

Jürgen Roth

Didaktik der Algebra

Modul 5



Didaktik der Algebra

- 1 Ziele und Inhalte
- 2 Terme
- 3 Funktionen
- 4 Gleichungen



Didaktik der Algebra

Kapitel 4: Gleichungen



Kapitel 4: Gleichungen

- 4.1 Aspekte beim Umgang mit Gleichungen
- 4.2 Methoden zur Lösung von Gleichungen
- 4.3 Lineare Gleichungssysteme
mit zwei Variablen
- 4.4 Gleichungen in der Sekundarstufe I



Kapitel 4: Gleichungen

4.1 Aspekte beim Umgang mit Gleichungen

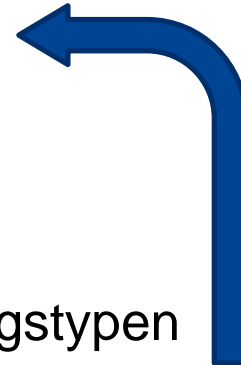
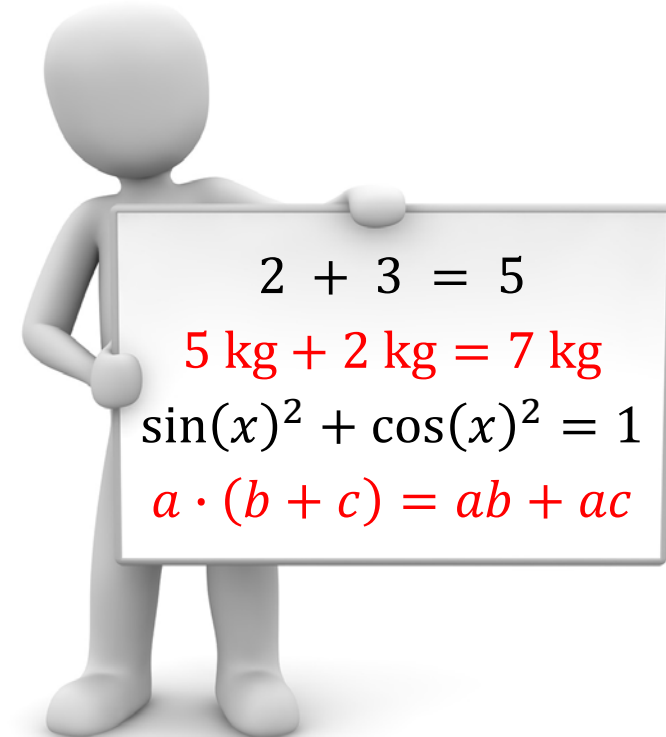


▶ Gleichungen als Werkzeuge

- ▶ zum Formulieren von Beziehungen zwischen mathematischen Objekten (z. B. Zahlen, Größen, Funktionen),
- ▶ zum Ausdrücken von Eigenschaften,
- ▶ zum Formulieren und Lösen von Problemen.

▶ Gleichungen als Objekte

- ▶ Untersuchung von Gleichungstypen
 - ▶ Existenz und Bestimmung von Lösungen
- ▶ Logik
 - ▶ Gleichungen ohne Variable → Aussagen
 - ▶ Gleichungen mit Variablen → Aussageformen



► **Begriffe werden benötigt, um**

- ▷ über Gleichungen reden,
- ▷ Regeln formulieren und
- ▷ Ergebnisse interpretieren zu können.

► **Beschreibung von Gleichungen:**

- ▷ Variable
- ▷ Term
- ▷ Gleichung
- ▷ Aussage
 - Formulierung, die entweder wahr oder falsch ist.
- ▷ Aussageform
 - Formulierung, die beim Einsetzen eine Aussage ergibt.



Aussagen

$$2 + 3 = 5 \quad (\text{wahr})$$

$$2 + 3 = 6 \quad (\text{falsch})$$



Aussageformen in \mathbb{R}

$$2 + x = 5 \quad (\text{erfüllbar})$$

$$x + x = 2x \quad (\text{allgemeingültig})$$

$$x + 1 = x + 2 \quad (\text{unerfüllbar})$$

► Beschreibung von Lösungen

- ▷ Grundmenge \mathbb{G} Vorrat für Einsetzungen.
- ▷ Lösung Element der Grundmenge, das beim Einsetzen zu einer wahren Aussage führt.
- ▷ Lösungsmenge \mathbb{L} Menge aller Lösungen.

► Beschreibung des Lösungsverhaltens

(bzgl. einer bestimmten Grundmenge \mathbb{G} !)

- ▷ erfüllbare Aussageform $\mathbb{L} \neq \{\}$
- ▷ unerfüllbare Aussageform $\mathbb{L} = \{\}$
- ▷ allgemeingültige Aussageform $\mathbb{L} = \mathbb{G}$

Gewinnumformung

Probe!

$$\sqrt{x+1} = x-1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{3\}$$

$$\sqrt{x+1} = x-1 \quad |^2$$

$$x+1 = x^2 - 2x + 1 \quad | - (x+1)$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x \cdot (x-3) = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{0; 3\}$$

► Beschreibung von Umformungsarten

- ▷ Äquivalenzumformung (z. B. $|+2$, $|-3$, $|\cdot 4$, $|\div 5$)
- ▷ Gewinnumformung (z. B. $|^2$, $|\cdot x$)
- ▷ Verlustumformung (z. B. $|\sqrt{\quad}$, $|\div x$)

Verlustumformung

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{-2; 0\}$$

$$x^2 + 2x = 0 \quad | \div x$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{-2\}$$

▶ Gleichungen vernetzt lernen

- ▷ Gleichungen *nicht* isoliert behandeln
- ▷ Einbinden in zentrale Themen wie Zahlen, Funktionen, Größen Geometrie und Sachbezüge

▶ Einsichtig mit Gleichungen umgehen

- ▷ Überbetonung des Übens führt leicht zu mechanischem Umformen ohne Einsicht.
- ▷ Deshalb: Umformungen begründen und Lösungen kritisch kontrollieren (lassen)

▶ Näherungslösungen für Gleichungen akzeptieren

- ▷ Für alle praktischen Zwecke ausreichend genau
- ▷ Auch bei sehr komplizierten Gleichungen anwendbar
- ▷ Die Regel bei Problemlösungen in Wirtschaft und Technik



Kapitel 4: Gleichungen

4.2 Methoden zur Lösung von Gleichungen



$$\sin(x) = 3^x$$

$$4x + 2 = x + 11$$

$$2^x = x^2$$

$$2x^2 + 3x + 5 = 0$$

- ▶ Lösungsstrategien für einfache Gleichungen
- ▶ Streifenmethode
- ▶ systematisches Probieren
- ▶ graphische Lösungsverfahren
- ▶ numerisch-iterative Lösungsverfahren
- ▶ Gegenoperatoren
- ▶ Äquivalenzumformungen
- ▶ Lösungsformeln anwenden

