Jürgen Roth

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Modul 5a: Fachdidaktische Bereiche

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

Jürgen Roth

Kapitel 5: Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Didaktik der Zahlbereichserweiterungen

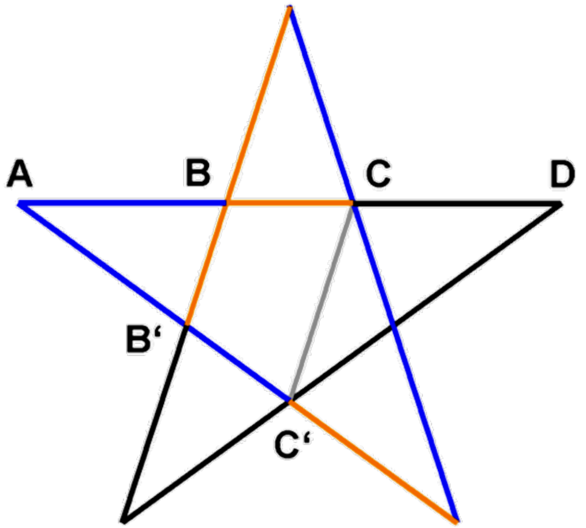
Kapitel 5: Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Kapitel 5: Reelle Zahlen ℝ

5.1 Warum reelle Zahlen?

Einführung reeller Zahlen

Kirsch, A. (1997). Mathematik wirklich verstehen. Köln: Aulis Verlag Deubner, S. 90



Inkommensurabilität

Einführung reeller Zahlen

- Lässt sich nicht aus praktischen Messaufgaben rechtfertigen.
- In realen Situationen (z. B. bei Messungen) treten irrationale Zahlen niemals direkt auf.

Entscheidung, ob eine Maßzahl/Gleichungslösung rational ist:

- Kann nicht experimentell-empirisch erfolgen.
- Kann nicht durch Ausrechnen mittels Computer erfolgen.
- Nur mit theoretischer Argumentation möglich.

Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen

- Eine theoretische zweckmäßige Erweiterung des Zahlbereichs.
- Sichert, dass für geometrische und algebraische Probleme anschaulich vorhandene Lösungen auch in der Theorie als wohlbestimmte Objekte existieren (z. B. Länge der Diagonalen eines Quadrats; Kreisumfang).

