Jürgen Roth

Didaktik der Analysis

Modul 12a: Fachdidaktische Bereiche

Didaktik der Analysis

0 Organisatorisches

1 Ziele und Inhalte

2 Folgen und Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

3 Ableitungsbegriff

4 Integralbegriff

Danckwerts & Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag, S. 17-44
Büchter, A.; Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Didaktik der Analysis

Kapitel 2: Folgen und Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

Woher kamen die Folgen, was leisten sie und warum?

Danckwerts, Vogel (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag. S. 35-38

Beschreibung iterativer Prozesse

Beispiele:
- Diskrete Modellierung
- Heron-Verfahren

Ist $0,\overline{9} = 1$?

Komplementarität von Produkt- und Prozessorientierung

(Vgl. das Skript „Didaktik der Zahlbereichserweiterungen“, Kapitel 5: Reelle Zahlen $\mathbb{R}$)

Folgen und Konvergenz

Intervallschachtel-lungssatz & Archimedisches Axiom

$\Leftrightarrow$

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$
Grundvorstellung: Lückenlosigkeit der Zahlengeraden

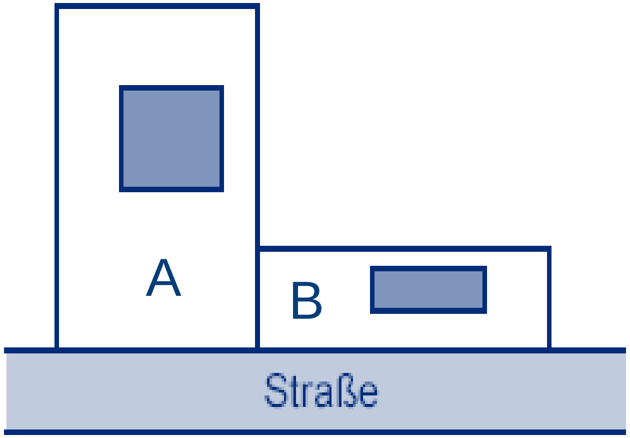
operative Fassung

Berechnungs- & Beweisinstrument

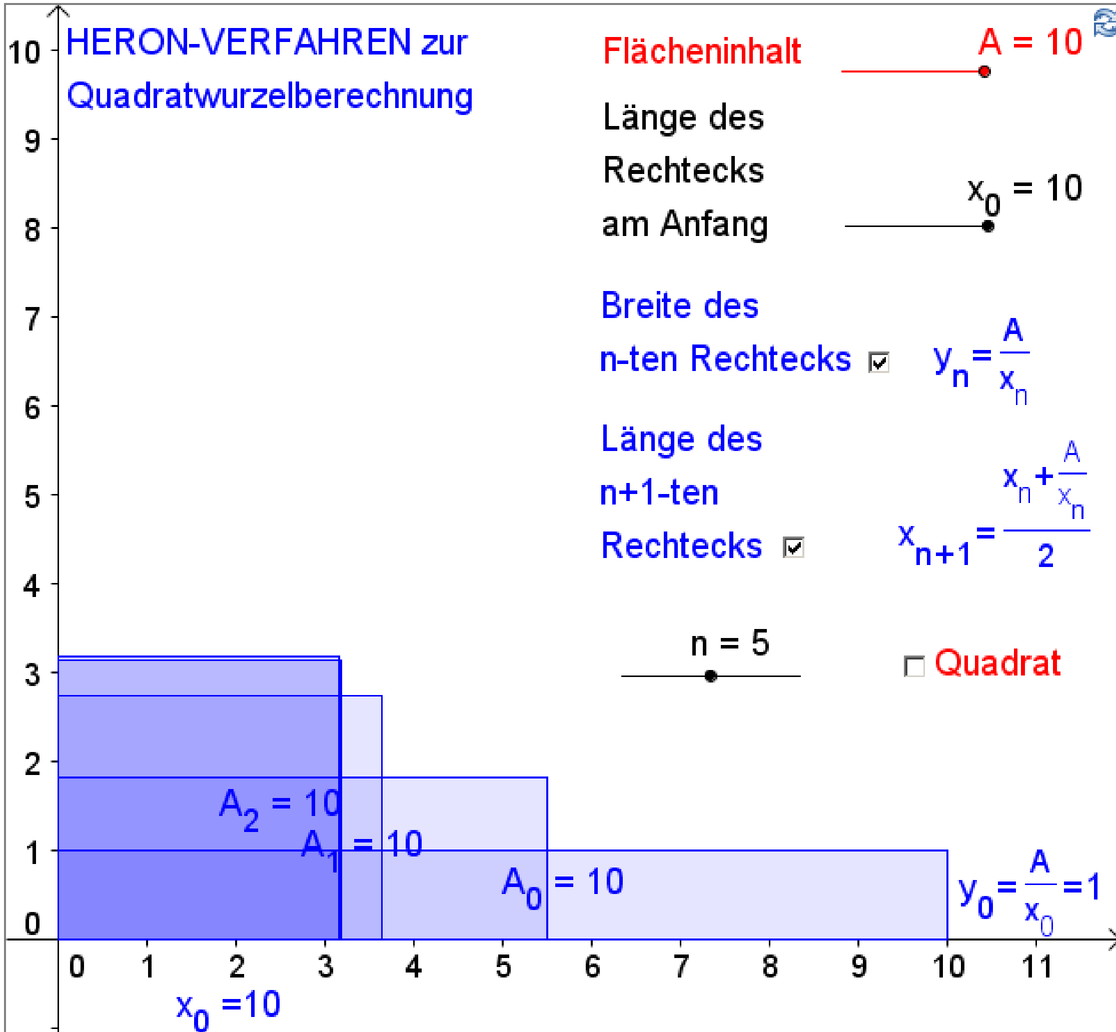
Beispiele:
- Approximation von $\sqrt{2}$
- Beweise: Zwischenwertsatz
  Monotoniekriterium