$$26 + x = 107$$

**Verwandte Gleichung mit
gleicher Struktur betrachten**

$$2 + x = 5$$

$$2 + 3 = 5$$

also

$$26 + 81 = 107$$

$$26 + x = 107$$

Zerlegung

$$26 + x = 26 + 81$$

also

$$x = 81$$

$$26 + x = 107$$

Umkehraufgabe

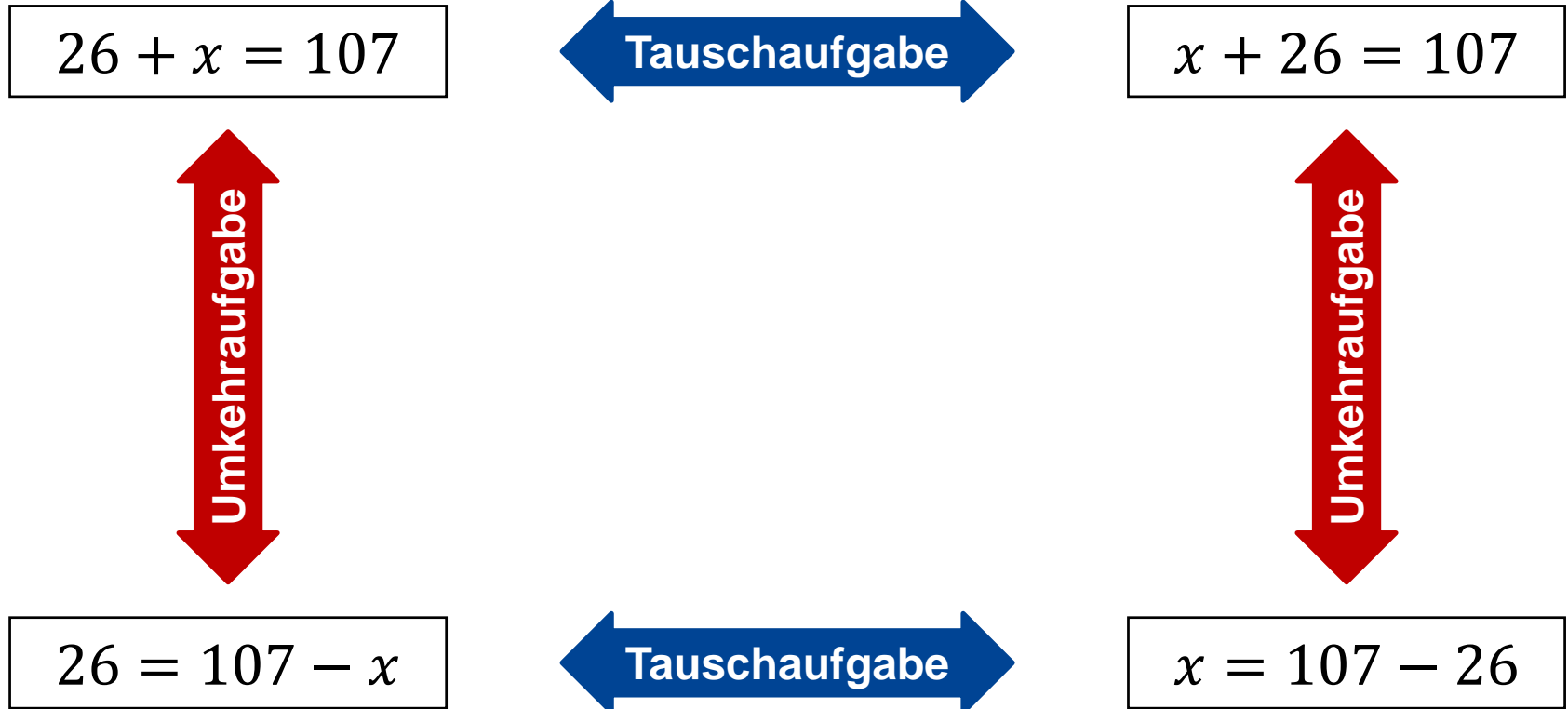
$$107 - 26 = x$$

$$81 = x$$

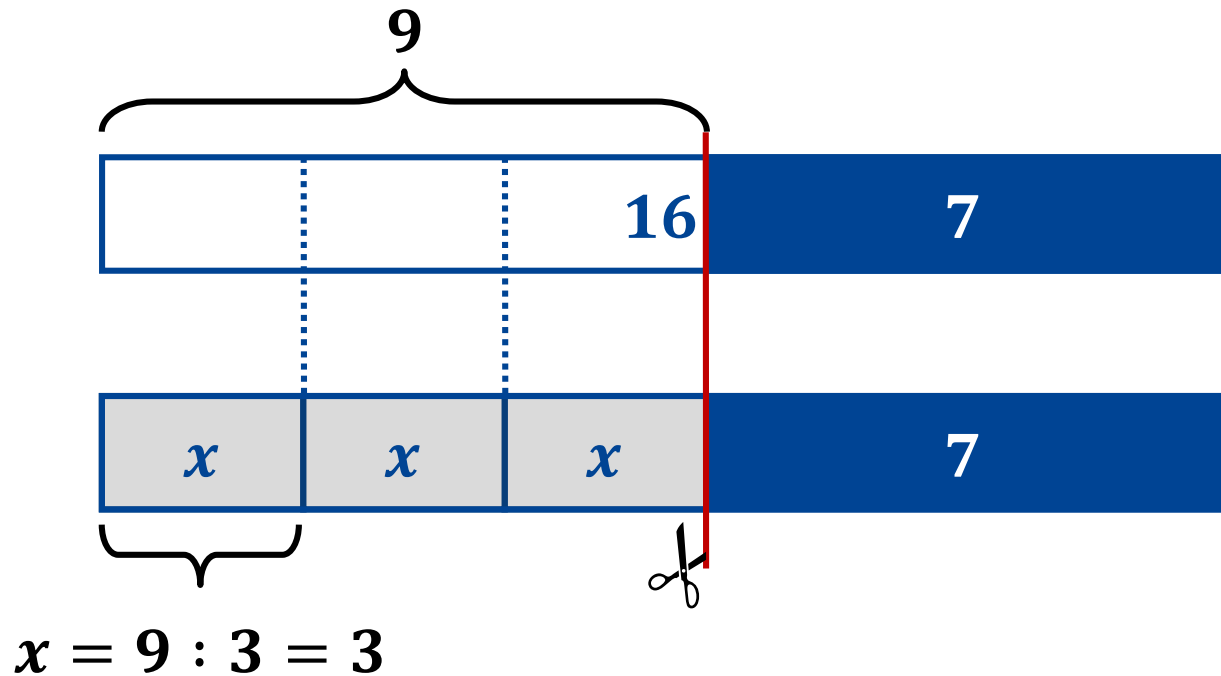
also

$$x = 81$$

Aus der Grundschule: Umkehr- und Tauschaufgaben

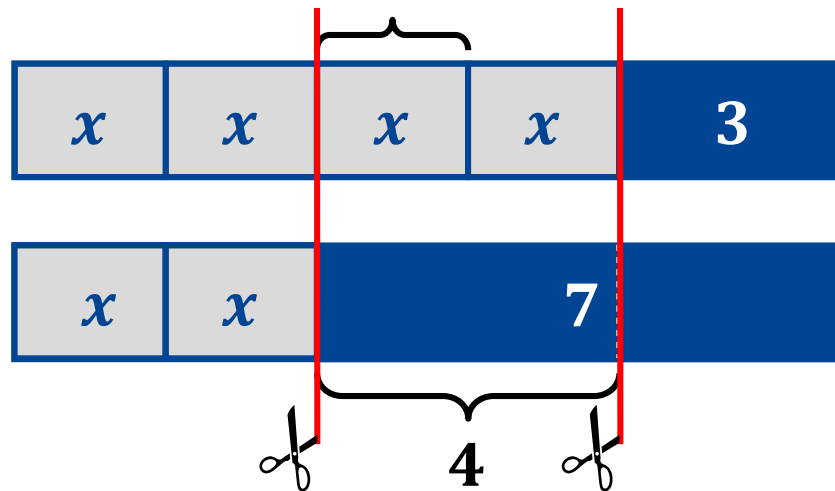


$$3x + 7 = 16$$



$$4x + 3 = 2x + 7$$

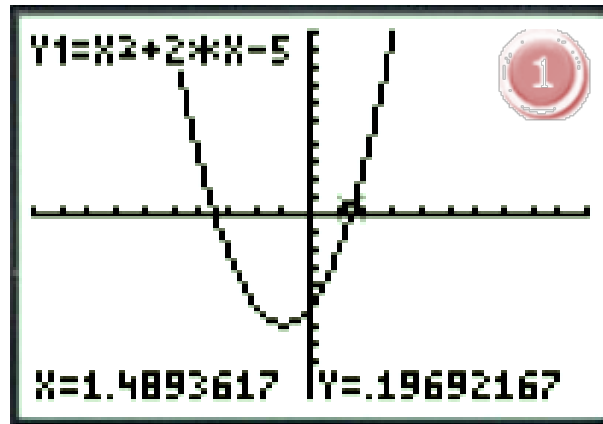
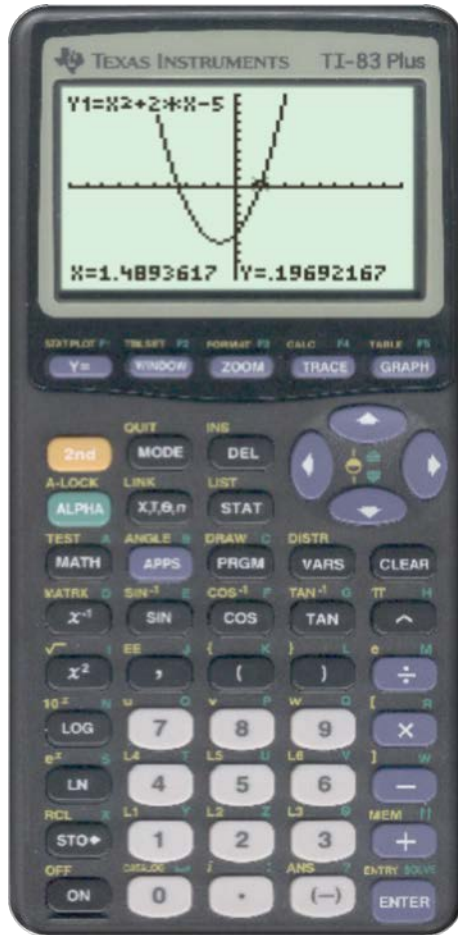
$$x = 4 : 2 = 2$$



$$x^3 + x^2 - 1 = 0$$

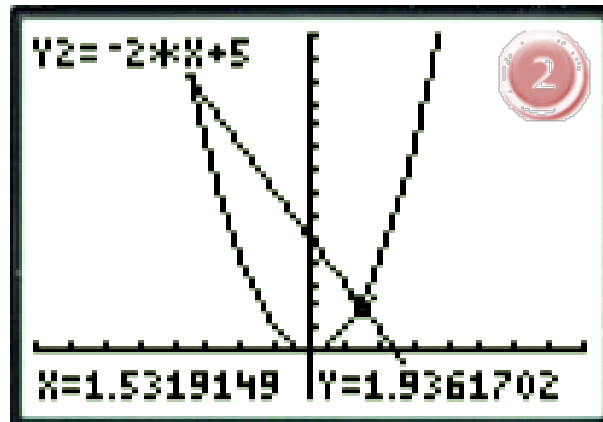
x	$x^3 + x^2 - 1$
0	-1
1	1
0,5	-0,625
0,8	0,125
0,7	-0,167
0,75	-0,015625
0,77	0,049433
0,76	0,016576
0,755	0,0003939
0,753	-0,006033
0,754	-0,002823