Kapitel 5: Reelle Zahlen ℝ

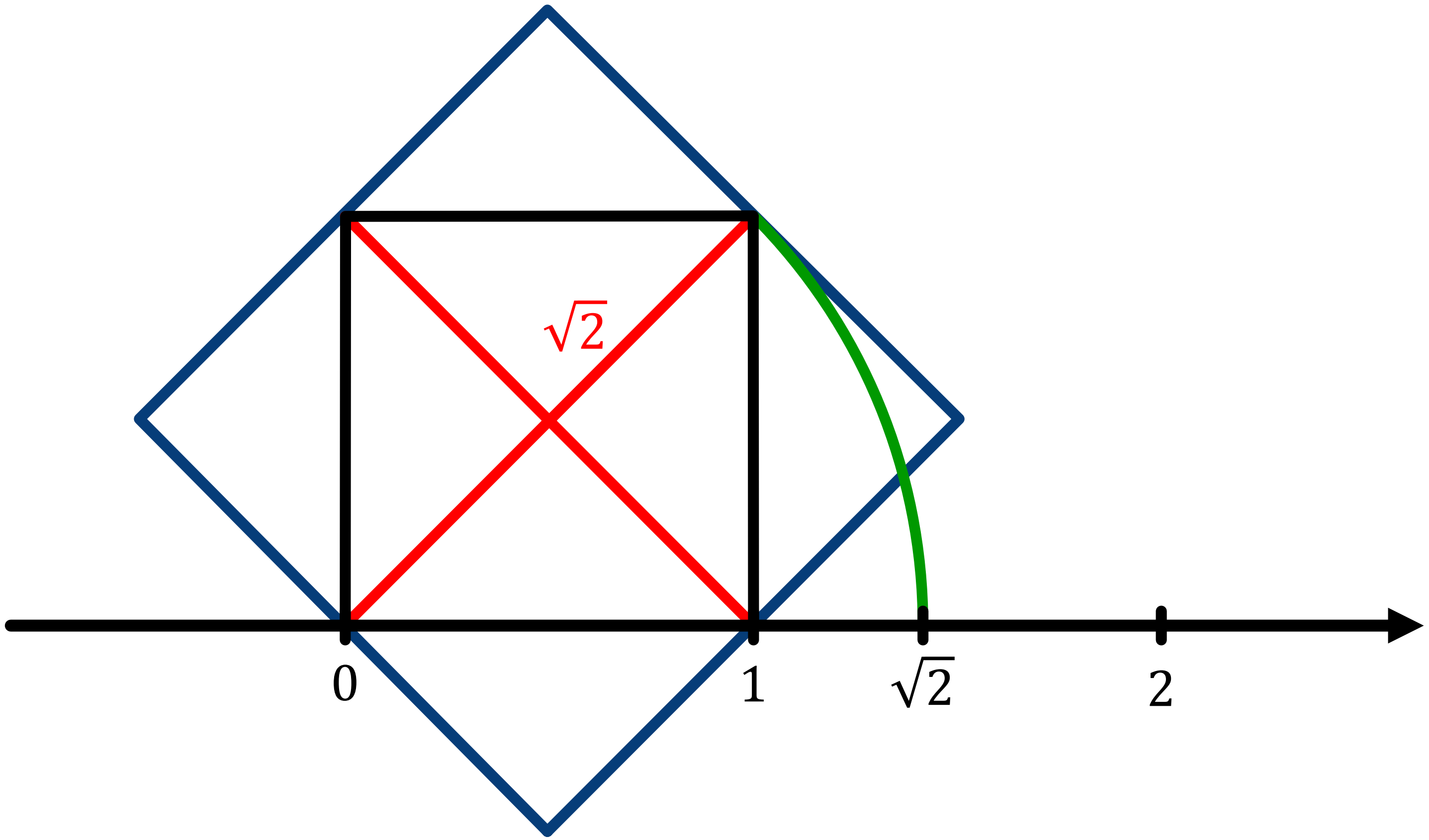
5.2 Gibt es irrationale Zahlen?

Reelle Zahlen

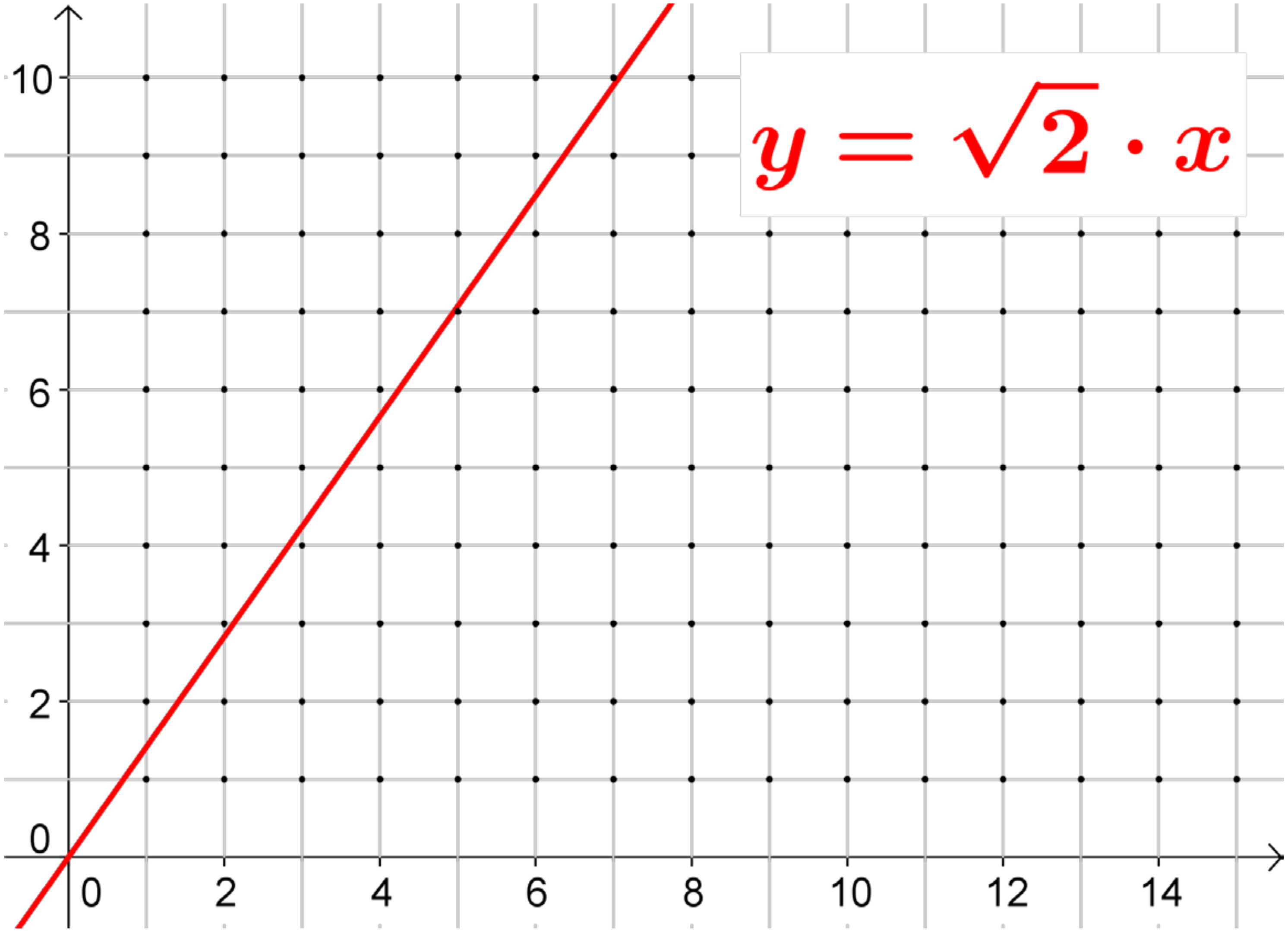
Kirsch, A. (1997). *Mathematik wirklich verstehen*. Köln: Aulis Verlag Deubner