Heron-Verfahren (Wurzelberechnung)

- **Berechnungsgrundlage für Straßenreinigungsgebühren:**
  - An die Straße grenzende Grundstückslänge (**Frontmetermaßstab**).
  - Der Eigentümer von Grundstück B muss mehr bezahlen als der von Grundstück A, obwohl Grundstück A größer ist.
  - Gemeinderat: Für ein größeres Grundstück mehr zahlen.
- **Lösung: Quadratwurzelmaßstab als Bemessungsgrundlage**
  - Straßenreinigungsgebühren werden aus der Seitenlänge eines zum Grundstück flächeninhaltsgleichen Quadrats berechnet.
  - **Frage:** Wie findet man die Seitenlänge dieses Quadrats?



Heron-Verfahren (Wurzelberechnung)



	A	B	C
1	n	x_n	y_n = A/x_n
2	0	10	1
3	1	5.5	1.8181818182
4	2	3.6590909091	2.7329192547
5	3	3.1960050819	3.1289061637
6	4	3.1624556228	3.1620997075
7	5	3.1622776652	3.1622776552
8	6	3.1622776602	3.1622776602
9	7	3.1622776602	3.1622776602
10	8	3.1622776602	3.1622776602
11	9	3.1622776602	3.1622776602
12	10	3.1622776602	3.1622776602
13			
14			
15			

www.geogebra.org/u/roth • https://www.geogebra.org/m/e9vmcf5w

Heron-Verfahren (Wurzelberechnung)

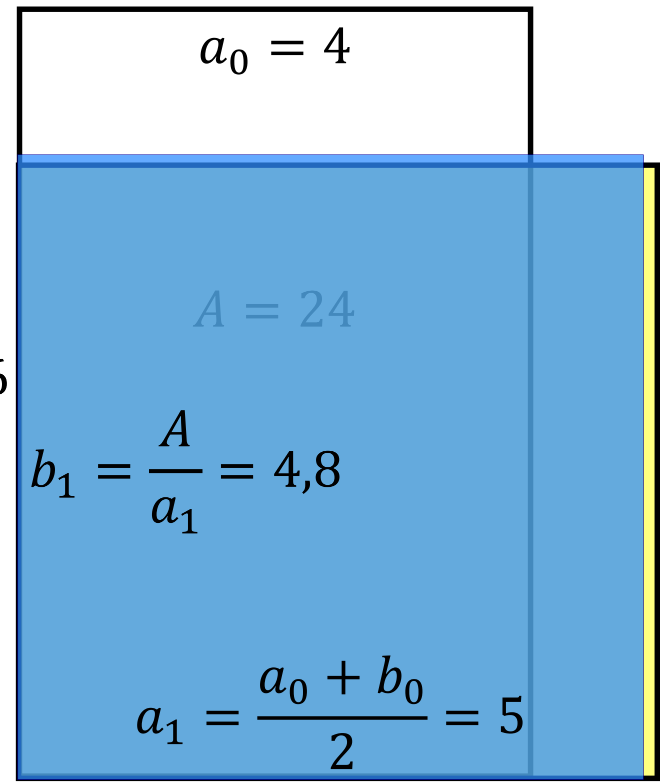
Gesucht: $\sqrt{A}$

Anfangswert: a_0

$$b_n = \frac{A}{a_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a_n + \frac{A}{a_n}}{2}$$

$$b_0 = \frac{A}{a_0} = \frac{24}{4} = 6$$



Heron-Verfahren

Berechnung der Seitenlänge eines Quadrates der Fläche A
bzw. Berechnung der Quadratwurzel von A (Näherungsverfahren!)

