UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Jürgen Roth

Grundlagen der Algebra und elem. Zahlentheorie

Modul 4b: Grundlagen der Mathematik C

Grundlagen der Algebra und elementaren Zahlentheorie

0 Was ist Algebra bzw. Zahlentheorie?

1 Muster und Strukturen

2 Strukturen geometrischer Symmetrien

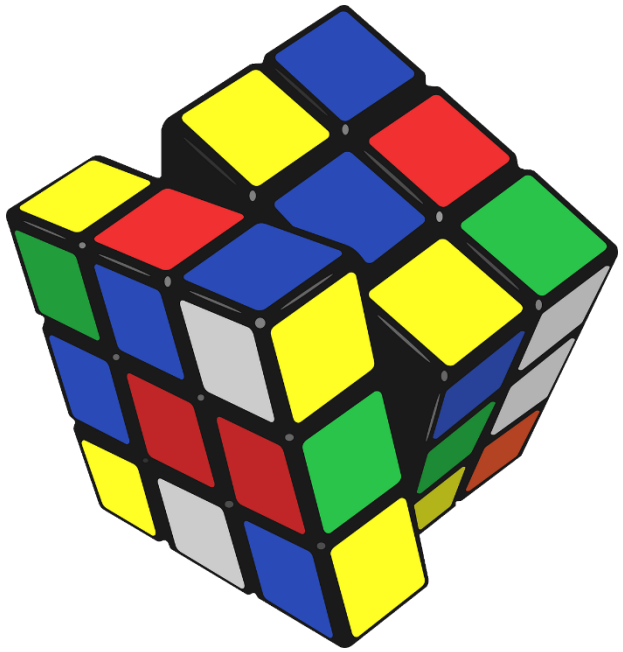
3 Arithmetische Strukturen in kleinen Welten

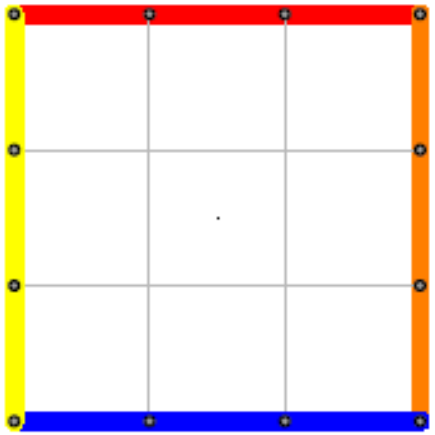
4 Permutationen (Vertauschungen)

Jürgen Roth

Kapitel 4: Permutationen (Vertauschungen)

Grundlagen der Algebra und elementaren Zahlentheorie

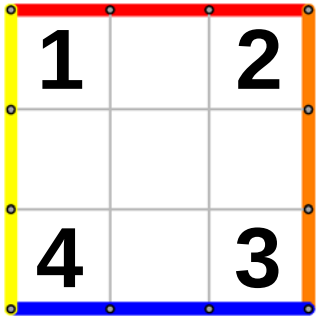


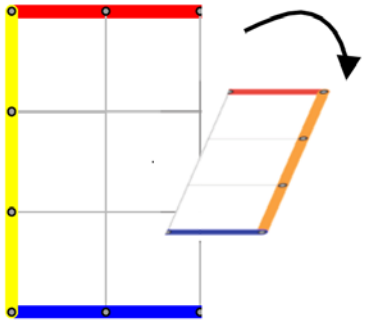


Kapitel 4: Permutationen (Vertauschungen)

4.1 Puzzles mit Vertauschungen lösen

4.2 Symmetrien mit Permutationen erfassen





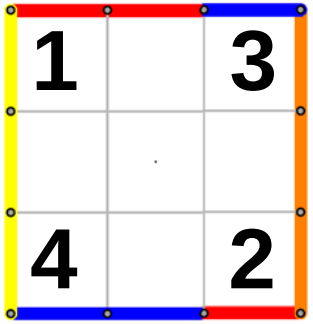


Abbildung aus
Leuders, T. (2016). Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbständigen Erarbeiten. Berlin: Springer Spektrum, S. 68