Die reellen Zahlen entsprechen eineindeutig den sämtlichen Punkten der Zahlengeraden.

Arnold Kirsch



Irrationalität von $\sqrt{2}$



https://www.geogebra.org/m/ajsd7mnc

o. B. d. A. heißt „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.

Existenz irrationaler Zahlen

Definition

Eine reelle Zahl x heißt

- **rational**, wenn sie sich in der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt,
- andernfalls **irrational**.

Satz

- Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweis (Widerspruchsbeweis)

„Wenn $\overbrace{x^2 = 2}^{p(x)}$ ist, dann gilt für alle Lösungen x dieser Gleichung $\underbrace{x \notin \mathbb{Q}}_{q(x)}$.“

Annahme: $p(x) \wedge \neg q(x)$

Es gibt o.B.d.A. einen vollständig gekürzter Bruch $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ mit: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow m^2$ ist gerade.

$\Rightarrow m$ ist gerade.

$\Rightarrow m = 2 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m^2 = 4 \cdot k^2$

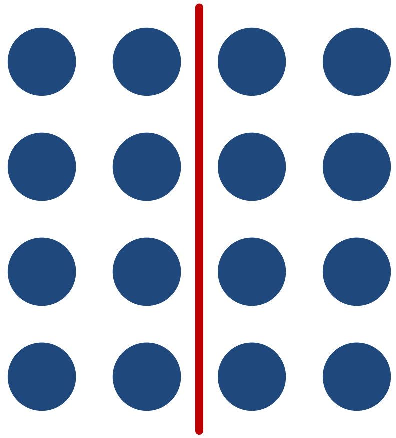
$\Rightarrow 4 \cdot k^2 = 2n^2$

$\Rightarrow 2 \cdot k^2 = n^2$

$\Rightarrow n^2$ ist gerade. $\Rightarrow n$ ist gerade.

$\Rightarrow \frac{m}{n}$ ist nicht vollständig gekürzt.

$\Rightarrow$ Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. $\blacksquare$



Spies (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. Mathematik lehren 208, S. 16-20

o. B. d. A. heißt „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.

Existenz irrationaler Zahlen

Definition

Eine reelle Zahl x heißt

- **rational**, wenn sie sich in der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt,
- andernfalls **irrational**.