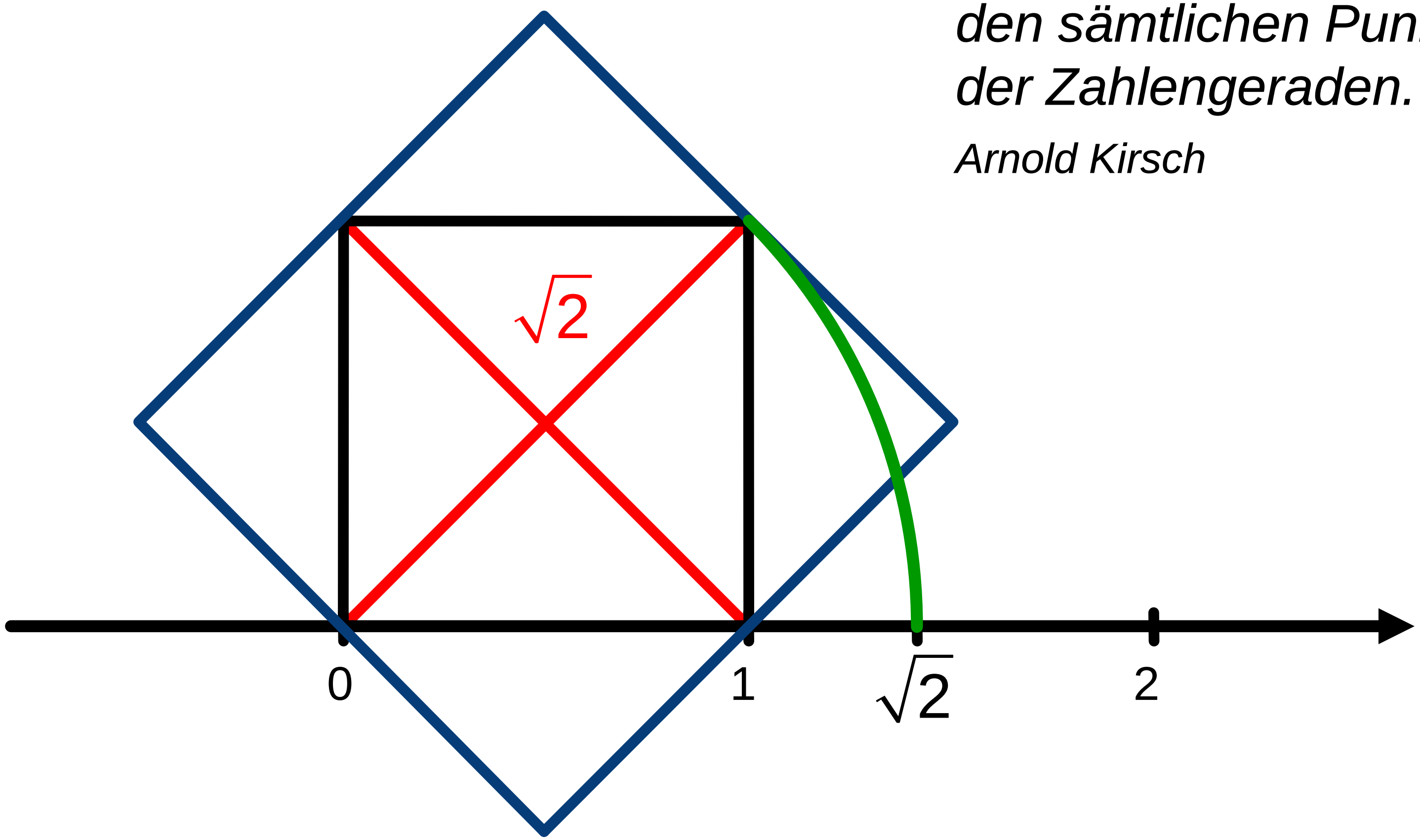
Fläche A	Wurzel aus A
66,00	8,1240384046

n	a	b = A / a	| a - b |
1	3,00	22,0000000000	19,0000000000
2	12,5000000000	5,2800000000	7,2200000000
3	8,8900000000	7,4240719910	1,4659280090
4	8,1570359955	8,0911742987	0,0658616968
5	8,1241051471	8,1239716627	0,0001334843
6	8,1240384049	8,1240384044	0,0000000005
7	8,1240384046	8,1240384046	0,0000000000

Schnell konvergierende Intervallschachtelung.