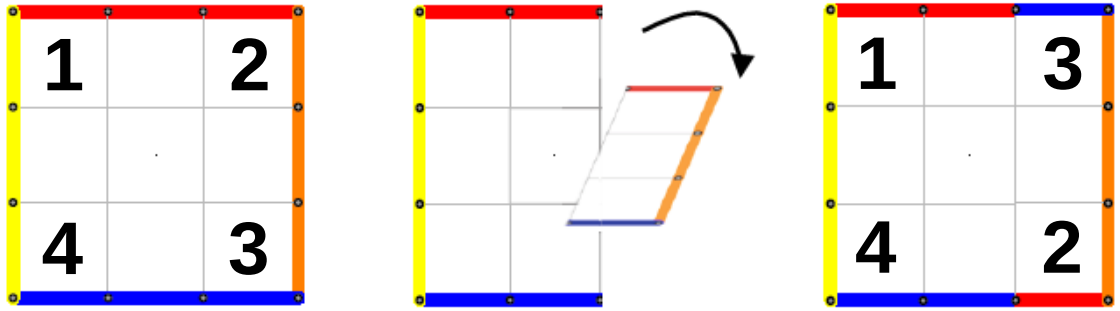
Kapitel 4: Permutationen (Vertauschungen)

4.1 Puzzles mit Vertauschungen lösen

„2D-Würfel“

Untersuchungen am 2D-Würfel

- Beim 2D-Würfel sind die Seiten eines Quadrats gefärbt.
- Erlaubte Züge sehen wie folgt aus:



- Es sind Drehungen einer „Leiste“ bestehend aus drei Quadraten um 180°.
- Die Quadratseiten sind auf der Rückseite genauso gefärbt wie auf der Vorderseite.
- Die waagerechte und die senkrechte mittlere Leiste ist jeweils nicht drehbar.

- Wie kann man die Züge aufschreiben?
- Wie findet man das Ergebnis $\rho \circ \sigma$ der Hintereinanderausführung ρ nach σ zweier Züge ρ und σ?
- Um Züge einfach zu notieren, kann man die vier Eckfelder nummerieren. Damit lassen sich die möglichen Züge als Abbildungen auffassen, die die Menge der vier Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$ auf sich selbst abbilden.
- Eine mögliche Schreibweise für die im Bild links dargestellte Abbildung haben wir bereits kennengelernt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
- Diese Vertauschung lässt sich auch so schreiben: $2 \leftrightarrow 3$ bzw. (23)

Abbildung aus Leuders, T. (2016). Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbständigen Erarbeiten. Berlin: Springer Spektrum, S. 68

Schreibweisen für Permutationen

- $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

  ist gleichbedeutend mit $1 \to 2 \to 3$ und 4

  ist gleichbedeutend mit $(123)(4)$

  ist gleichbedeutend mit (123)

- Die Schreibweise bedeutet, dass 1, 2 und 3 zyklisch ineinander übergehen und insbesondere auf 3 wieder die 1 folgt.
- Zahlen, die unverändert bleiben, weil sie auf sich abgebildet werden, im Beispiel die (4), kann man weglassen, wenn man weiß, dass vier Zahlen aufeinander abgebildet werden.
- Die letzte Darstellung heißt auch **Zykelschreibweise** weil sich Permutationen aus Zykeln (also „Kreisen“) zusammensetzen.