Satz

- Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweis (Widerspruchsbeweis)

„Wenn $\overbrace{x^2 = 2}^{p(x)}$ ist, dann gilt für alle Lösungen x dieser Gleichung $\underbrace{x \notin \mathbb{Q}}_{q(x)}$.“

Annahme: $p(x) \wedge \neg q(x)$

Es gibt o.B.d.A. einen vollständig gekürzter Bruch $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ mit: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow\ m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow\ m \cdot m = 2 \cdot n \cdot n$

In der Primfaktorzerlegung von $m \cdot m$ tritt die Zahl 2 in einer geraden Anzahl auf, in der von $2 \cdot n \cdot n$ tritt die Zahl 2 dagegen in einer ungeraden Anzahl auf.

Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung!

$\Rightarrow$ Es kann keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ geben.

■

Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

- **Beweis**
  - Annahme:
    Es gibt natürliche Zahlen mit mehreren unterschiedlichen Zerlegungen. Dann gibt es darunter eine kleinste Zahl n.
  - n kann keine Primzahl sein (Warum?).
  - Zwei Zerlegungen von n können keinen gemeinsamen Primfaktor p enthalten, da dann auch $\frac{n}{p}$ zwei verschiedene Zerlegungen hätte und kleiner als n wäre.

    Widerspruch zu „n ist minimal".

- Es gilt also:
  $n = p \cdot a = q \cdot b$
  mit $p, q \in \mathbb{P} \wedge p \neq q \wedge a \neq b$
- Das letzte Argument ist das

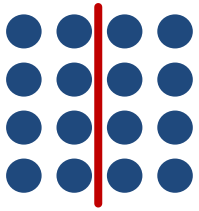
  Lemma von Euklid: Teilt eine Primzahl ein Produkt, so auch mindestens einen der Faktoren.
  $$p|(a \cdot b) \;\Rightarrow\; p|a \vee p|b$$
- Da n durch p teilbar ist, muss einer der Faktoren der anderen Zerlegung durch p teilbar sein und das ist b, denn q ist prim.
- Also taucht ein beliebiger Primfaktor stets in beiden Zerlegungen auf und damit sind sie identisch. ■

Ein Kriminalfall – Reihenfolge?

- Der Routenplaner liefert uns die Information, dass man für die Strecke zwischen München und Frankfurt auch ohne Verkehr knapp 4 Stunden benötigt.
- Wir nehmen mal an, der Verdächtige ist der Täter.
- Dann müssen wir also zu dem Schluss kommen, dass der Verdächtige in der fraglichen Nacht an zwei Orten gleichzeitig hätte sein müssen, wenn unsere Annahme zuträfe ...
- Nun gibt es aber glaubhafte Belege dafür, dass er erst um 23.00 Uhr die Spätschicht in München beendet hat.
- Dann hätte er in der Zeit zwischen 1 und 2 Uhr nachts am Tatort in Frankfurt sein müssen.
- Damit ist unsere Annahme zu einem (sofort einsichtigen) Widerspruch geführt und ihr Gegenteil (der Verdächtige war nicht der Täter) belegt. Machen wir uns also erneut auf die Suche.
- Also hätte der Verdächtige spätestens um 22 Uhr in München losfahren müssen und wäre um ca. 23.00 Uhr in Ingolstadt gewesen.

Spies (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. Mathematik lehren 208, S. 16-20

Dialog zweier Mathematiker – Reihenfolge?



- Eine Quadratzahl genau dann gerade, wenn ihre Wurzel ebenfalls gerade ist. Das sieht man z.B. so:
- Wir nehmen einmal an, $\sqrt{2}$ ist rational. (Ein Motiv gäbe es, schließlich kann man den Wert auf der Zahlengeraden abtragen.)
- Wenn die Annahme zuträfe, wäre die natürliche Zahl n ungerade und gerade zugleich.
- Wenn m gerade ist, ist die Hälfte von m wieder eine natürliche Zahl, zum Beispiel p $(m = 2 \cdot p)$. Also gilt $2 \cdot n^2 = (2p)^2$ und damit $n^2 = 2 \cdot p^2$. Das bedeutet aber, dass n^2 und damit n gerade Zahlen sein müssen.
- Dann müsste man die Zahl als vollständig gekürzten Bruch darstellen können ($\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit natürlichen Zahlen m und n). Quadrieren dieser Darstellung ergäbe $2 \cdot n^2 = m^2$, was zeigt, dass m^2 eine gerade Zahl sein muss.
- Dies ist ein offensichtlicher Widerspruch und damit ist die Annahme falsch. $\sqrt{2}$ ist also nicht rational und damit irrational.
- Also ist m eine gerade Zahl und damit muss n ungerade sein, da sonst $\frac{m}{n}$ kürzbar wäre.