http://www.juergen-roth.de/excel/

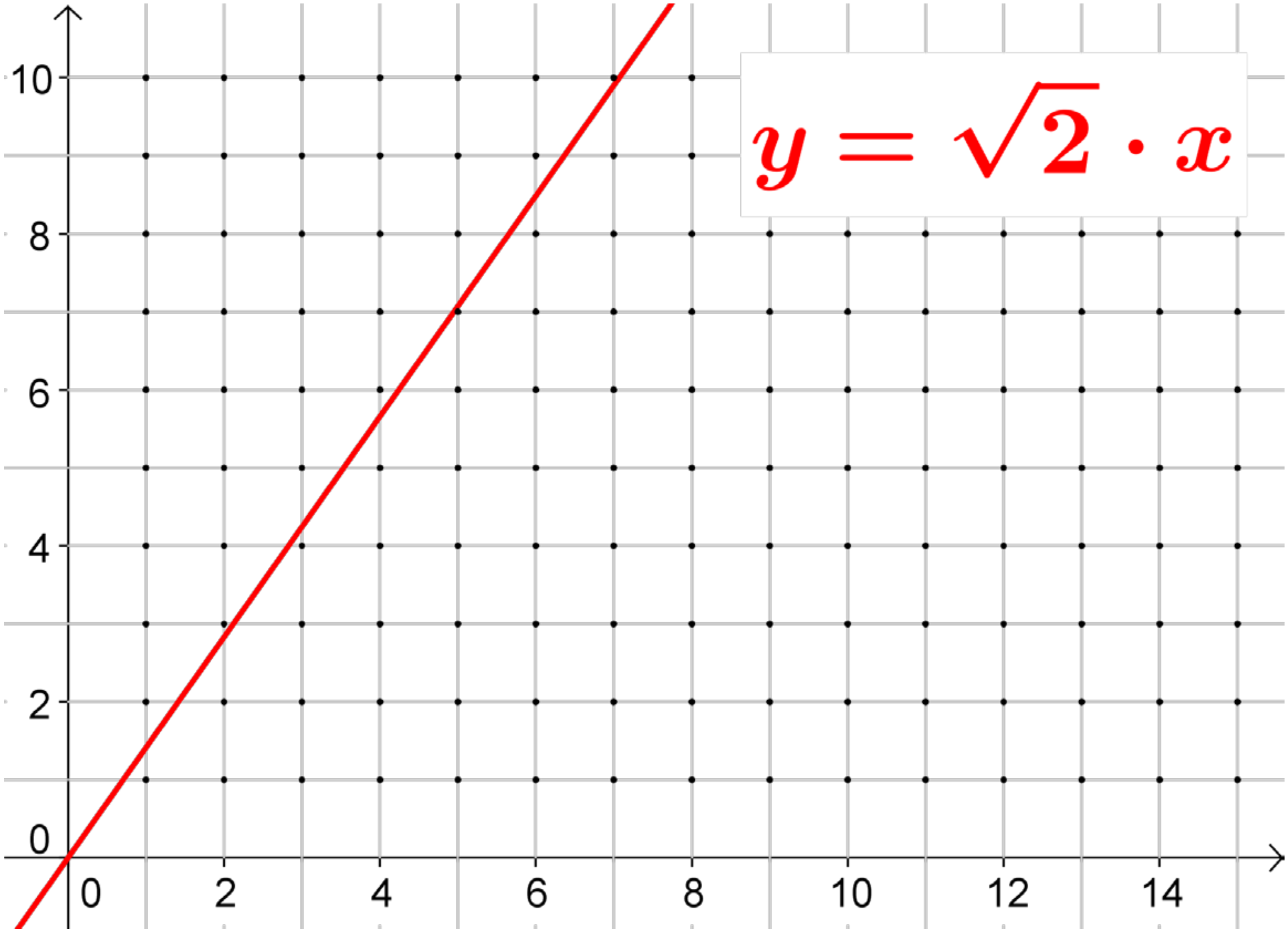
Reelle Zahlen



Die reellen Zahlen entsprechen eineindeutig den sämtlichen Punkten der Zahlengeraden.

Arnold Kirsch

Irrationalität von $\sqrt{2}$



www.geogebra.org/u/roth • https://www.geogebra.org/m/ajsd7mnc

o. B. d. A. heißt „ohne Beschränkung der Allgemeinheit".

Existenz irrationaler Zahlen

Definition

Eine reelle Zahl x heißt

- **rational**, wenn sie sich in der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt,
- andernfalls **irrational**.

Satz

- Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweis (Widerspruchsbeweis)

„Wenn $x^2 = 2$ ist, dann gilt für alle Lösungen x dieser Gleichung $x \notin \mathbb{Q}$."

Annahme: $p(x) \wedge \neg q(x)$

$\Rightarrow$ Es gibt o. B. d. A. einen Bruch $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ für den gilt:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

$\Rightarrow$ $m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow$ $m \cdot m = 2 \cdot n \cdot n$

In der Primfaktorzerlegung von $m \cdot m$ tritt die Zahl 2 in einer geraden Anzahl auf, in der von $2 \cdot n \cdot n$ tritt die Zahl 2 dagegen in einer ungeraden Anzahl auf.

Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung!

$\Rightarrow$ Es kann keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ geben.

■

Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

Beweis

- Annahme: Es gibt natürliche Zahlen mit mehreren unterschiedlichen Zerlegungen.
- Dann gibt es darunter eine kleinste Zahl n.
- n kann keine Primzahl sein (Warum?).
- Zwei Zerlegungen von n können keinen gemeinsamen Primfaktor p enthalten, da dann auch $\frac{n}{p}$ zwei verschiedene Zerlegungen hätte und kleiner als n wäre.

Widerspruch zu n ist minimal.

- Es gilt also:
  $n = p \cdot a = q \cdot b$
  mit $p, q \in \mathbb{P} \wedge p \neq q \wedge a \neq b$
- Das letzte Argument ist das **Lemma von Euklid:** Teilt eine Primzahl ein Produkt, so auch mindestens einen der Faktoren. $p|(a \cdot b) \Rightarrow p|a \vee p|b$.
- Da n durch p teilbar ist, muss einer der Faktoren der anderen Zerlegung durch p teilbar sein und das ist b, denn q ist prim.
- Also taucht ein beliebiger Primfaktor stets in beiden Zerlegungen auf und damit sind sie identisch. ■

o. B. d. A. heißt „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.

Existenz irrationaler Zahlen

Definition

Eine reelle Zahl x heißt

- **rational**, wenn sie sich in der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt,
- andernfalls **irrational**.

