Grundvorstellungen zu Brüchen aufbauen mit WABIs

Bruchzahlen und Bruchrechnung verständnisorientiert unterrichten

Prof. Dr. Jürgen Roth

15.11.2023 Tag der Mathematik, RPTU in Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Grundvorstellungen zu Brüchen aufbauen mit WABIs

1. Grundvorstellungen aufbauen: Beitrag von Material wie WABIs
2. Grundvorstellungen zu Bruchzahlen
3. Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen
4. WABIs selbst erkunden
5. Veranstaltungsfeedback

1

Grundvorstellungen aufbauen: Beitrag von Material wie WABIs

WLAN:	uni-landau
Benutzername:	ml-user@uni-landau.de
Passwort:	mlmim_tablets_2022

Grundvorstellungen

Grundvorstellungen

- sind tragfähige Vorstellungen zu einem mathematischen Begriff bzw. Sachverhalt die diesem Sinn geben und Verständnis ermöglichen
- sind didaktische Leitlinien, die geeignete Deutungsmöglichkeiten für einen mathematischen Inhalt oder ein mathematisches Verfahren beschreiben
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungszusammenhängen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel
- sind die Grundlage inhaltlichen Verständnisses

vom Hofe & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. *Mathematik lehren, 236*, 2-7

Ausbilden von Grundvorstellungen: Ziele

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Erfassen der Bedeutung des Begriffs/Verfahrens	• Anknüpfen an bekannte Situationen oder Handlungsvorstellungen Prototypisches Beispiel als Verständnis-anker
Aufbauen von mentalen Repräsentationen	• Ermöglichen operativen Handelns auf der Vorstellungsebene
Anwenden in neuen Situationen	• Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen • Modellieren des Phänomens mit Hilfe der mathematischen Struktur

Vgl. vom Hofe, R. (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren 118*, 4-8

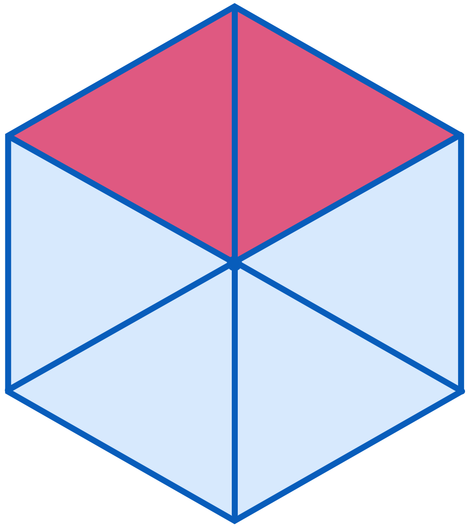
Verständnisanker

Verständnisanker

- Ein Verständnisanker ist eine prototypische Situation, an der Grundvorstellungen und ein damit verbundener Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt ausgebildet werden.
- Prototypisch meint, dass alle wesentlichen Strukturelemente zum Verständnis des mathematischen Sachverhalts in dieser Situation vorkommen und daran gedeutet werden können.
- Eine Situation eignet sich insbesondere dann als Verständnisanker, wenn sie leicht durchschaut werden kann.
- Lernende können einen Verständnisanker aufbauen und in neuen Situationen, in der derselbe mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, darauf zurückkommen und, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

Beispiel

Ein Verständnisanker für Grundvorstellungen zu Brüchen und dem Bruch-Rechnen können WABIs sein.



 Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. *ml*, *236*, 6-9

Arbeit mit Materialien wie z.B. WABIs

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Material

Situationen mit Material erkunden und „begreifen“

Konzepte am Material erarbeiten

Skizze

Strukturen in Skizzen festhalten

Komplexere Zusammenhänge an Skizzen erarbeiten

Denk-Modell

Aufbau mentaler Repräsentationen – auch durch Abgleich mit Skizzen/Material

Ablösen von Material und Skizzen

Mentales Operieren

2

Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

WLAN:	uni-landau
Benutzername:	ml-user@uni-landau.de
Passwort:	mlmim_tablets_2022

Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

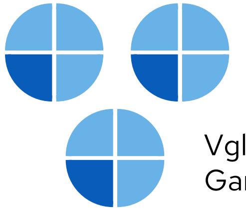
Eine Drei-viertel-Torte

Teil eines Ganzen

$\frac{3}{4}$ (von 1)

Resultat einer Division

$\frac{3}{4} = 3 : 4$



Vgl. Teil mehrerer Ganzer (Padberg)

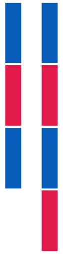
Relativer Anteil

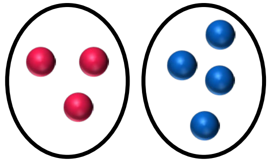
$\frac{3}{4}$ von …

$\frac{3}{4}$

Verhältnis

$\frac{3}{4} = 3 : 4$ (3 zu 4)





Vergleichsoperator

$\frac{3}{4}$ mal so viel wie …

Quasikardinalzahl

$\frac{3}{4} = 3$ Viertel

2 Viertel + 3 Viertel
= 5 Viertel

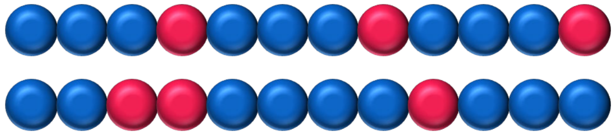
Absoluter Anteil

$\frac{3}{4}$ … … drei von vier

Nur wenn nicht gerechnet wird!

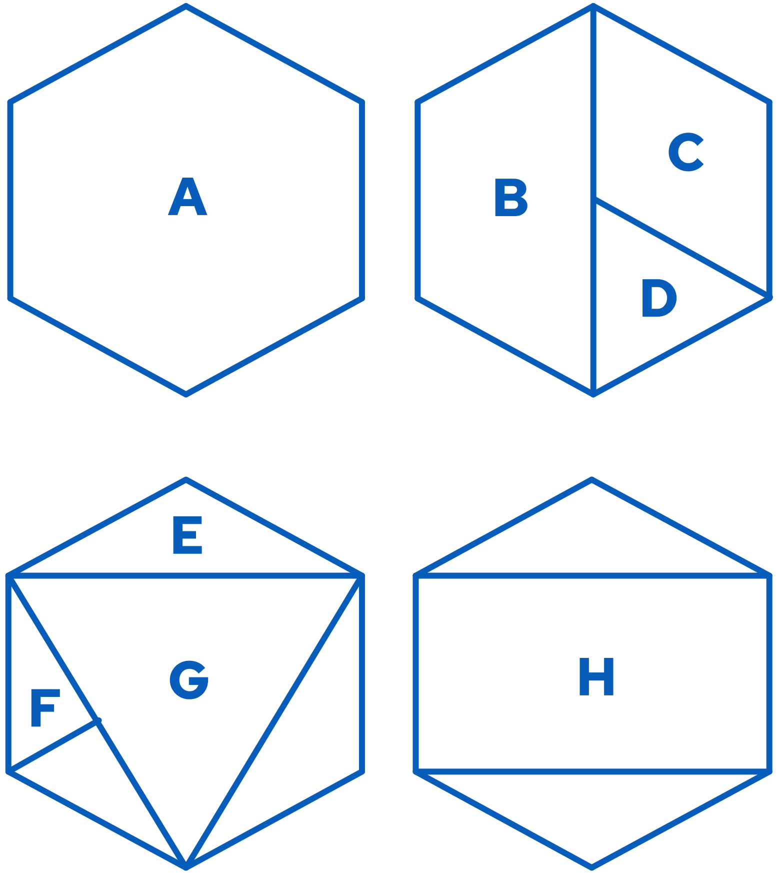
Quasiordinalzahl

$\frac{1}{4}$ … … jeder vierte



 Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren*, *123*, 4-8

WABIs?!