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

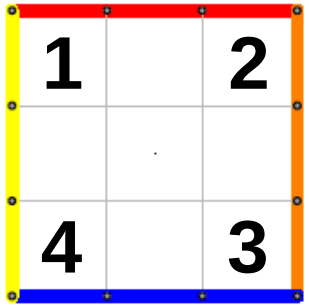
  ist gleichbedeutend mit $1 \to 4$ und $2 \to 3$

  ist gleichbedeutend mit $1 \leftrightarrow 4$ und $2 \leftrightarrow 3$

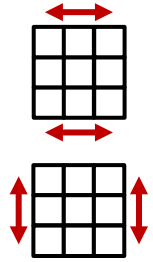
  ist gleichbedeutend mit $(14)(23)$

- (14) ist ein Zweierzykel, (123) ein Dreierzykel und $(14)(23)$ besteht aus zwei Zweierzykeln.
- Beim Puzzle auf Folie 4.7 sind nur Züge möglich, die durch die Transpositionen (12), (23), (34) und (14) dargestellt werden. Wenn man sie kombiniert, bekommt man auch andere Permutationen wie z.B. $(14)(23)$ oder (123).
- $(123) = (231) = (312)$. Zum schnelleren Vergleich legt man fest, dass jeder Zykel stets mit der kleinsten Zahl beginnt.

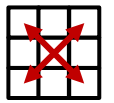
„2D-Würfel“ untersuchen



- Wie viele und welche Permutationen der vier Ecken sind potentiell möglich?
  - Einerzykel (neutrales Zykel)
    $(1) = (2) = (3) = (4) = id$
    Hier werden keine Zahlen permutiert.
  - Zweierzykeln (Transpositionen):
    $(12), (13), (14), (23), (24), (34)$
  - Dreierzykeln:
    $(123), (124), (132), (134),$
    $(142), (143), (234), (243)$
  - Viererzykeln:
    $(1234), (1243), (1324),$
    $(1342), (1423), (1432)$
  - Doppelzweierzykeln:
    $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$
  - Mehr als diese 24 verschiedene Zykeln kann es nicht geben. Warum?
- Welche der Zykeln erhält man durch Verkettung der Zykeln $(12), (14), (23)$ und (34)?
  - Die Verkettung von elementfremden grundlegenden Zweierzykeln ergibt:
    $(12) \circ (34) = (34) \circ (12) = (12)(34)$
    $(14) \circ (23) = (23) \circ (14) = (14)(23)$



  - Verkettung dieser beiden Züge ergibt den fehlenden Doppelzweierzykel:
    $(12) \circ (34) \circ (14) \circ (23)$
    $= (12)(34) \circ (14)(23) = (13)(24)$

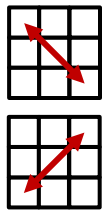


„2D-Würfel“ untersuchen

- Welche der Zykeln erhält man durch Verkettung der Zykeln $(12), (14), (23)$ und (34)?
  - Entstehung der fehlenden Zweizykeln:

    $(12) \circ (23) \circ (12) = (13)$

    $(34) \circ (23) \circ (34) = (24)$

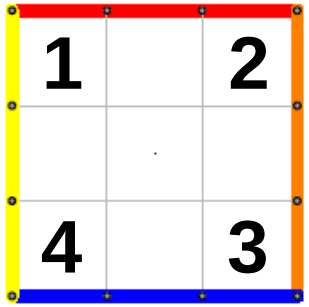
  - Die diagonalen Doppelzweierzykeln kann man also auch so erzeugen:

    $(13)(24) = (13) \circ (24)$

    $= (12) \circ (23) \circ (12) \circ (34) \circ (23) \circ (34)$

  - Der auf Folie 4.8 gefundene Viererzug für $(13)(24)$ ist aber natürlich deutlich effizienter als dieser Sechserzug.



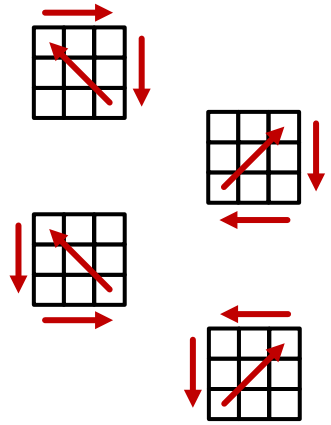
- Verknüpfung von benachbarten Transpositionen liefert:

  $(12) \circ (23) = (123)$

  $(23) \circ (34) = (234)$

  $(14) \circ (34) = (143)$

  $(12) \circ (14) = (142)$



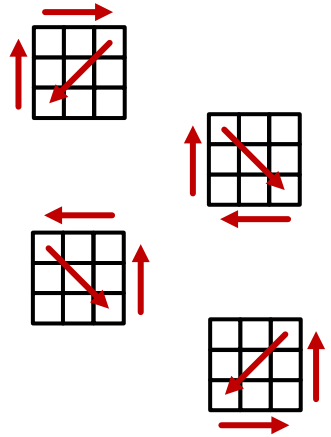
- Und weiter:

  $(12) \circ (24) = (124)$

  $(13) \circ (34) = (134)$

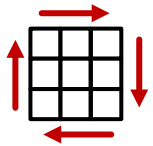
  $(13) \circ (23) = (132)$

  $(24) \circ (34) = (243)$

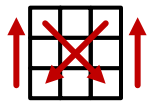


„2D-Würfel“ untersuchen

- Welche der Zykeln erhält man durch Verkettung der Zykeln $(12), (14), (23)$ und (34)?
  - Entstehung von Vierzykeln:

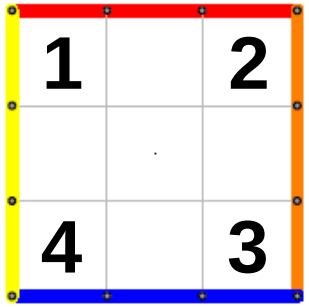


$$(12) \circ (23) \circ (34) = (1234)$$



$$(13) \circ (23) \circ (24) = (1324)$$
$$= (12) \circ (23) \circ (12) \circ (23) \circ (34) \circ (23) \circ (34)$$

  - Man benötigt also 7 Züge um die Permutation (1324) zu erhalten.
  - Ist das der kürzeste Weg?
  - Es lässt sich jede mögliche Permutation durch eine Folge der vier Transpositionen $(12), (14), (23)$ und (34), also der erlaubten Züge des 2D-Würfels erhalten.



  - Es kann also jede mögliche Stellung der Ecken des 2D-Würfels erreicht werden.
  - Man überzeugt sich leicht davon, dass, wie in unserem bisher „schlimmsten Fall“, maximal 7 Züge dafür notwendig sind.
  - Die Zykelschreibweise erlaubt eine neue Sicht auf die Struktur von Permutationen und lässt gut erkennen, wie die permutierten Elemente zusammenhängen und wie man sie verknüpfen kann.
  - Nur so kann man das Problem des Zauberwürfels knacken bei dem nicht wie hier 24 sondern im schlimmsten Fall

$$8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} = 519.024.039.293.878.272.000$$

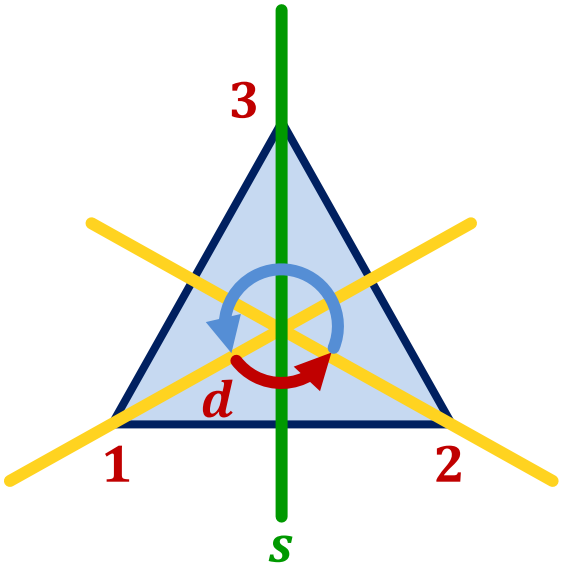
Permutationen existieren.