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$



$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

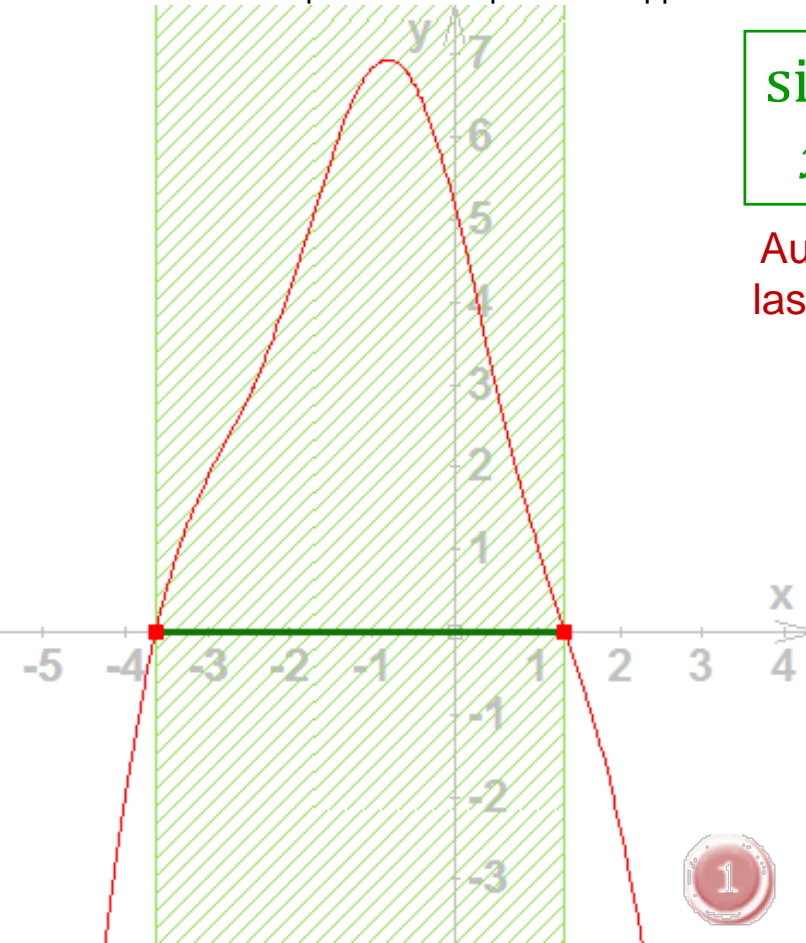
x -Koordinaten der Schnittpunkte des zum (Funktions-) Term $x^2 + 2x - 5$ gehörenden Graphen mit der x -Achse



$$x^2 = -2x + 5$$

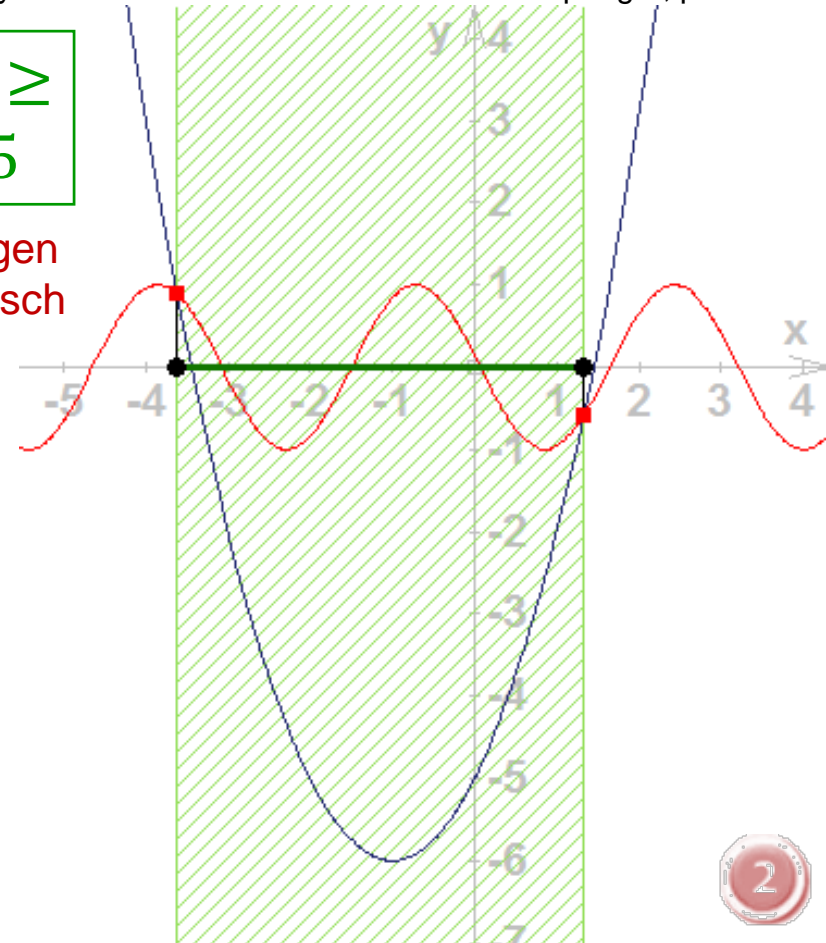
x -Koordinaten der Schnittpunkte der zu den (Funktions-) Termen x^2 und $-2x + 5$ gehörenden Graphen

Abramovich (2014): One-Variable Equations and Inequalities: Computational Experiment and Formal Demonstration.
In: Computational Experiment Approach to Advanced Secondary Mathematics Curriculum. Dordrecht: Springer, p. 25 -36



$$\sin(2x + 3) \geq x^2 + 2x - 5$$

Auch Ungleichungen
lassen sich graphisch
lösen!



$$\sin(2x + 3) - (x^2 + 2x - 5) = 0$$

$$\sin(2x + 3) = x^2 + 2x - 5$$


<https://www.geogebra.org/m/Hw8m75hu> • <https://www.geogebra.org/m/NVuSuDpC>



$$1,5^x = 3 \cdot \cos(x)$$

Algorithmus

1. Wertetabelle für ein Intervall berechnen
2. Teilintervall auswählen, das eine Lösung enthält
3. Teilintervall spreizen und neue Wertetabelle berechnen
4. Wiederholen von 2. und 3. bis die Lösung genau genug ist



x	1,5 ^x	3·cos(x)	T ₁ (x) – T ₂ (x)
-6	0,0878	2,8805	-2,7927
-5	0,1317	0,8510	-0,7193
-4	0,1975	-1,9609	2,1585
-3	0,2963	-2,9700	3,2663
-2	0,4444	-1,2484	1,6929
-1	0,6667	1,6209	-0,9542
0	1,0000	3,0000	-2,0000
1	1,5000	1,6209	-0,1209
2	2,2500	-1,2484	3,4984
3	3,3750	-2,9700	6,3450
4	5,0625	-1,9609	7,0234