WABIs

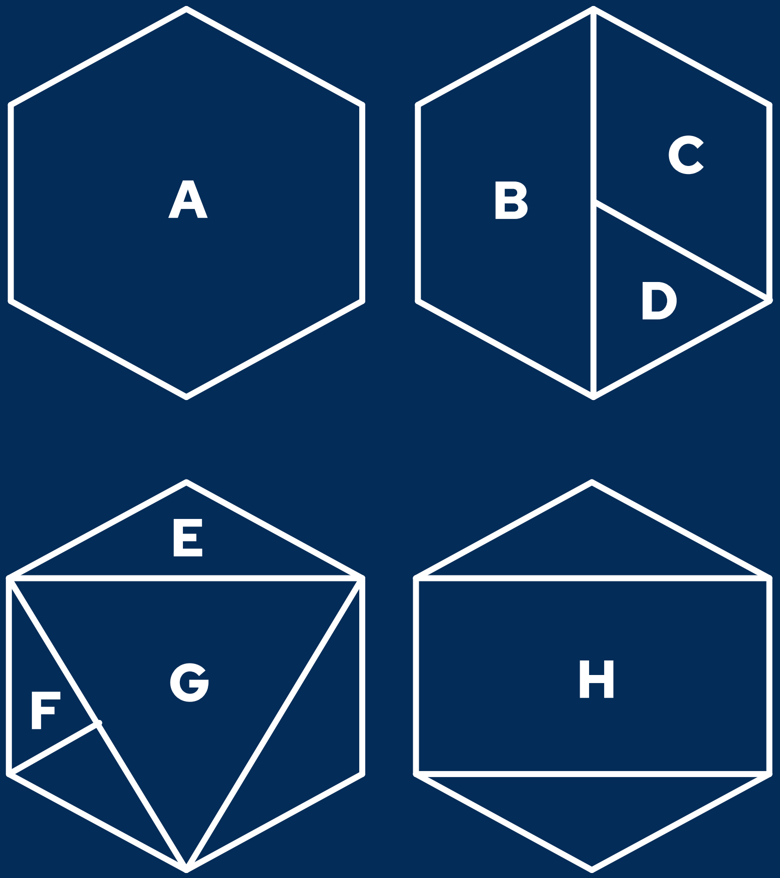
- (Regelmäßiges) Sechseck **A**
- (gleichschenkliges) Trapez **B**
- Raute **C**
- mittleres (gleichseitiges) Dreieck **D**
- langes (stumpfwinklig-gleichschenkliges) Dreieck **E**
- kleines (rechtwinkliges) Dreieck **F**
- großes (gleichseitiges) Dreieck **G**
- Rechteck **H**

Roth, J. (2009). Eine geometrische Lernumgebung – Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüchen. In: Fritz-Stratmann, A.; Schmidt, S. (Hrsg.) (2009). *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I – Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden*. Weinheim: Beltz Verlag, S. 186-200