$\circ$	(1)	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
(1)	(1)	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
(123)	(123)	(132)	(1)	(23)	(12)	(13)
(132)	(132)	(1)	(123)	(13)	(23)	(12)
(12)	(12)	(13)	(23)	(1)	(123)	(132)
(13)	(13)	(23)	(12)	(132)	(1)	(123)
(23)	(23)	(12)	(13)	(123)	(132)	(1)

Lesen: Spaltenkopf nach Zeilenkopf

4.2 Symmetrien mit Permutationen erfassen

Verknüpfungstafel Diedergruppe D_3 bzw. Symmetrische Gruppe S_3



$$d_{M,0^\circ} = id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)$$

$$\boldsymbol{d_{M,120^\circ} = d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)}$$

$$d_{M,240^\circ} = d^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

$$\boldsymbol{s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3) = (12)}$$

$$ds = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2) = (13)$$

$$d^2s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23) = (23)$$

Bemerkung

- Unter den drei Zahlen 1, 2 und 3, gibt es nur die Permutationen $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$.
- Zusammen mit der Verkettung $\circ$ bilden sie die **Symmetrische Gruppe** $(S_3, \circ)$, die strukturgleich zur **Diedergruppe** $(D_3, \circ)$ ist.

$\circ$	(1)	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
(1)	(1)	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
(123)	(123)	(132)	(1)	(23)	(12)	(13)
(132)	(132)	(1)	(123)	(13)	(23)	(12)
(12)	(12)	(13)	(23)	(1)	(123)	(132)
(13)	(13)	(23)	(12)	(132)	(1)	(123)
(23)	(23)	(12)	(13)	(123)	(132)	(1)

Lesen: Spaltenkopf nach Zeilenkopf

(Endliche) Symmetrische Gruppe $(S_n,\circ)$

Definition 4.2.1: (Endliche) Symmetrische Gruppe $(S_n,\circ)$

- Eine bijektive (also in beide Richtungen eindeutige) Abbildung zwischen einer Menge und sich selbst stellt eine „Umordnung“ der Elemente dar und wird **Permutation** genannt. Die Menge aller Permutationen zur Zahlenmenge $\{1, 2, \dots, n\}$, nennt man auch **(endliche) Symmetrische Gruppe**.

$$S_n = \{\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\} \mid \sigma \text{ bijektiv}\}$$

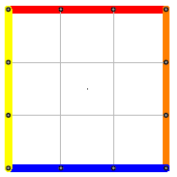
- Jede Symmetrische Gruppe bildet mit der Verkettung als Verknüpfung eine Gruppe $(S_n,\circ)$, die für $n > 2$ nicht kommutativ ist und $n!$ Elemente besitzt:

$$|S_n| = n! := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

- Für das neutrale Element schreibt man (1).
- Zum schnelleren Vergleich legt man fest, dass jeder Zykel $(a_1 a_2 \dots a_n)$ stets mit der kleinsten Zahl beginnt.
- Das inverse Element zu $(a_1 a_2 \dots a_n)$ ist $(a_1 a_n \dots a_2)$.
- Die Permutation $(a_1 a_2)$ von genau zwei Elementen nennt man eine **Transposition**.

Bemerkung: Das Spiel aus Abschnitt 4.1 erzeugt die Symmetrische Gruppe S_4 mit

$S_4 = \{(1), (12), (13), (14), (23), (24), (34),$
$(123), (124), (132), (134), (142), (143),$
$(234), (243), (1234), (1243), (1324),$
$(1342), (1423), (1432), (12)(34),$
$(13)(24), (14)(23)\}$