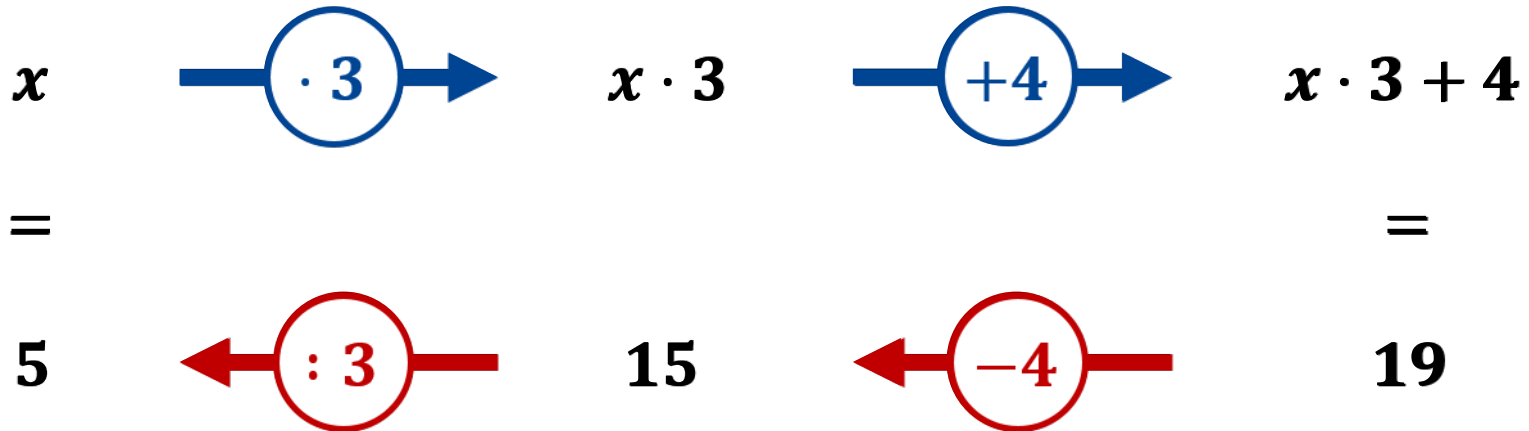
x	$1,5^x$	$3 \cdot \cos(x)$	$T_1(x) - T_2(x)$
-2	0,4444	-1,2484	1,6929
-1,9	0,4628	-0,9699	1,4327
-1,8	0,4820	-0,6816	1,1636
-1,7	0,5019	-0,3865	0,8885
-1,6	0,5227	-0,0876	0,6103
-1,5	0,5443	0,2122	0,3321
-1,4	0,5669	0,5099	0,0570
-1,3	0,5903	0,8025	-0,2122
-1,2	0,6147	1,0871	-0,4723
-1,1	0,6402	1,3608	-0,7206
-1	0,6667	1,6209	-0,9542

x	$1,5^x$	$3 \cdot \cos(x)$	$T_1(x) - T_2(x)$
-1,4	0,5669	0,5099	0,0570
-1,39	0,5692	0,5394	0,0297
-1,38	0,5715	0,5689	0,0025
-1,37	0,5738	0,5983	-0,0246
-1,36	0,5761	0,6277	-0,0516
-1,35	0,5785	0,6570	-0,0786
-1,34	0,5808	0,6863	-0,1054
-1,33	0,5832	0,7154	-0,1323
-1,32	0,5855	0,7445	-0,1590
-1,31	0,5879	0,7736	-0,1856
-1,3	0,5903	0,8025	-0,2122

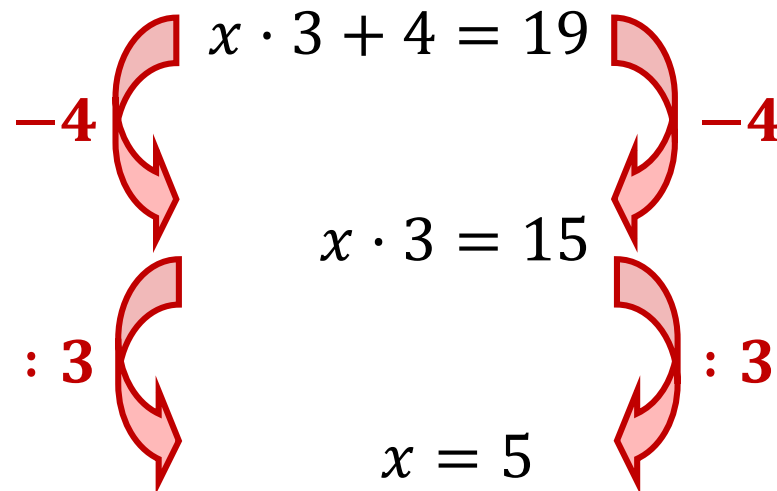
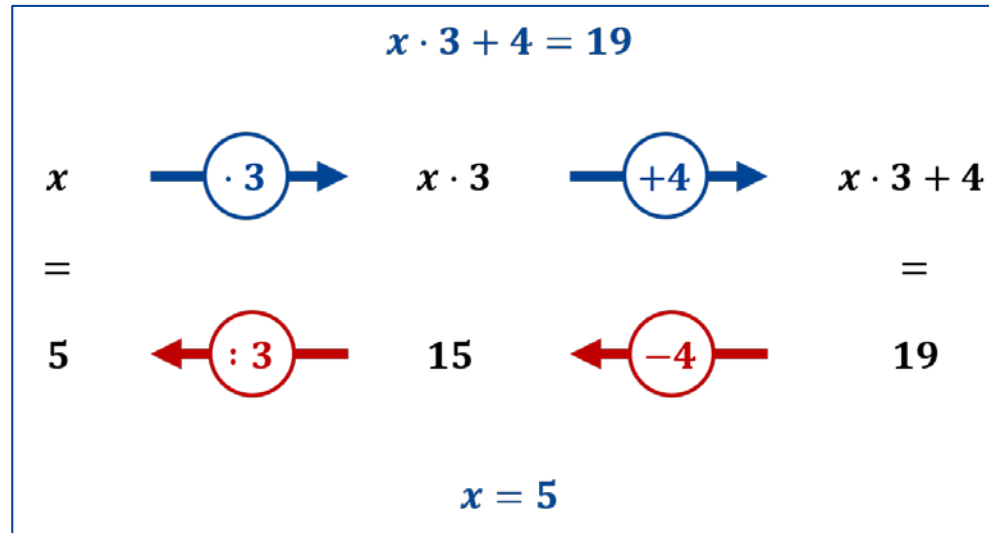
- ▶ liefern im Prinzip beliebig viele Dezimalstellen einer Lösung.
- ▶ liefern Lösungen nicht als geschlossene Terme, sondern als abbrechende Dezimalbrüche vorgegebener Länge.
- ▶ liefern nur Lösungen aus einem endlichen Startintervall.
- ▶ funktionieren *nicht*, wenn die Gleichung von Parametern abhängt.
- ▶ beantworten *nicht* die Frage nach *allen* Lösungen einer Gleichung
- ▶ genügen für die meisten praktischen Anwendungen.
- ▶ werden interaktiv vom Benutzer gesteuert.
 - ▷ Rechenpraxis: Automatisch ablaufende Verfahren.
 - ▷ Probleme: Startintervall, Konvergenzgeschwindigkeit, ...

Ein Startintervall für diese Verfahren kann wie beim graphischen Lösen von Gleichung bestimmt werden.

$$x \cdot 3 + 4 = 19$$

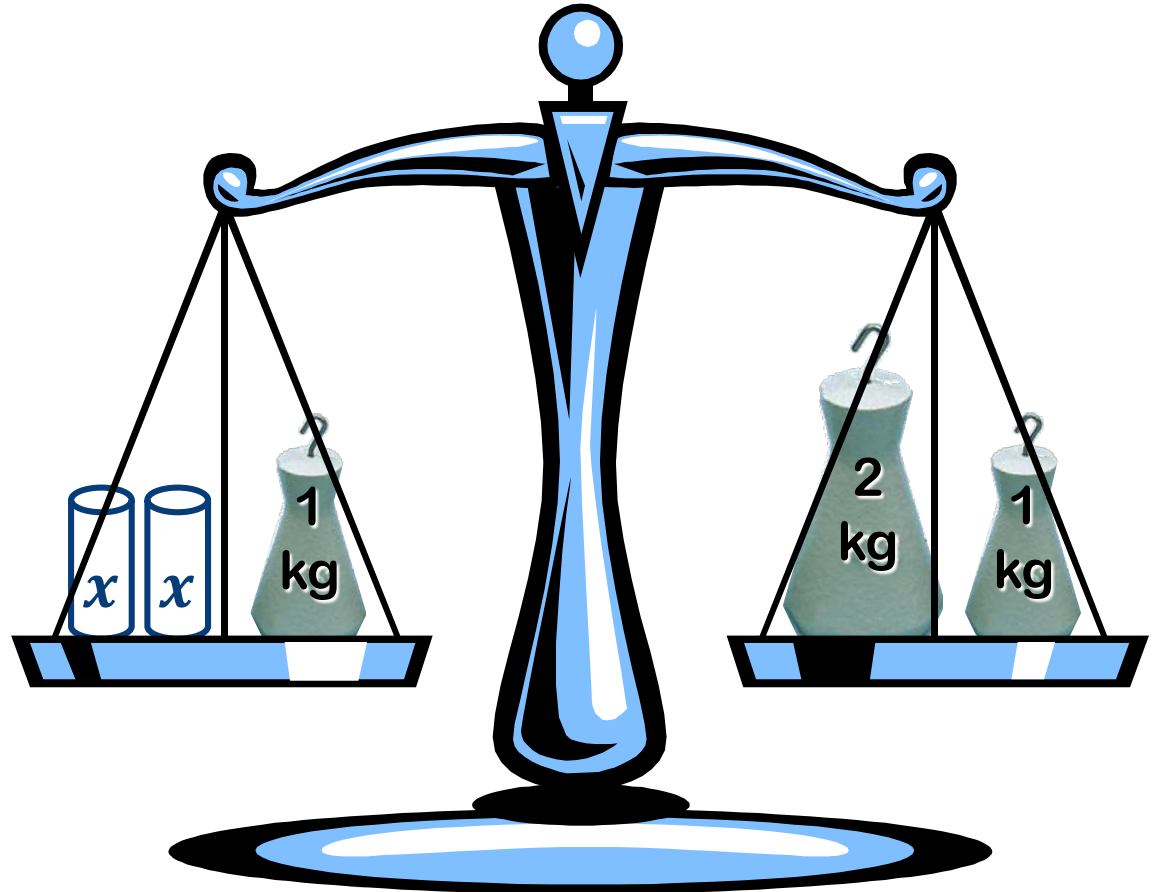


$$x = 5$$



$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden
Seiten wegnehmen.