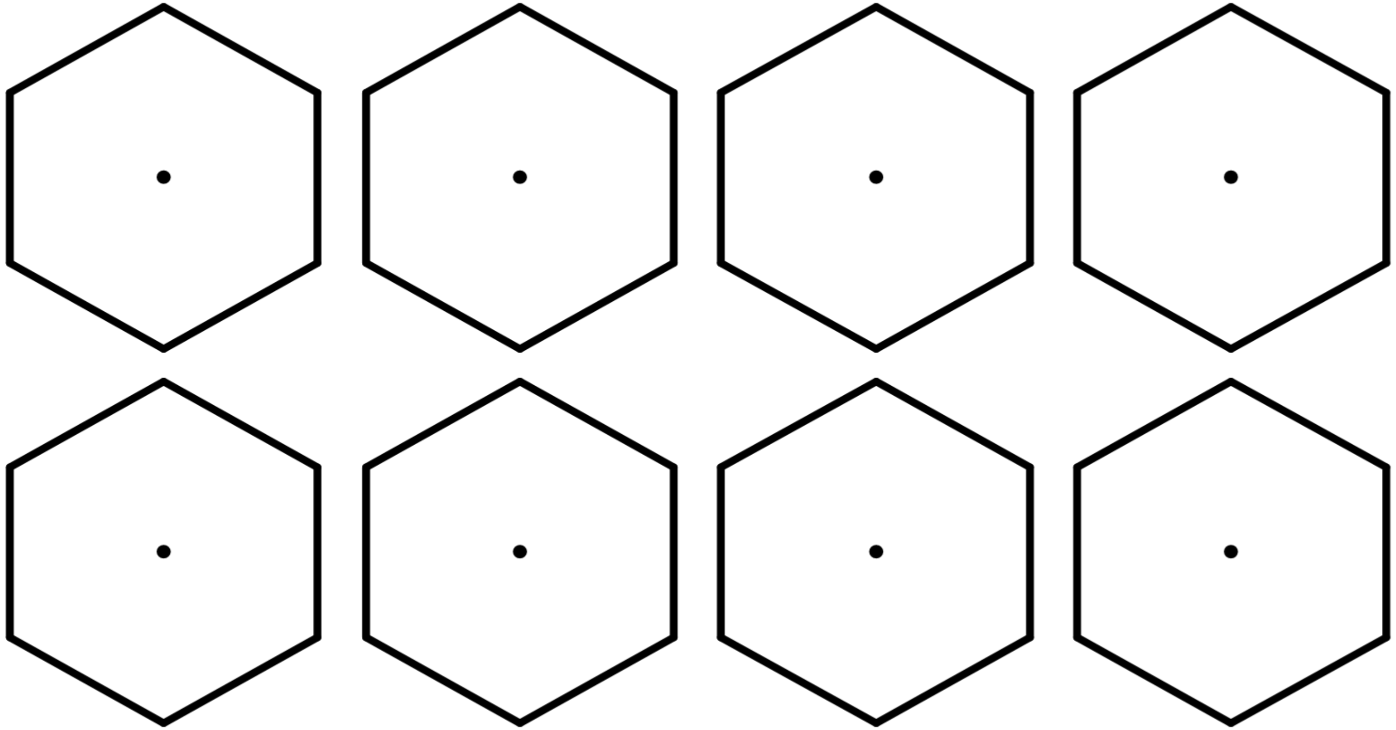
Roth, J. (2009). *Grundverständnis für Bruchzahlen aufbauen mit „WABIs": Ein Anschauungsmittel auf der Basis eines regelmäßigen Sechsecks.* Ein Bastelbogen für WABIs ist enthalten