Spies (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. Mathematik lehren 208, S. 16-20

Widerspruchsbeweis ↔ Kriminalfall

	Unschuldsnachweis	Der Fall $\sqrt{2}$	Reflexionsfragen
①	Wir nehmen einmal an, der Täter ist der Verdächtige.	Wir nehmen einmal an, $\sqrt{2}$ ist rational. (Ein Motiv gäbe es, schließlich kann man den wert auf der Zahlengeraden abtragen.)	Wie lautet die zu zeigende Behauptung? Was ist ihr logisches Gegenteil, das ich als Annahme formulieren muss?
②	Dann hätte er in der Zeit zwischen 1 und 2 Uhr nachts am Tatort in Frankfurt sein müssen.	Dann müsste man die Zahl als vollständig gekürzten Bruch darstellen können ($\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit natürlichen Zahlen m und n). Quadrieren dieser Darstellung ergäbe $2 \cdot n^2 = m^2$, was zeigt, dass m^2 eine gerade Zahl sein muss.	Was kann man aus der Startannahme (relativ) unmittelbar folgern?
③	Ein Routenplaner liefert die Information, dass man für die Strecke zwischen München und Frankfurt auch ohne Verkehr knapp 4 Stunden benötigt.	Aus der Betrachtung gerader und ungerader Zahlen ergibt sich die zusätzliche allgemeine Information (z.B. über figurierte Zahlen), dass eine Quadratzahl genau dann gerade ist, wenn ihre Wurzel es ebenfalls ist.	Welche weiteren Informationen (Hilfssätze) kann ich hinzuziehen? Warum können diese Hilfssätze als wahre Aussagen gelten?

Spies (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. Mathematik lehren 208, S. 16-20

Widerspruchsbeweis ↔ Kriminalfall

	Unschuldsnachweis	Der Fall $\sqrt{2}$	Reflexionsfragen
④	Also hätte der Verdächtige spätestens um 22 Uhr in München losfahren müssen und wäre um ca. 23:00 Uhr in Ingolstadt gewesen.	Also ist m eine gerade Zahl und damit muss n ungerade sein, da sonst $\frac{m}{n}$ noch weiter kürzbar wäre.	Was folgt mithilfe der herangezogenen Informationen für den konkreten Fall? (Wenn hier bereits ein Widerspruch entsteht, ist der Beweis erbracht.)
⑤	Nun gibt es aber glaubhafte Belege dafür, dass er erst um 23:00 Uhr die Spätschicht in München beendet hat.	Wenn m gerade ist, ist die Hälfte von m wieder eine natürliche Zahl, z. B. p $(m = 2 \cdot p)$. Also gilt $2 \cdot n^2 = (2p)^2$ und damit $n^2 = 2 \cdot p^2$. Das bedeutet aber, dass n^2 und damit n gerade Zahlen sein müssen.	Gibt es weitere Informationen oder Folgerungen aus der Startannahme, die noch hinzugezogen werden können? Passen die Folgerungen zu den vorherigen Ergebnissen?
⑥	Wenn die Annahme der Ermittler zuträfe, hätte der Verdächtige in der fraglichen Nacht an zwei Orten gleichzeitig sein müssen.	Wenn die Annahme zuträfe, wäre die natürliche Zahl n ungerade und gerade zugleich.	Wie kann man den auftretenden Widerspruch als solchen formulieren? Ist es wirklich ein Widerspruch? Schließen sich die Folgerungen logisch aus?