$$2x + 1 = 3$$

$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden
Seiten wegnehmen.

$$2x = 2$$

Massen auf beiden
Seiten halbieren.



$$2x = 2$$

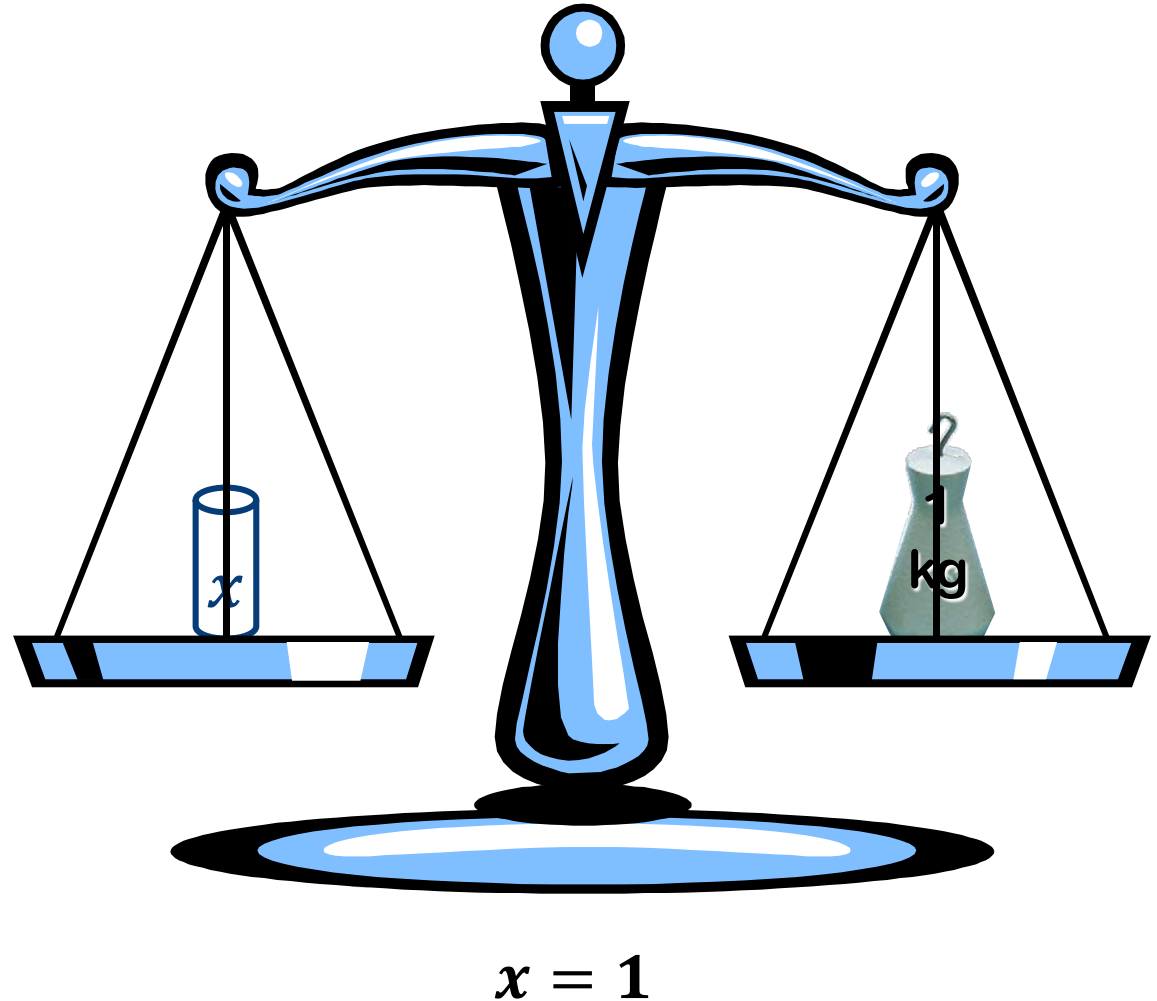
$$2x + 1 = 3$$

1 kg auf beiden
Seiten wegnehmen.

$$2x = 2$$

Massen auf beiden
Seiten halbieren.

$$x = 1$$

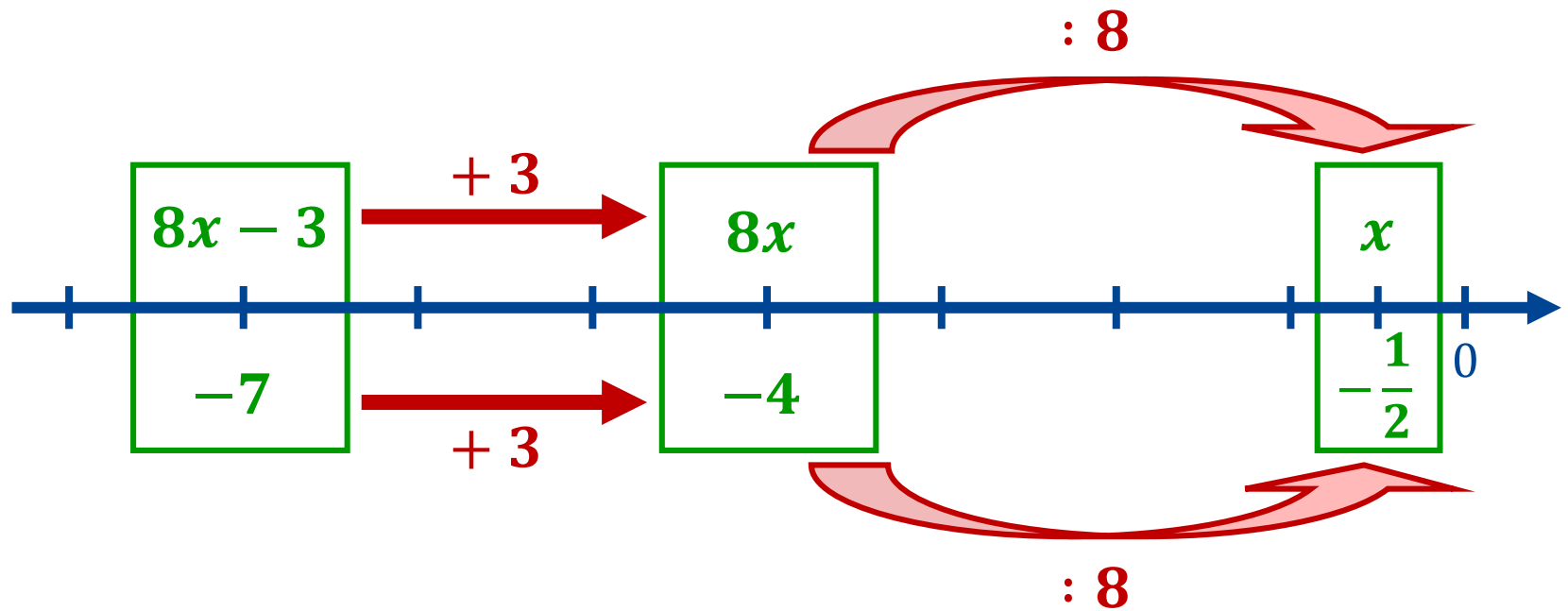


Waagemodell

- ▶ lässt sich in einfachen Fällen gut zur Veranschaulichung nutzen.
- ▶ ist, wie jedes Modell, nur begrenzt nutzbar!
(vgl. etwa negative Zahlen, irrationale Zahlen, schwierig bei Bruchzahlen, Division, Multiplikation, ...)