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

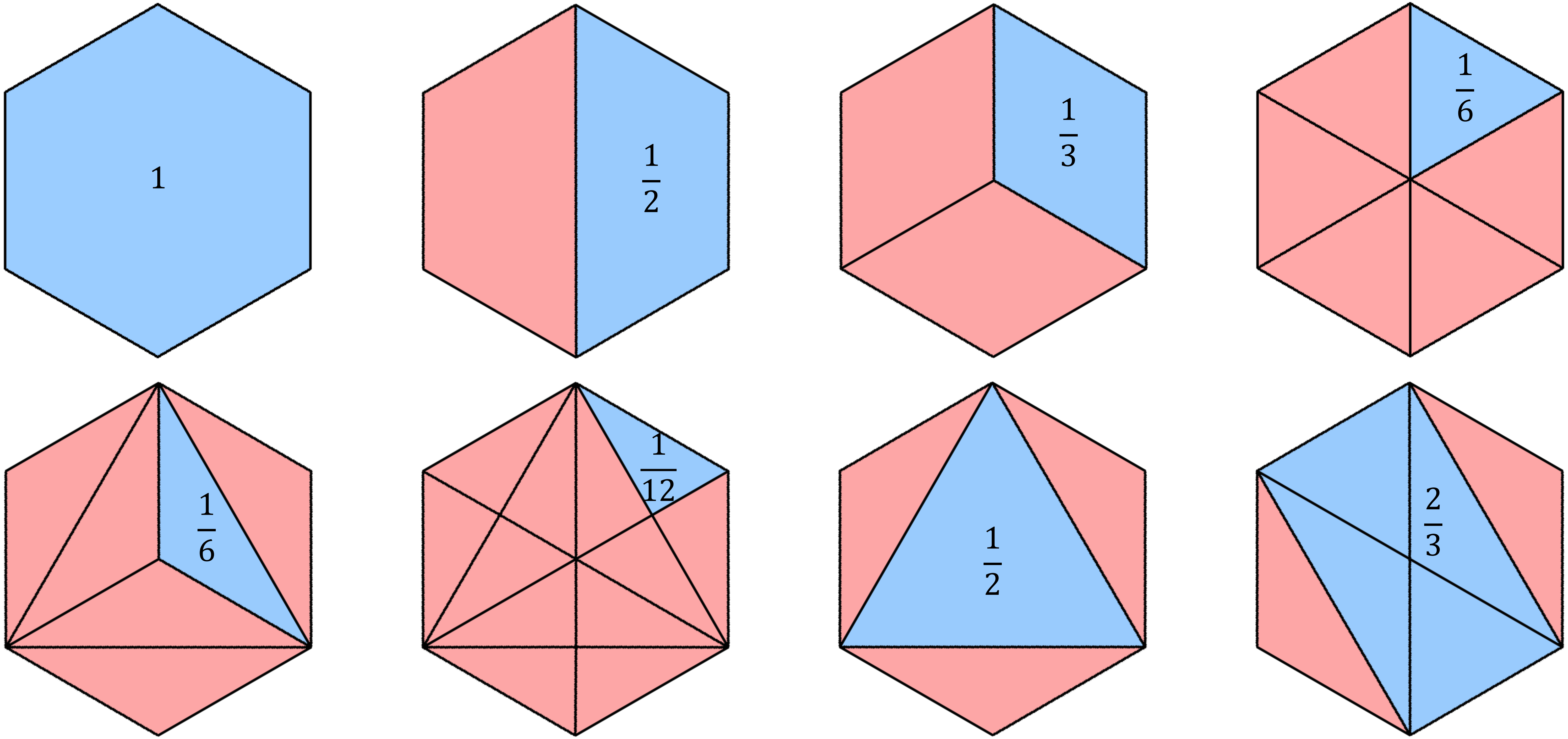
Teil eines Ganzen



WABI-Typ	A	B	C	D	E	F	G	H
Anzahl der zum Auslegen des Sechsecks benötigten Teile							–	–
Bruchteil von **A**								