Satz

- Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Beweis (Widerspruchsbeweis)

„Wenn $x^2 = 2$ ist, dann gilt für alle Lösungen x dieser Gleichung $x \notin \mathbb{Q}$.“

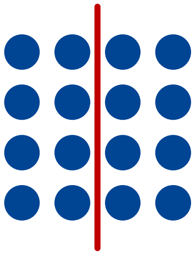
Annahme: $p(x) \wedge \neg q(x)$

Es gibt o.B.d.A. einen vollständig gekürzter Bruch $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ mit:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

$\Rightarrow \; m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow \; m^2$ ist gerade.



$\Rightarrow \; m$ ist gerade.

$\Rightarrow \; m = 2 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \; m^2 = 4 \cdot k^2$

$\Rightarrow \; 4 \cdot k^2 = 2n^2$

$\Rightarrow \; 2 \cdot k^2 = n^2$

$\Rightarrow \; n^2$ ist gerade. $\Rightarrow n$ ist gerade.

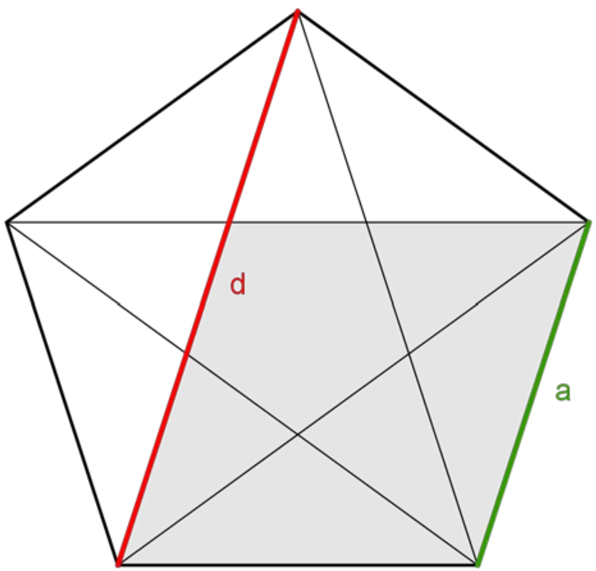
$\Rightarrow \; \frac{m}{n}$ ist nicht vollständig gekürzt.

$\Rightarrow$ Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. ∎

Inkommensurabilität

Pentagon

- Es gibt kein gemeinsames Maß für die Diagonale d und die Seite a des regelmäßigen Fünfecks.



$d = 1 \cdot a + d_1$

$$d = 1 \cdot a + d_1$$
$$a = 1 \cdot d_1 + a_1$$

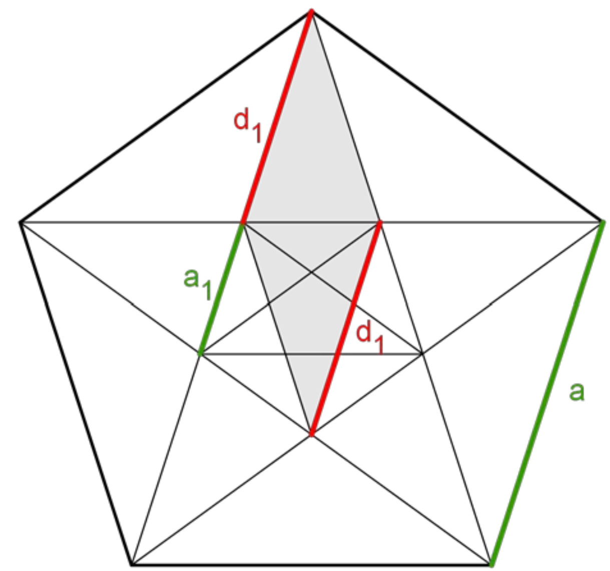
Im zweiten Fünfeck:

$$d_1 = 1 \cdot a_1 + d_2$$
$$a_1 = 1 \cdot d_2 + a_2$$

Im dritten Fünfeck:

$$d_2 = 1 \cdot a_2 + d_3$$
$$a_2 = 1 \cdot d_3 + a_3$$

…



$a = 1 \cdot d_1 + a_1$

- Wäre e ein gemeinsames Maß von d und a, dann auch für jedes Paar (d_n, a_n). Die Längen nehmen aber bei jedem Schritt um mehr als die Hälfte ab und werden damit sicher kleiner als jedes e.

Definitionen

Definition

- Eine **Folge** ist eine Funktion, die jedem Element der Menge der natürlichen Zahlen genau ein Element der Menge der reellen Zahlen zuordnet.