$$8x - 3 = -7$$



$$x = -\frac{1}{2}$$

$$8x + 2 - 3x + 5 = 17$$

Zusammenfassen:

$$5x + 7 = 17$$

Beidseitig 7 subtrahieren:

$$5x + 7 = 17 \quad | - 7$$

$$5x = 10$$

Beidseitig durch 5 dividieren:

$$5x = 10 \quad | : 5$$

$$x = 2$$

$a = b$ ist äquivalent zu $a + c = b + c$

$a = b$ ist äquivalent zu $a - c = b - c$

$a = b$ ist für $c \neq 0$ äquivalent zu $a \cdot c = b \cdot c$

$a = b$ ist für $c \neq 0$ äquivalent zu $a : c = b : c$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

oder

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

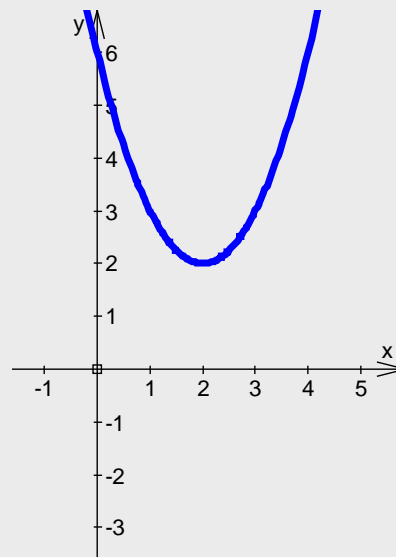
$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

oder

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

keine
Lösung

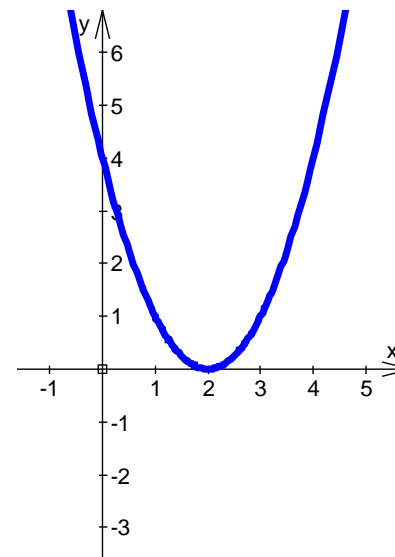
$$b^2 - 4ac < 0$$



$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$$

eine
Lösung

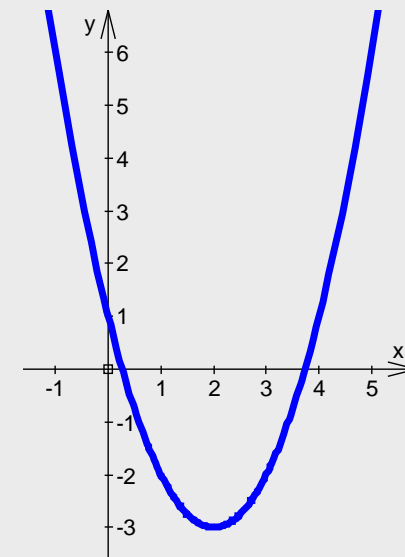
$$b^2 - 4ac = 0$$



$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$$

zwei
Lösungen

$$b^2 - 4ac > 0$$



$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$$

► Grundsätzliches:

- Jede quadratische Gleichung lässt sich in die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a \neq 0$ (Sonst ist die Gleichung nicht quadratisch.) schreiben.

- Die Gleichung muss so umgeformt werden, dass nur ein quadratisches „ x -Glieder“ vorkommt, aber kein zusätzliches lineares.

- **Idee:** Anwendung der „Plusformel“/1. Binomischen Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + \boxed{2ab} + b^2 (*)$$

- Um die binomische Formel von rechts nach links anwenden zu können, muss der Summenterm quadratisch ergänzt werden.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(a + b)^2 = a^2 + \boxed{2ab} + b^2 (*)$$

Die Wurzel darf nur gezogen werden, wenn $b^2 - 4ac \geq 0$. Wegen $\sqrt{x^2} = |x|$ gilt dann:

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

Hier sind genau genommen vier Fallunterscheidungen notwendig, von denen aber je zwei zusammen fallen. Damit ergibt sich:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & \text{falls } \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a < 0\right) \\ x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & \text{falls } \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a < 0\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & \text{falls } \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a < 0\right) \\ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & \text{falls } \left(x + \frac{b}{2a} < 0 \wedge a > 0\right) \vee \left(x + \frac{b}{2a} \geq 0 \wedge a < 0\right) \end{cases}$$

Satz von Vieta: Bei einer quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

gilt für die Parameter p, q und die Lösungen x_1, x_2 der Gleichung:

Beispiel:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad q = x_1 \cdot x_2$$

Kapitel 4: Gleichungen

4.3 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen



► Tarif 1: Geringe Grundgebühr

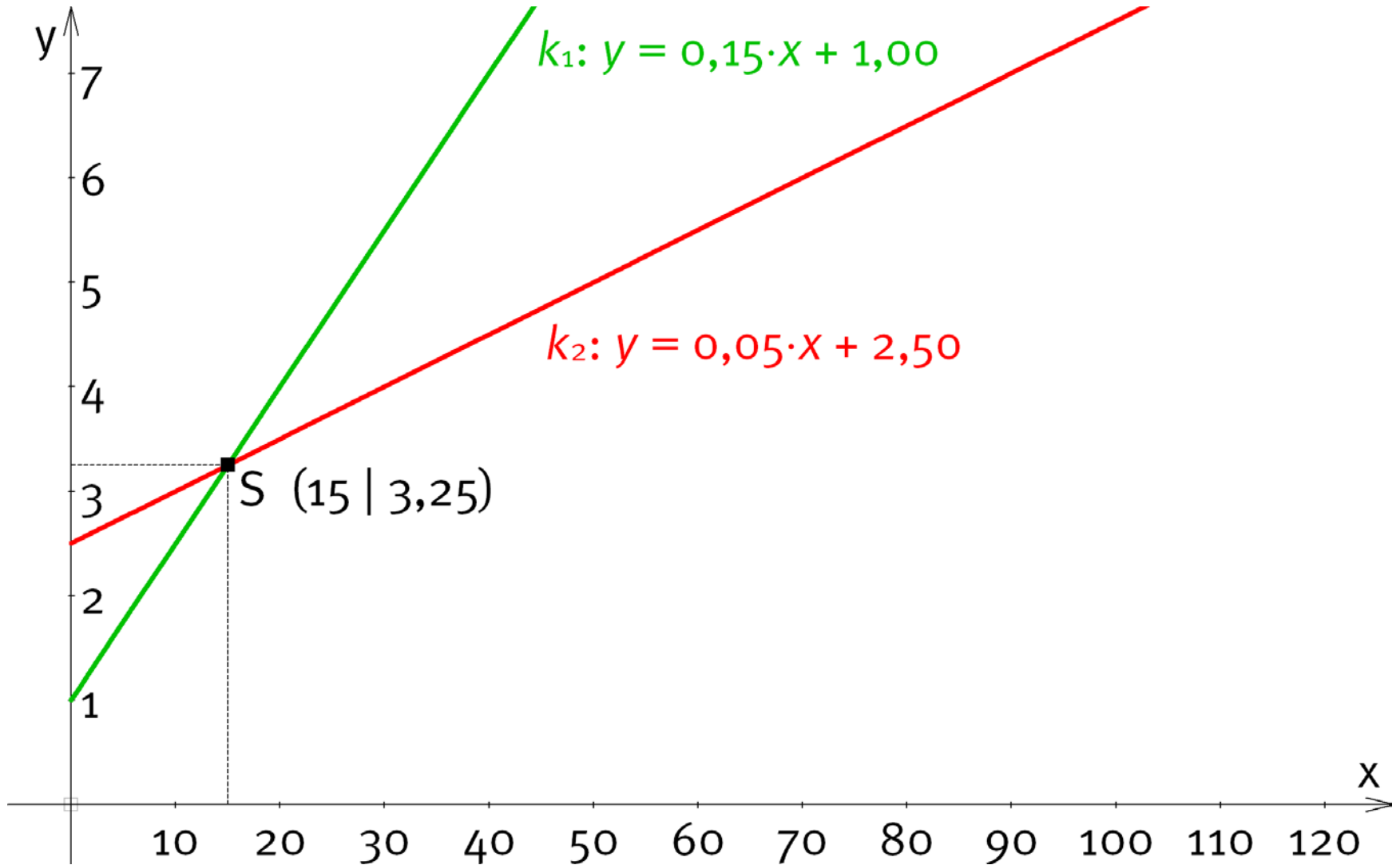
- ▷ Monatliche Grundgebühr: $g_1 = 1,00 \text{ €}$
- ▷ Preis pro Einheit, „Minutenpreis“: $m_1 = 0,15 \text{ €}$
- ▷ Telefoneinheiten (Minuten): x
- ▷ Monatliche Kosten: $k_1(x) = m_1 \cdot x + g_1$



► Tarif 2: Geringer Minutenpreis

- ▷ Monatliche Grundgebühr: $g_2 = 2,50 \text{ €}$
- ▷ Preis pro Einheit, „Minutenpreis“: $m_2 = 0,05 \text{ €}$
- ▷ Telefoneinheiten (Minuten): x
- ▷ Monatliche Kosten: $k_2(x) = m_2 \cdot x + g_2$

► Ab wie vielen Telefoneinheiten ist Tarif 2 günstiger?



► **Gesucht**

ist zunächst ein Paar $(x|y)$,
das die beiden Gleichungen

$$k_1: y = 0,15x + 1 \quad (\text{I})$$

$$k_2: y = 0,05x + 2,5 \quad (\text{II})$$

gleichzeitig erfüllt, also eine
Lösung für dieses **lineare
Gleichungssystem** darstellt.