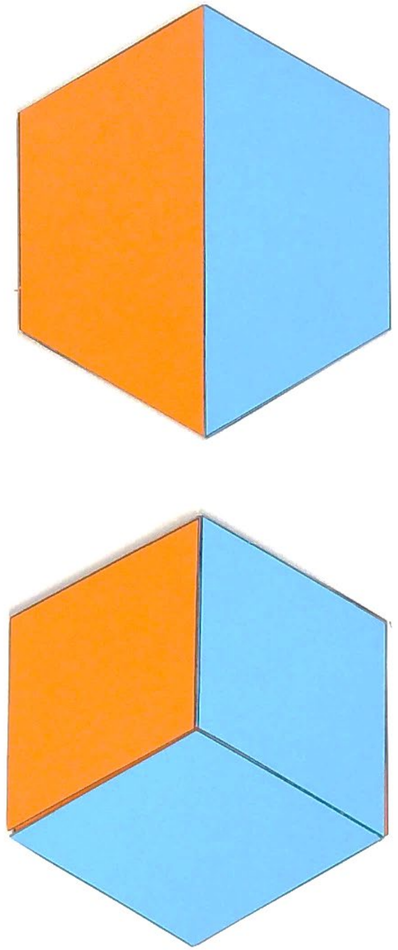


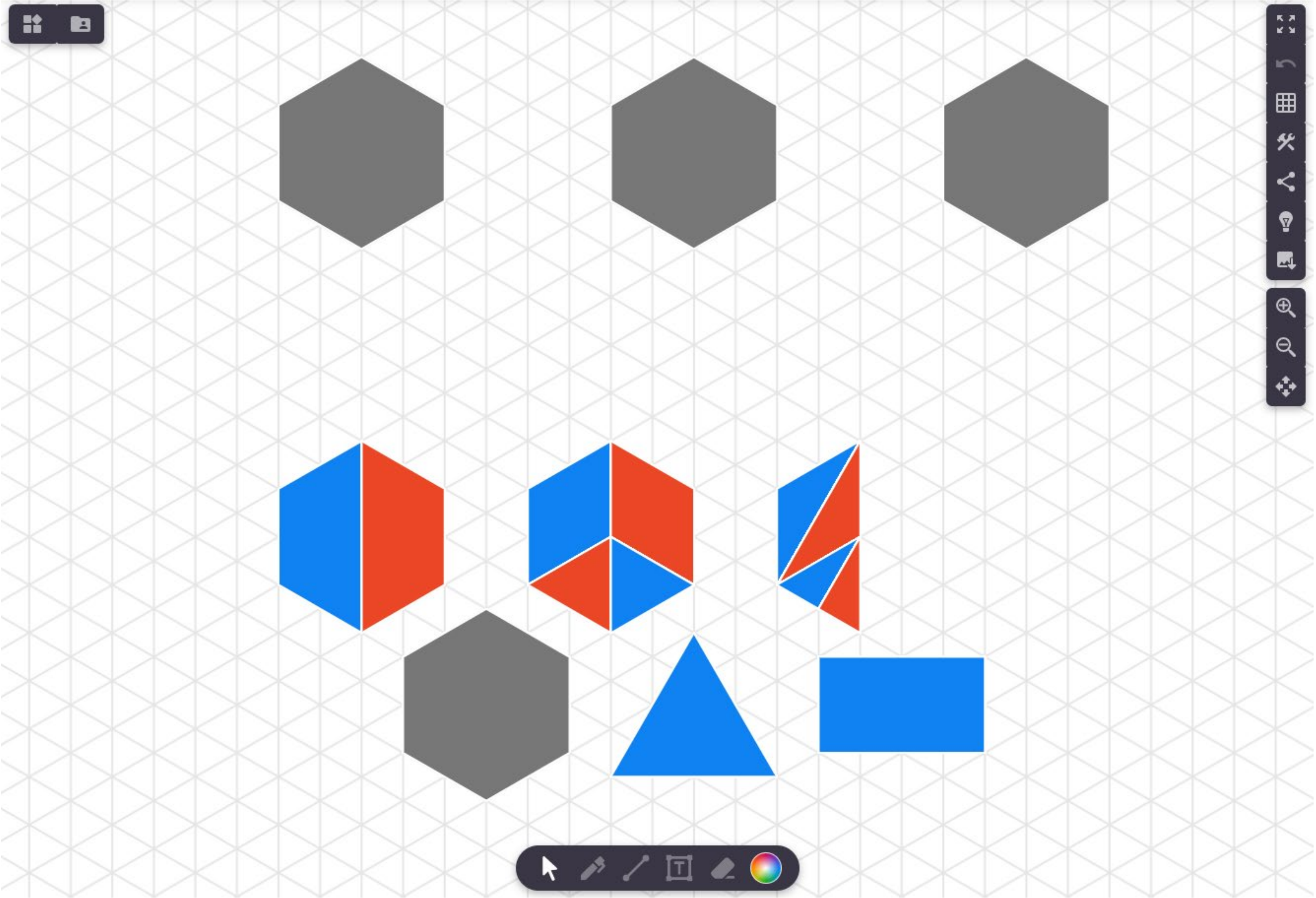
Teil eines Ganzen



WABIs – Analog und digital

Filz-WABIs: www.rittel-verlag.de





Roth, J. (2009). Grundverständnis für Bruchzahlen aufbauen mit „WABIs":
Ein Anschauungsmittel auf der Basis eines regelmäßigen Sechsecks.
Ein Bastelbogen für WABIs ist enthalten

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

Multiplikative Anteilsbildung

Lilly nimmt sich die Hälfte der dargestellten Tafel Schokolade.
Davon isst sie $\frac{3}{5}$ auf.
Wie viele Stücke hat sie gegessen?