Spies (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. Mathematik lehren 208, S. 16-20

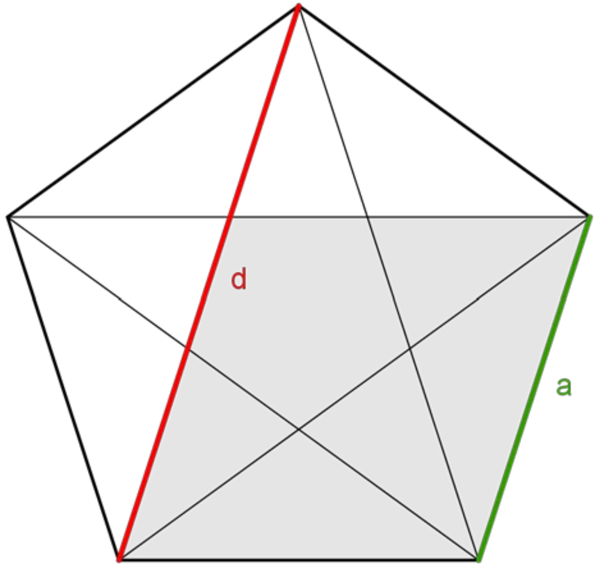
Widerspruchsbeweis ↔ Kriminalfall

	Unschuldsnachweis	Der Fall $\sqrt{2}$	Reflexionsfragen
7	Damit ist die Annahme zu einem (sofort einsichtigen) Widerspruch geführt und ihr Gegenteil (der verdächtige war nicht der Täter) belegt.	Dies ist ein offensichtlicher Widerspruch und damit ist die Annahme falsch. $\sqrt{2}$ ist also nicht rational und damit irrational.	Rückschau: Worin besteht der Widerspruch und welche Aussage wurde dadurch als falsch entlarvt? Was gilt damit für ihr Gegenteil? Ist das einleuchtend?

Spies (2018). Vom Widerspruch, zugleich gerade und ungerade zu sein. Mathematik lehren 208, S. 16-20

Pentagon

Es gibt kein gemeinsames Maß für die Diagonale d und die Seite a des regelmäßigen Fünfecks.



$d = 1 \cdot a + d_1$

$$d = 1 \cdot a + d_1$$
$$a = 1 \cdot d_1 + a_1$$

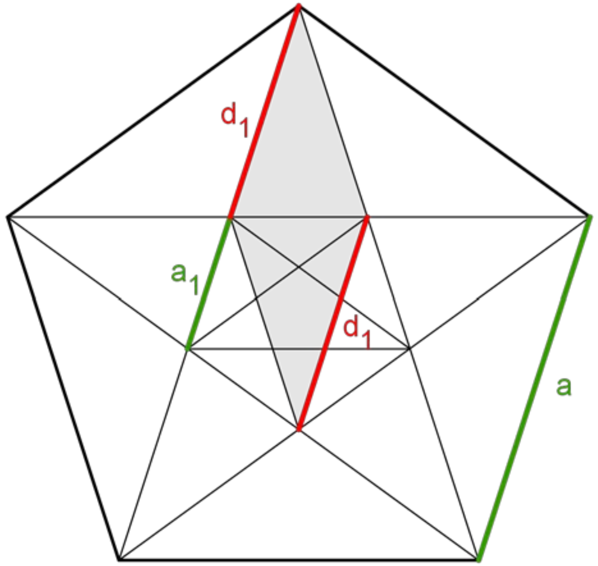
Im zweiten Fünfeck:

$$d_1 = 1 \cdot a_1 + d_2$$
$$a_1 = 1 \cdot d_2 + a_2$$

Im dritten Fünfeck:

$$d_2 = 1 \cdot a_2 + d_3$$
$$a_2 = 1 \cdot d_3 + a_3$$

…



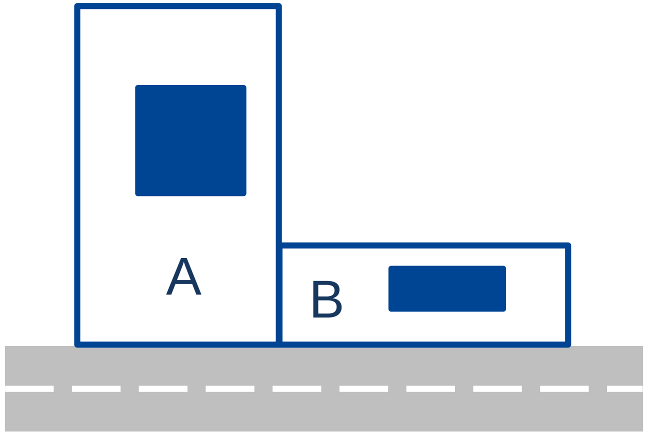
$a = 1 \cdot d_1 + a_1$

Wäre e ein gemeinsames Maß von d und a, dann auch für jedes Paar (d_n, a_n). Die Längen nehmen aber bei jedem Schritt um mehr als die Hälfte ab und werden damit sicher kleiner als jedes e.