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$$

Definition

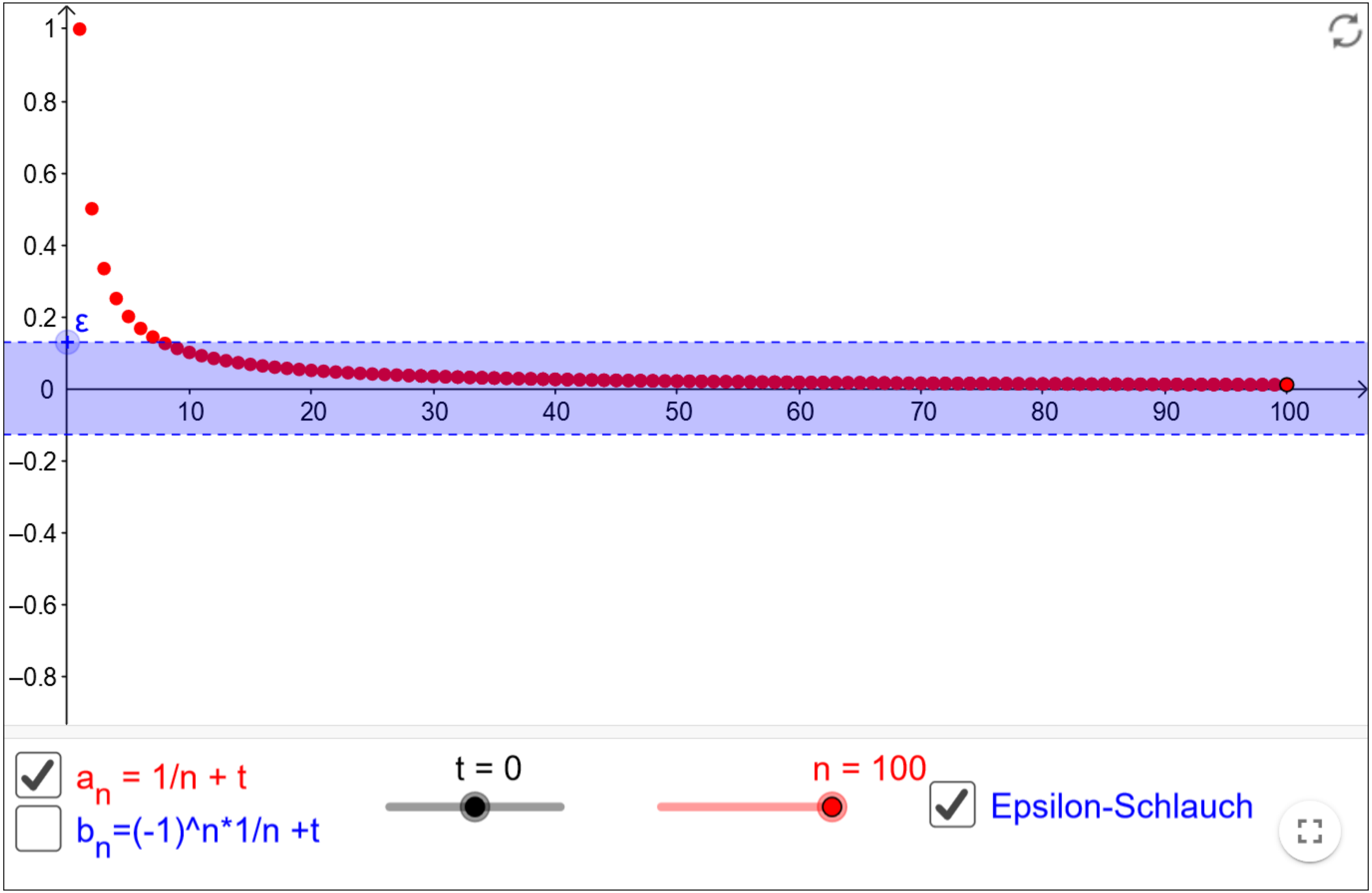
- Eine **Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** gegen a, wenn es zu jeder Toleranz $\varepsilon > 0$ eine Nummer n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

- a heißt dann **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und man schreibt:

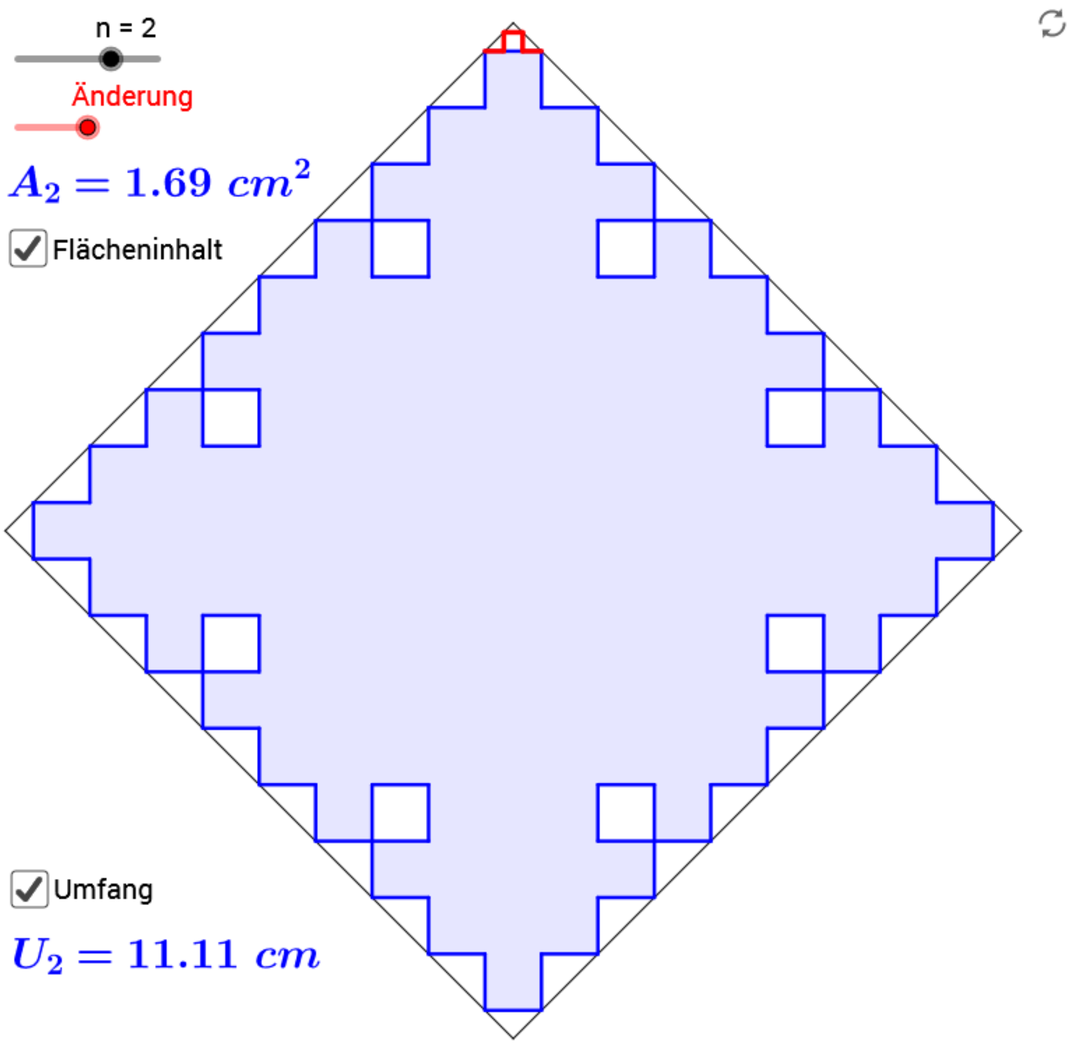
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und ε-Schlauch



www.geogebra.org/u/roth • https://www.geogebra.org/m/MvEb6A8q

Konvergente und divergente Folgen



www.geogebra.org/u/roth • https://www.geogebra.org/m/KDNTkKaX

Verbalisierungen für Grenzprozesse

- **Konvergenz der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$**

Sprechweisen

(1) „$\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 beliebig nahe."

(2) „$\frac{1}{n}$ strebt gegen 0 für n gegen ∞."

(3) „$\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 immer näher."

(4) „$\frac{1}{n}$ kommt der 0 immer näher ohne sie jemals zu erreichen."

- Verbale Vereinfachung ↔ Verfälschung

Welche davon sind geeignet?

(1) Ohne Einschränkung geeignet.

(2) Ohne Einschränkung geeignet.

(3) Problematisch! $\frac{1}{n}$ kommt auch der -1 immer näher, aber nicht *beliebig nahe* (vgl. (1))!

(4) Grenze zur inhaltlichen Verfälschung deutlich überschritten! Auch konstante Folgen sind konvergent!

Intervallschachtelungen

Intervallschachtelungssatz

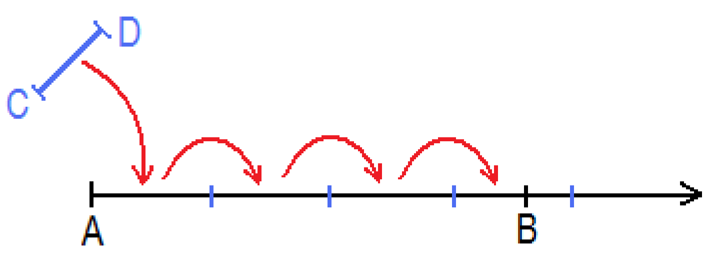
Zu jeder Intervallschachtelung

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

(wobei $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und die Intervall-länge $b_n - a_n$ beliebig klein wird) gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen enthalten ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also: $a_n \leq x \leq b_n$

Archimedisches Axiom

Zu je zwei Größen $y > x > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$.



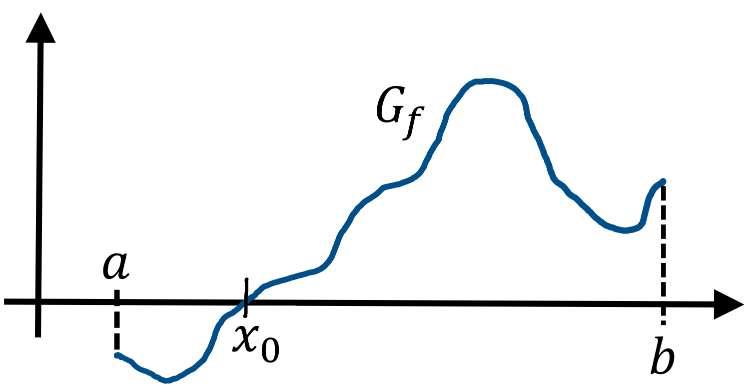
Bemerkungen

- Die Eigenschaft, dass keine Intervallschachtelung auf der Zahlengeraden ins Leere trifft, präzisiert die Vorstellung von der Lückenlosigkeit.
- Die Intervallschachtelung greift auf die Folgen der Intervall-grenzen zurück und wird zum Werkzeug zur näherungsweisen Berechnung „neuer" reeller Zahlen.
- Wird bereits in der Sek. I zu Umfangs, Flächeninhalts- und Volumenberechnung genutzt.