Welche Grundvorstellungen nutzen Sie zur Lösung?

Wartha, S., vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *Mathematik lehren 128*, 10-16

Multiplikative Anteilsbildung

Moritz: Also da muss man erst ausrechnen, wie viel die Hälfte ist. Das sind dann zehn solche viereckigen Dinger. Und dann muss man noch drei Fünftel von zehn irgendwie ausrechnen. Also wie viel drei Fünftel von zehn solchen Dingern ist.

Interviewer: Du kannst dir das jetzt gern alles auf-schreiben, was du so im Einzelnen rechnest. (Moritz schreibt und überlegt.) Welchen Teil willst du …, oder überlegst du gerade?

Moritz: Wie ich das jetzt, … drei Fünftel von zehn solchen Dingern wissen soll. Weil es ist ja die Hälfte, ah, da kann man ja ein Halb schreiben. Nein. (Moritz überlegt)

Interviewer: Was heißt denn für dich das drei Fünftel von zehn Stück?

Moritz: Ich weiß nicht. Ich kann mir da nix drunter vorstellen.

Interviewer: Du versuchst das jetzt rechnerisch zu lösen …

Moritz: Ja.

Interviewer: Kannst du das vielleicht mit dieser dargestellten Tafel Schokolade irgendwie graphisch lösen, zum Beispiel durch Wegstreichen …

Moritz: Ich müsste halt dann wissen, wie viel ungefähr drei Fünftel ist …

Wartha, S., vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *Mathematik lehren 128*, 10-16

Multiplikative Anteilsbildung

Sophia: … ein Fünftel ist ja jetzt 0,2. Dann sind zwei Fünftel 0,4 und drei Fünftel, ehm, 0,6. Und die Hälfte, also ein Halb, sind dann …

(überlegt)

Also weil das ja das Ganze ist, ist es dann zwei Zweitel. Also ist es gleich eins. Und, ehm, … das ist 0,5, also die Hälfte. Und dann noch 3,5 …

(meint offensichtlich den Bruch drei Fünftel)

… das ist also 0,6 glaub ich. Und da muss man dann also, zehn …

(überlegt)

… mmm.

$10 : 0{,}6$

Interviewer: Wieso jetzt geteilt durch null Komma sechs? Und nicht mal oder plus oder minus?

Sophia: Ja weil, dann wär's ja mehr und das muss ja immer weniger werden, weil sie isst ja nicht mehr, als Tafel da ist.

$10 : 0{,}6$

$100 : 6 = 16{,}\overline{666}$

$$\begin{array}{l}
100 : 6 = 16{,}\overline{666} \\
-6 \\
\hline
\ \ 40 \\
-36 \\
\hline
\ \ \ \ 40 \\
\ \ -36 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ 40
\end{array}$$

$1{,}\overline{6666}$

2

$20 : 2 = 10$

Wartha, S., vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *Mathematik lehren 128*, 10-16

Ordnung und Dichte von Bruchzahlen

Bruch

- Gibt es einen Bruch, der größer als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\frac{1}{2}$ ist?

Getränkepackung

- Eine Firma stellt Einwegverpackungen für Erfrischungsgetränke in zwei verschiedenen Größen her.
- Um das Angebot abzurunden, soll eine weitere Verpackung angeboten werden.
- Das Volumen der neuen Packung soll größer sein als das der Dose und kleiner als das der Flasche.

Ordnung und Dichte von Bruchzahlen

Kilian: Ich würd' erst mal nach einer Zwischenzahl suchen.