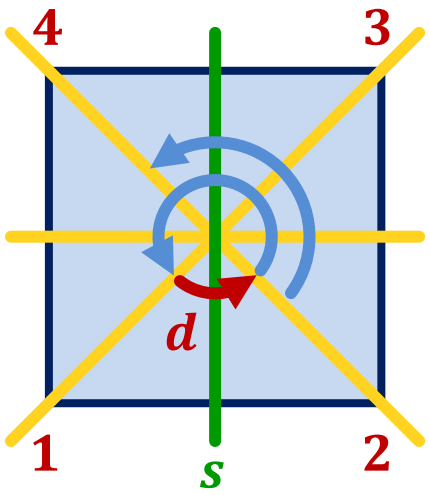
Gerade und ungerade Permutationen

Definition 4.2.2: Gerade und ungerade Permutationen

- In den Symmetrischen Gruppen kann man jede Permutation aus Transpositionen zusammensetzen, z.B. $(1234) = (12) \circ (23) \circ (34)$.
- Es gibt ggf. mehrere und unterschiedlich lange Möglichkeiten, eine Permutation durch eine Verkettung aus Transpositionen zu erzeugen.
- Unabhängig von der konkreten Zusammensetzung aus Transpositionen gehört jede Permutation zu einem der beiden folgenden Typen:
  - **Gerade Permutation**
    - Jede Darstellung ergibt sich aus einer **geraden Anzahl** von **Transpositionen**.
    - Zykeln mit einer ungeraden Anzahl von Elementen, z. B. (123).
  - **Ungerade Permutation**
    - Jede Darstellung ergibt sich aus einer **ungeraden Anzahl** von **Transpositionen**.
    - Zykeln mit einer geraden Anzahl von Elementen, z. B. (1234).
- Da das Produkt zweier gerader Permutationen gerade ist, bilden die geraden Permutationen eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n, die sogenannte **Alternierende Gruppe A_n**.

  $$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ ist eine gerade Permutation}\}$$
- Die Alternierende Gruppe A_n enthält genau die Hälfte der Elemente der Symmetrischen Gruppe S_n.

Verknüpfungstafel Diedergruppe D_4



$$d_{M,0°} = id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)$$

$$\boldsymbol{d_{M,90°} = d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1234)}$$

$$d_{M,180°} = d^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (13)(24)$$

$$d_{M,270°} = d^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1432)$$

$$\boldsymbol{s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34)}$$

$$ds = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (13)$$

$$d^2s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23)$$

$$d^3s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (24)$$

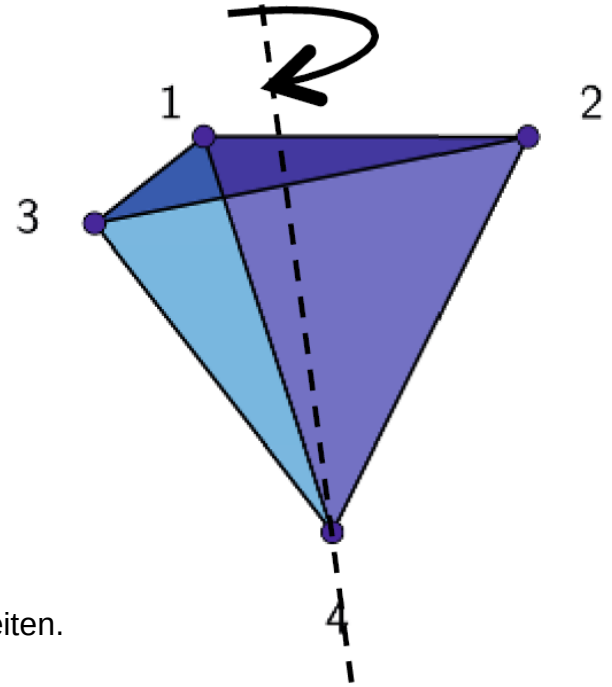
Bemerkung: Es gilt $D_4 \subset S_4$, da z. B. (12) nicht enthalten ist.

∘	**(1)**	**(1234)**	**(13)(24)**	**(1432)**	**(12)(34)**	**(13)**	**(14)(23)**	**(24)**
(1)	(1)	(1234)	(13)(24)	(1432)	(12)(34)	(13)	(14)(23)	(24)
(1234)	(1234)	(13)(24)	(1432)	(1)	(24)	(12)(34)	(13)	(14)(23)
(13)(24)	(13)(24)	(1432)	(1)	(1234)	(14)(23)	(24)	(12)(34)	(13)
(1432)	(1432)	(1)	(1234)	(13)(24)	(13)	(14)(23)	(24)	(12)(34)
(12)(34)	(12)(34)	(13)	(14)(23)	(24)	(1)	(1234)	(13)(24)	(1432)
(13)	(13)	(14)(23)	(24)	(12)(34)	(1432)	(1)	(1234)	(13)(24)
$\boldsymbol{d^2s}$	(14)(23)	(24)	(12)(34)	(13)	(13)(24)	(1432)	(1)	(1234)
$\boldsymbol{d^3s}$	(24)	(12)(34)	(13)	(14)(23)	(1234)	(13)(24)	(1432)	(1)