► **Lösungsverfahren (Sek. I)**

für lineare Gleichungssysteme
mit zwei Gleichungen und zwei
Variablen (Unbekannten):

- ▷ Gleichsetzungsverfahren
- ▷ Additionsverfahren
- ▷ Einsetzungsverfahren

► **Ziel**

Eliminieren einer Variable, um
zu einer Gleichung mit einer
Unbekannten zu kommen, die
einfach gelöst werden kann.

$$(I) \quad y = 0,15 \cdot x + 1$$

$$(II) \quad y = 0,05 \cdot x + 2,5$$

► Gleichsetzungsverfahren

- Gleichsetzen von (I) und (II) liefert:

$$\begin{aligned} 0,15 \cdot x + 1 &= 0,05 \cdot x + 2,5 & | -0,05 \cdot x & | -1 \\ 0,1 \cdot x &= 1,5 & | \cdot 10 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$\begin{aligned} y &= 0,05 \cdot 15 + 2,5 \\ &= 0,75 + 2,5 \\ &= 3,25 \end{aligned}$$

- Die Lösung ist das geordnete Paar (15|3,25).

► Additionsverfahren

- Subtraktion der Gleichung (II) von der Gleichung (I), also (I) – (II), liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= 0,1 \cdot x - 1,5 & | +1,5 \\ 1,5 &= 0,1 \cdot x & | \cdot 10 \\ 15 &= x \end{aligned}$$

- Einsetzen in (II) liefert:

$$\begin{aligned} y &= 0,05 \cdot 15 + 2,5 \\ &= 0,75 + 2,5 \\ &= 3,25 \end{aligned}$$

- Die Lösung ist das geordnete Paar (15|3,25).

$$(I) \quad y = 0,15 \cdot x + 1$$

$$(II) \quad y = 0,05 \cdot x + 2,5$$

► Einsetzungsverfahren

- ▷ Auflösen der Gleichung (II) nach x liefert:

$$y = 0,05 \cdot x + 2,5 \quad | -2,5$$

$$y - 2,5 = \frac{5}{100} \cdot x \quad | : \frac{5}{100}$$

$$20 \cdot (y - 2,5) = x$$

- ▷ Einsetzen in (I) liefert:

$$y = \frac{15}{100} \cdot [20 \cdot (y - 2,5)] + 1$$

$$y = 3 \cdot (y - 2,5) + 1$$

$$y = 3y - 7,5 + 1$$

$$y = 3y - 6,5 \quad | -y \quad | +6,5$$

$$6,5 = 2y \quad | : 2$$

$$3,25 = y$$

- ▷ Einsetzen in (II) liefert:

$$3,25 = 0,05 \cdot x + 2,5 \quad | -2,5$$

$$0,75 = \frac{5}{100} \cdot x \quad | : \frac{5}{100}$$

$$15 = x$$

- ▷ Die Lösung ist das geordnete Paar $(15|3,25)$.

► Satz

▷ Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Die zugehörige Lösungsmenge ist entweder

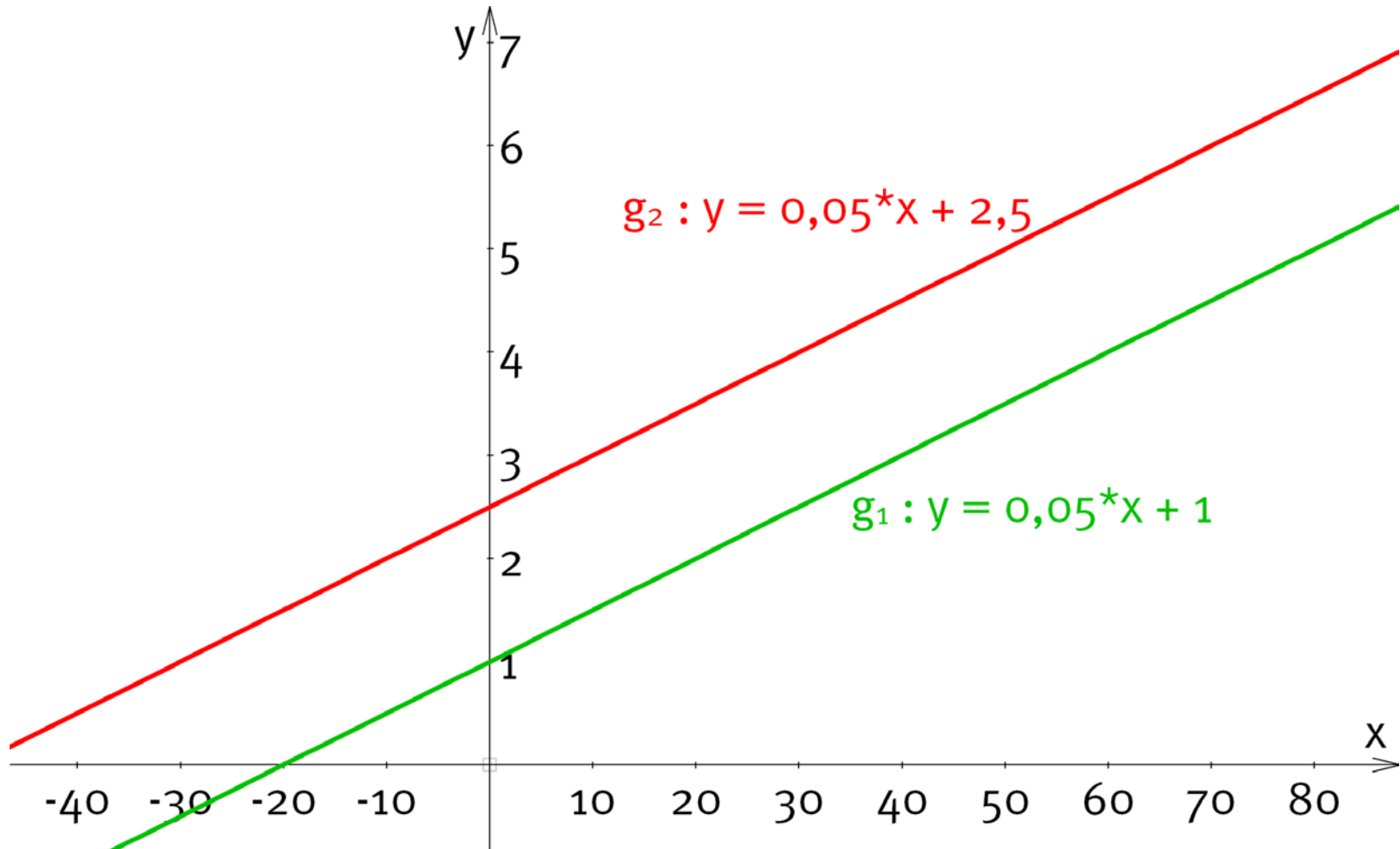
- ▶ leer,
- ▶ ein geordnetes Zahlenpaar $(x|y)$ oder
- ▶ eine unendliche Menge von Zahlenpaaren.

► Bemerkung

▷ Graphisch interpretiert entsprechen diese drei Fälle genau den möglichen Lagebeziehungen der beiden durch $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$ gegebenen Geraden.