Kapitel 5: Reelle Zahlen ℝ

5.3 Heron-Algorithmus zur Quadratwurzelberechnung

Heron-Verfahren (Wurzelberechnung)



- **Berechnungsgrundlage für Straßenreinigungsgebühren**
  - An die Straße grenzende Grundstückslänge (Frontmetermaßstab).
  - Der Eigentümer von Grundstück B muss mehr bezahlen als der von Grundstück A, obwohl Grundstück A größer ist.
  - Gemeinderat: Für ein größeres Grundstück mehr zahlen.

- **Lösung: Quadratwurzelmaßstab als Bemessungsgrundlage**
  - Straßenreinigungsgebühren werden aus der Seitenlänge eines zum Grundstück flächeninhaltsgleichen Quadrats berechnet.

- **Frage**
  - Wie findet man die Seitenlänge dieses Quadrats?

Heron-Verfahren (Quadratwurzelberechnung)

http://www.juergen-roth.de/excel/

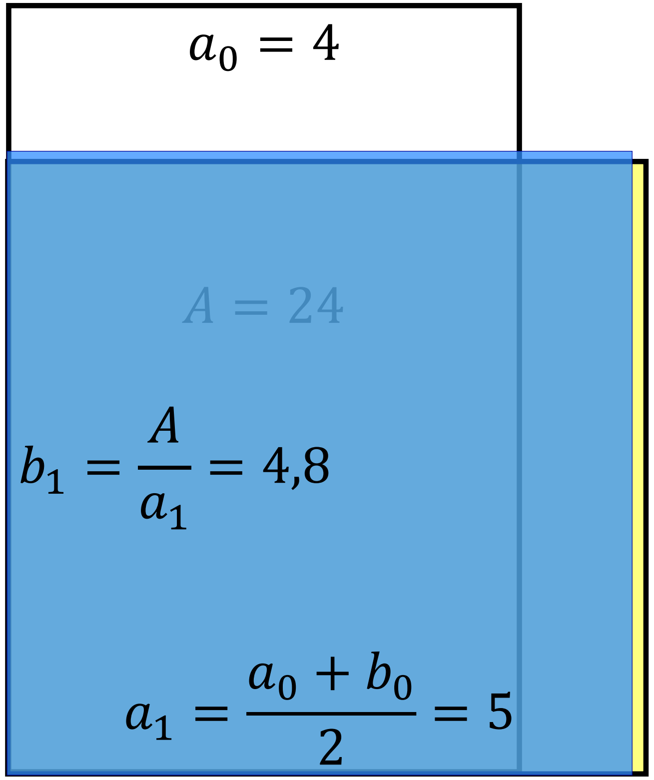
Gesucht: $\sqrt{A}$

Anfangswert: a_0

$$b_n = \frac{A}{a_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a_n + \frac{A}{a_n}}{2}$$