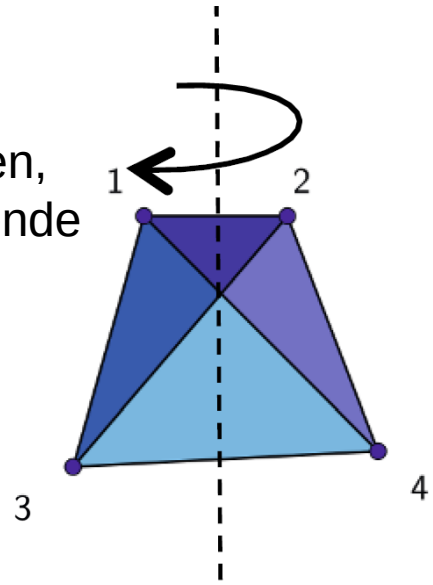
Lesen: Spaltenkopf nach Zeilenkopf

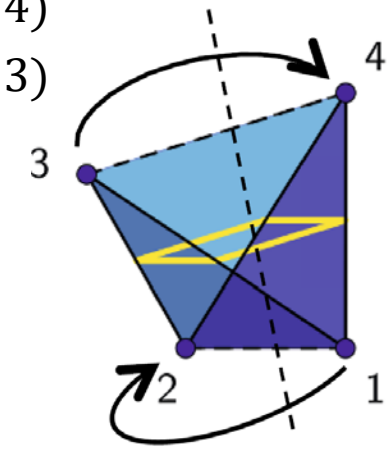
Deckabbildungen eines Tetraeders ↔ S_4?

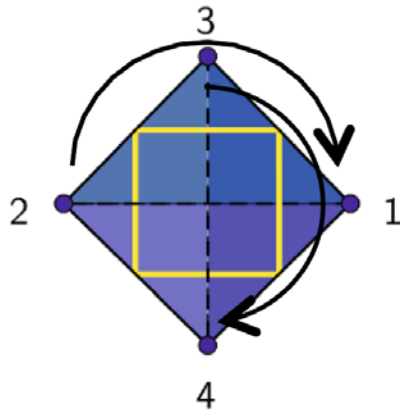
- **Dreierzykeln**
  - Drehungen um $120°$ um Achsen, die durch einen Eckpunkt und die Mitte der gegenüberliegenden Seite verlaufen.
  - Davon gibt es jeweils 2 verschiedene, die jeweils die inversen Abbildungen zueinander sind:
    - $(123), (132)$
    - $(124), (142)$
    - $(134), (143)$
    - $(234), (243)$



- **Doppelzweierzykeln**
  - Drehungen um $180°$ um Achsen, die durch zwei gegenüberliegende Seitenmitten laufen.
  - Es gibt 3 Paare gegenüberliegender Seiten, also auch drei Achsen und damit drei Abbildungen, da die Drehungen um $180°$ selbstinvers sind.
    - $(12)(34)$
    - $(13)(24)$
    - $(14)(23)$







Abbildungen aus
Leuders, T. (2016). Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbständigen Erarbeiten. Berlin: Springer Spektrum, S. 80

Deckabbildungen eines Tetraeders ↔ S_4?

