchen, ob diese Operationen auf bestimmte Weise miteinander verbunden sind.
- Distributivität:
$$\forall_{a,b,c\in M}\ (a*b)\circ c=(a\circ c)*(b\circ c)$$
- Binomische Formel:
$$\forall_{a,b\in M}\ (a*b)^2=(a*b)\circ(a*b)$$
$$=a^2*(a\circ b)*(b\circ a)*b^2$$