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist notwendig!

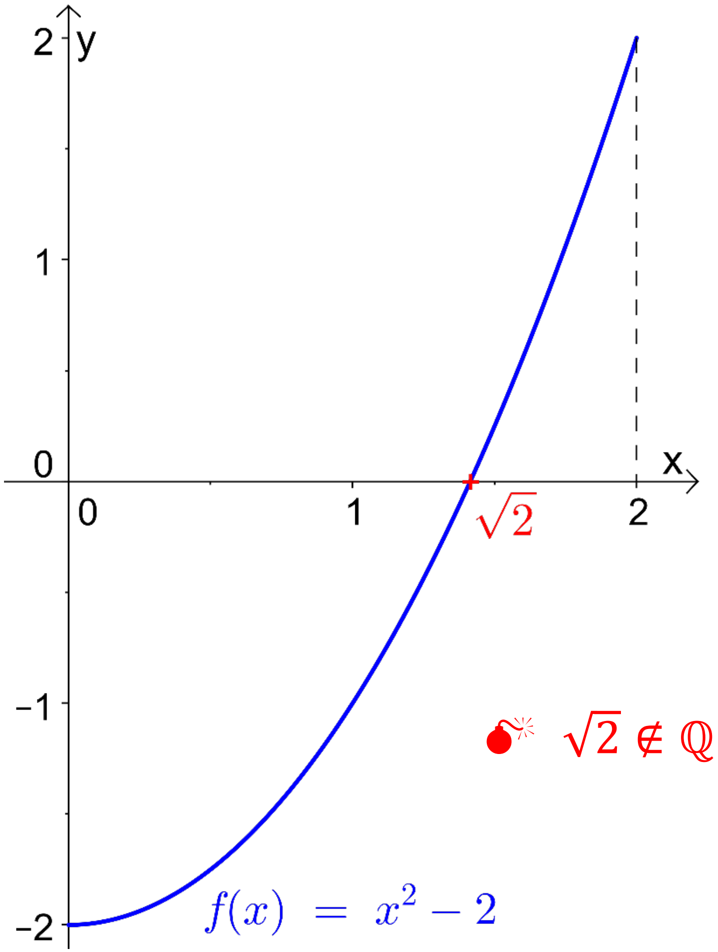
Zwischenwertsatz

- Wechselt eine in einem Intervall stetige Funktion ihr Vorzeichen, dann hat sie dort mindestens eine Nullstelle.
- Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$ dann gibt es mindestens ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = 0$.



Beispiel: $I = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \le x \le 2\}$

- $f\colon [0;2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2$



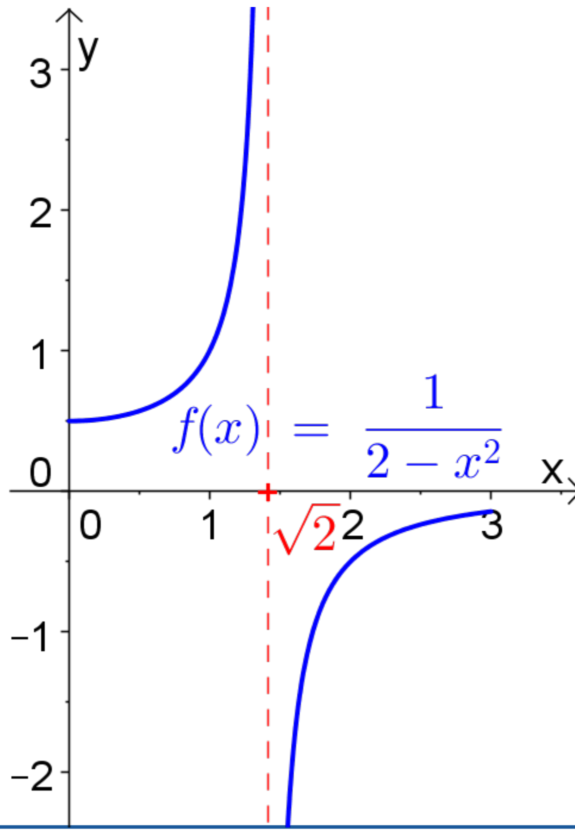
Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist notwendig!

Monotoniekriterium

- Eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion mit überall positiver Ableitung ist dort streng monoton wachsend.
- Ist $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ differnzierbar und $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann folgt für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$, dass gilt:
  $f(x_1) < f(x_2)$

Beispiel: $I = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 3\}$

- $f: I \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \frac{1}{2-x^2}$
- $f'(x) = \frac{2x}{(2-x^2)^2} > 0$



Strenge Monotonie verletzt!