$$b_0 = \frac{A}{a_0} = \frac{24}{4} = 6$$



Heron-Verfahren

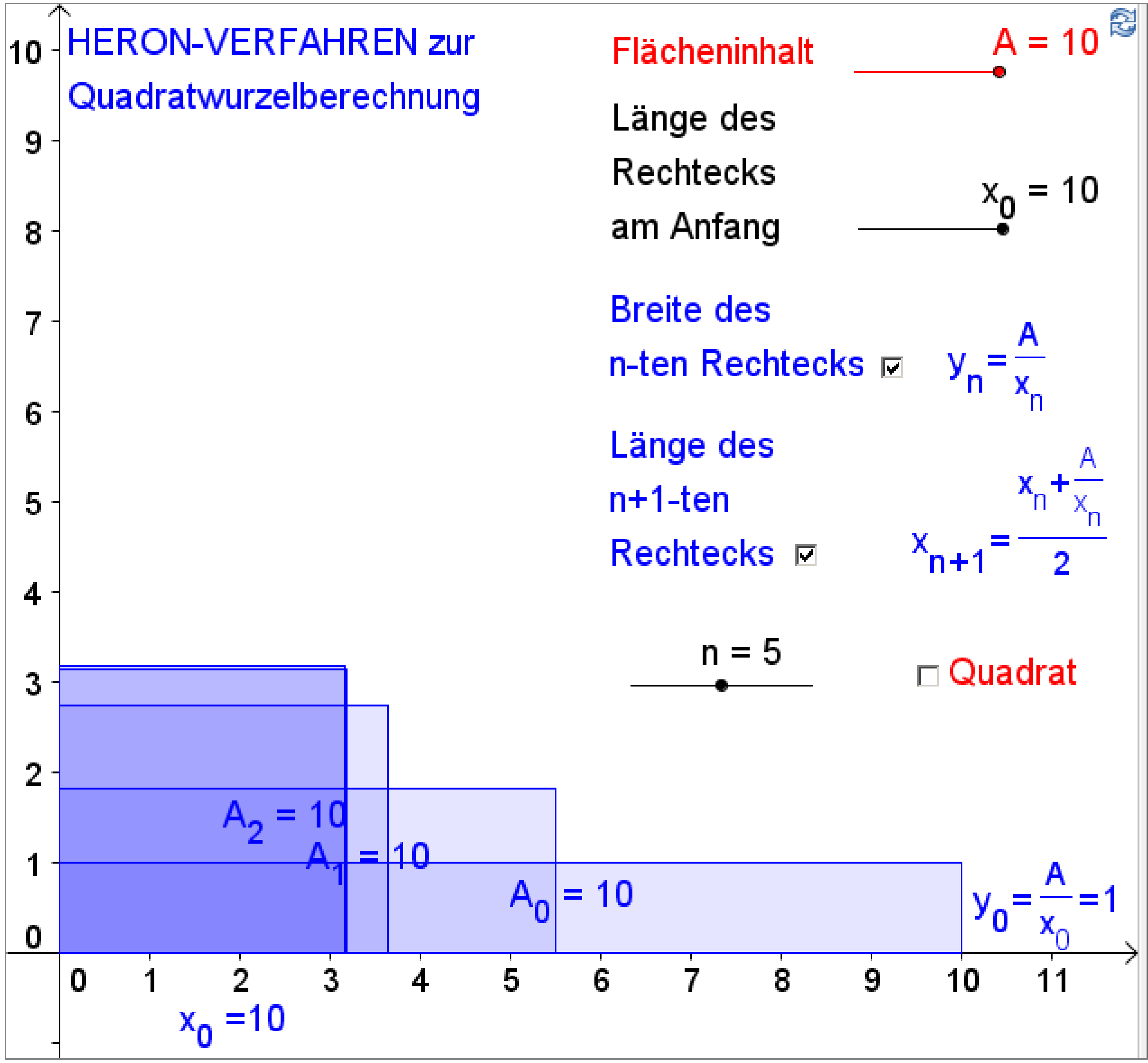
Berechnung der Seitenlänge eines Quadrates der Fläche A
bzw. Berechnung der Quadratwurzel von A (Näherungsverfahren!)

Fläche A	Wurzel aus A
66,00	8,1240384046

n	a	b = A / a	| a - b |
1	3,00	22,0000000000	19,0000000000
2	12,5000000000	5,2800000000	7,2200000000
3	8,8900000000	7,4240719910	1,4659280090
4	8,1570359955	8,0911742987	0,0658616968
5	8,1241051471	8,1239716627	0,0001334843
6	8,1240384049	8,1240384044	0,0000000005
7	8,1240384046	8,1240384046	0,0000000000

Schnell konvergierende Intervallschachtelung.

Heron-Verfahren (Quadratwurzelberechnung)



	A	B	C
1	n	x_n	y_n = A/x_n
2	0	10	1
3	1	5.5	1.8181818182
4	2	3.6590909091	2.7329192547
5	3	3.1960050819	3.1289061637
6	4	3.1624556228	3.1620997075
7	5	3.1622776652	3.1622776552
8	6	3.1622776602	3.1622776602
9	7	3.1622776602	3.1622776602
10	8	3.1622776602	3.1622776602
11	9	3.1622776602	3.1622776602
12	10	3.1622776602	3.1622776602
13			
14			
15			

http://www.juergen-roth.de/dynageo/heronverfahren/ • https://www.geogebra.org/m/e9vmcf5w