- **Transpositionen**
  - Transpositionen kann man nicht durch Drehungen erhalten, weil diese immer mehr als zwei Punkte verändern.
  - Sie lassen sich als Spiegelungen an einer Ebenen durch eine Kante und die gegenüberliegende Kantenmitte realisieren.
  - Damit gibt es zu jeder Kante eine zugehörige Transposition:
    - (12)
    - (13)
    - (14)
    - (23)
    - (24)
    - (34)

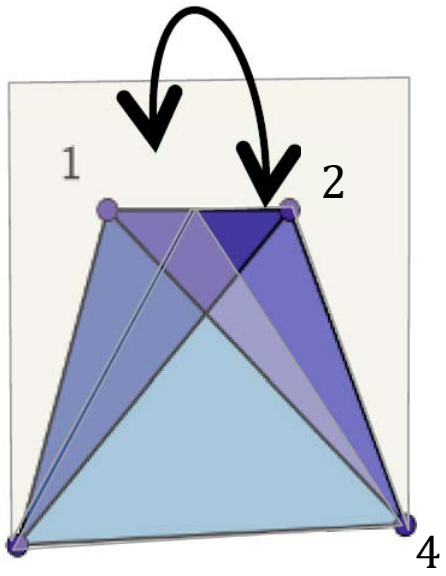
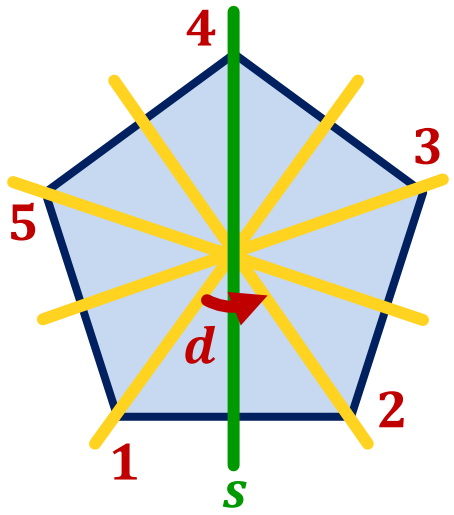


Abbildung aus Leuders, T. (2016). Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbständigen Erarbeiten. Berlin: Springer Spektrum, S. 80

- **Viererzykeln**
  - Viererzykeln lassen sich erzeugen, indem man eine Ebenenspiegelung (Transposition) und eine Drehung um 120° um eine Achsen, die durch einen Eckpunkt und die Mitte der gegenüberliegenden Seite verläuft, verkettet.
    - $(123) \circ (34) = (1234)$
    - $(124) \circ (34) = (1243)$
    - $(132) \circ (24) = (1324)$
    - $(134) \circ (24) = (1342)$
    - $(142) \circ (23) = (1423)$
    - $(143) \circ (23) = (1432)$
- **Einerzykel**
  - Hinzu kommt (1), die identische Abbildung.
- **Die 24 Permutationen bilden die ganze S_4.**
  - Es gilt: $D_4 < S_4$

Diedergruppen D_n ↔ Symmetrische Gruppe S_n

- **Zusammenhang zwischen Diedergruppe D_n und Symmetrischer Gruppe S_n**
  - Die Beispiele $D_3 = S_3$ und $D_4 < S_4$ deuten darauf hin, dass man Diedergruppen als Untergruppen von Symmetrischen Gruppen auffassen kann.
  - Zum Beispiel ist D_5 mit 10 Elementen eine Untergruppe von S_5 mit $5! = 120$ Elementen.
    - Hier ist z.B. (12345) eine Drehung um 72° und
    - $(12)(35)$ eine Spiegelung an einer Achse durch den Punkt 4.



- **Nutzen von Permutationen**
  - Mithilfe von Permutationen kann man schnell untersuchen, mit welchen Abbildungen die gesamte Diedergruppe D_n oder mit wie vielen und welchen elementaren Permutationen man sogar die ganze Symmetrische Gruppe S_n erzeugen kann.
  - Endliche Gruppen lassen sich grundsätzlich gut anhand ihrer Permutationen analysieren.
  - Nicht nur die Diedergruppen sind Untergruppen von Symmetrischen Gruppen. Es ist sogar jede endliche Gruppe Untergruppe einer Symmetrischen Gruppe.