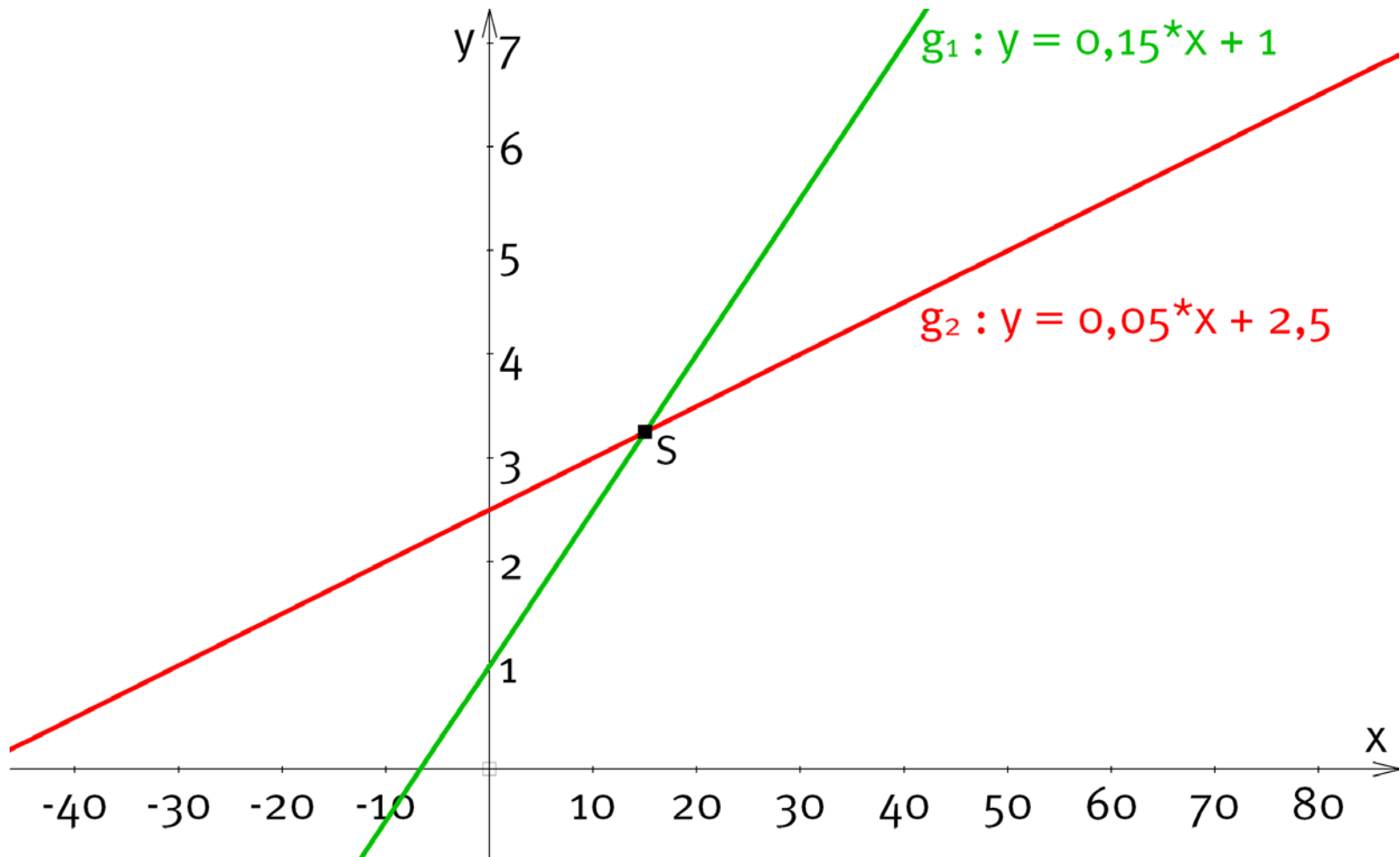
► **Die Lösungsmenge ist**

▷ leer, wenn die Geraden parallel sind.



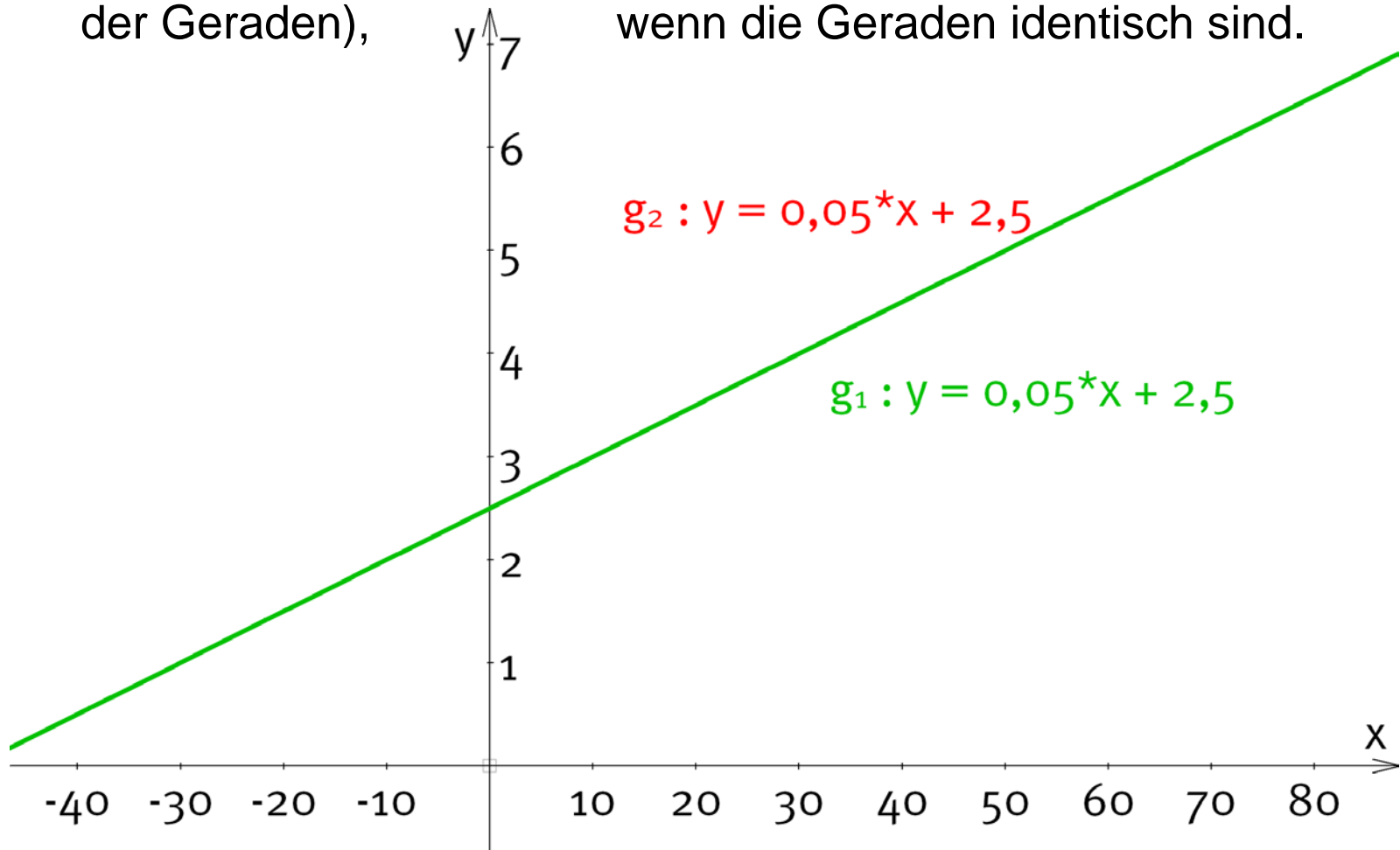
► **Die Lösungsmenge ist**

- ▷ ein geordnetes Paar (ein Punkt), wenn die Geraden sich schneiden.



► Die Lösungsmenge ist

- ▷ eine unendliche Menge von geordneten Zahlenpaaren (alle Punkte der Geraden), wenn die Geraden identisch sind.



Kapitel 4: Gleichungen

4.4 Gleichungen in der Sekundarstufe I



► Orientierungsstufe

- ▷ Einfache Gleichungen (mit einer Variablen) lösen

► 7./8. Klasse

- ▷ Wertetabellen zu Termen; Grundmenge (ggf. Definitionsmenge)
- ▷ Äquivalenz von Termen und von Gleichungen bzw. Ungleichungen; Grundmenge (ggf. Definitionsmenge)
- ▷ Gleichungen und Ungleichungen über verschiedenen Grundmengen, Lösungsmenge, Intervalle
- ▷ Äquivalenzumformungen (ÄU) bei Gleichungen und Ungleichungen der Form $ax + b = c$
- ▷ Sachaufgaben (SA) (auch offene Aufgaben, Aufgabenvariation)
- ▷ Proportionalität: fehlende Größen berechnen, SA, grafische Lös.

► 7./8. Klasse (Fortsetzung)

- ▷ lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen
- ▷ Textaufgaben; Lösen ggf. mithilfe einer Text-Term-Tabelle
- ▷ \wedge -Verknüpfung bzw. \vee -Verknüpfung von linearen Gleichungen bzw. Ungleichungen
- ▷ einfache Bruchgleichungen mit einer Variablen
- ▷ Relation und Umkehrrelation: Zusammenhang zwischen deren Gleichungen bzw. Ungleichungen; Umkehrfunktion
- ▷ Funktionen mit Gleichungen folgender Form:
$$y = mx \quad \text{bzw.} \quad y = mx + t$$
- ▷ lineare Ungleichungen mit zwei Variablen
- ▷ einfache Bruchgleichungen mit einer Variablen

$$\frac{T_1(x)}{T_2(x)} = \frac{T_3(x)}{T_4(x)}$$

▶ 9./10. Klasse

- ▷ Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen:
 - ▶ grafische und algebraische Lösung (Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren);
 - ▶ auch Aufgaben mit geometrischen Problemstellungen algebraisch lösen
- ▷ Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen:
 - ▶ grafische Lösung
- ▷ quadratische Gleichungen:
 - ▶ grafische Lösung, Lösen mit quadratischer Ergänzung, Lösungsformel; Diskriminante und Lösbarkeit
 - ▶ quadratische Gleichungen mit Parametern; Satz des Vieta mit Anwendungen; quadratische Ungleichungen
- ▷ einfache Wurzelgleichungen
 - ▶ Beachtung der Definitionsmenge; Äquivalenzumformungen

▶ 9./10. Klasse (Fortsetzung)

▷ Berechnen der Koordinaten der Schnittpunkte von Funktionsgraphen

▶ (maximal quadratische Bestimmungsgleichungen mit maximal einem Parameter)

▷ Tangentialprobleme und Diskriminante

▷ Gleichungen der Form

$$a \cdot b^{x+c} + d = 0$$

▷ Trigonometrische Gleichungen