Interviewer: OK.

Kilian: Ein Eintel kann es nicht sein, weil das kleiner ist als $\frac{1}{2}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. Er muss größer als $\frac{1}{3}$ sein und kleiner als $\frac{1}{2}$.

Interviewer: Ob es überhaupt einen gibt ist da ja die Frage.

Kilian: Ach so … Nee.

Interviewer: Nicht. Warum nicht?

Kilian: Ich schau einfach unten auf die beiden Zahlen, 3 und 2 und dazwischen kenn' ich keine Zahl.

Florian: Nee, ich glaub nicht.

Interviewer: Warum nicht? Kannst du das versuchen zu erklären?

Florian: Ja $\frac{1}{3}$ ist ja schon größer als $\frac{1}{2}$.

Interviewer: Was bedeutet der Bruch $\frac{1}{3}$? Oder warum ist $\frac{1}{3}$ größer als $\frac{1}{2}$?

Florian: Nee, eigentlich ist es genauso groß.

Interviewer: Da wäre die Frage trotzdem, warum ist das genauso groß? Kannst du das irgendwie erklären? Was stellst du dir da drunter vor?

Florian: Das hier sind 3 Teile und das hier sind 2, aber es ist halt insgesamt gleichgroß.

Wartha, S., vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *Mathematik lehren 128*, 10-16

Häufige Grundvorstellungsdefizite

Grundvorstellungsdefizite

- Fehlende oder nur in Ansätzen vorhandene Vorstellungen zum Bruchzahlbegriff
- Keine inhaltliche Vorstellung zur Addition von ungleichnamigen Brüchen
- Nicht entwickelte Vorstellungen zur Multiplikation und Division von Bruchzahlen
- Unreflektierte Übertragung von intuitiven Annahmen aus den natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen
- Falsche Orientierung an Nenner oder Zähler beim Ordnen und Vergleichen von Brüchen

Gegenmaßnamen

Kontexte und Grundvorstellungen

- Einführung neuer Begriffe mit Kontexten verbinden, in denen die wichtigen Grundvorstellungen zum Tragen kommen.

Produktive Übungsphasen

- Übersetzungsprozesse zwischen Grundvorstellungen fordern und fördern. → Grundvorstellungen können sich ausbilden und stabilisieren.

Bedeutungsänderungen

- Bedeutungsänderungen bewusst machen bzw. von der Notwendigkeit einer Neubewertung alter Vorstellungen überzeugen (z. B. durch Aufgaben, die zum Nachdenken anregen; Kognitiver Konflikt).

3 Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen

WLAN:	uni-landau
Benutzername:	ml-user@uni-landau.de
Passwort:	mlmim_tablets_2022

„Brüche bei den Brüchen“

Kardination

- Eine Zahl und eine Rechenaufgabe beantworten immer eine Frage nach „wie viele?”.

Eineindeutigkeit zwischen Zahl und Zahlzeichen

- Jede Zahl hat genau eine Zahlbezeichnung.
- Visuell: Folge von Ziffern
- Auditiv: Folge von Grundzahlwörtern (mit Stellenwertangabe)

Diskrete Ordnung

- Jede Zahl hat einen Nachfolger und – außer der kleinsten Zahl – einen Vorgänger.
- Die Menge der Zahlen ist wie eine Kette mit Anfang, aber ohne Ende.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren 123*, 10-13

„Brüche bei den Brüchen“

Rechnen

- Jede Elementaroperation $a + b$, $a - b$ (wenn $a > b$), $a \cdot b$ und $a : b$ (wenn b Teiler von a) ist, bei in der Ziffernsprache gegebenen a und b, **unmittelbar durchführbar** und liefert wieder eine Zahl in der üblichen Ziffernsprache.

Einschränkung der Division

- Die Division $a : b$ ist nicht immer restlos möglich.
- Wenn sie möglich und der Teiler ungleich 1 ist, dann ist das Ergebnis kleiner als die geteilte Zahl.

Multiplikation und Ordnung

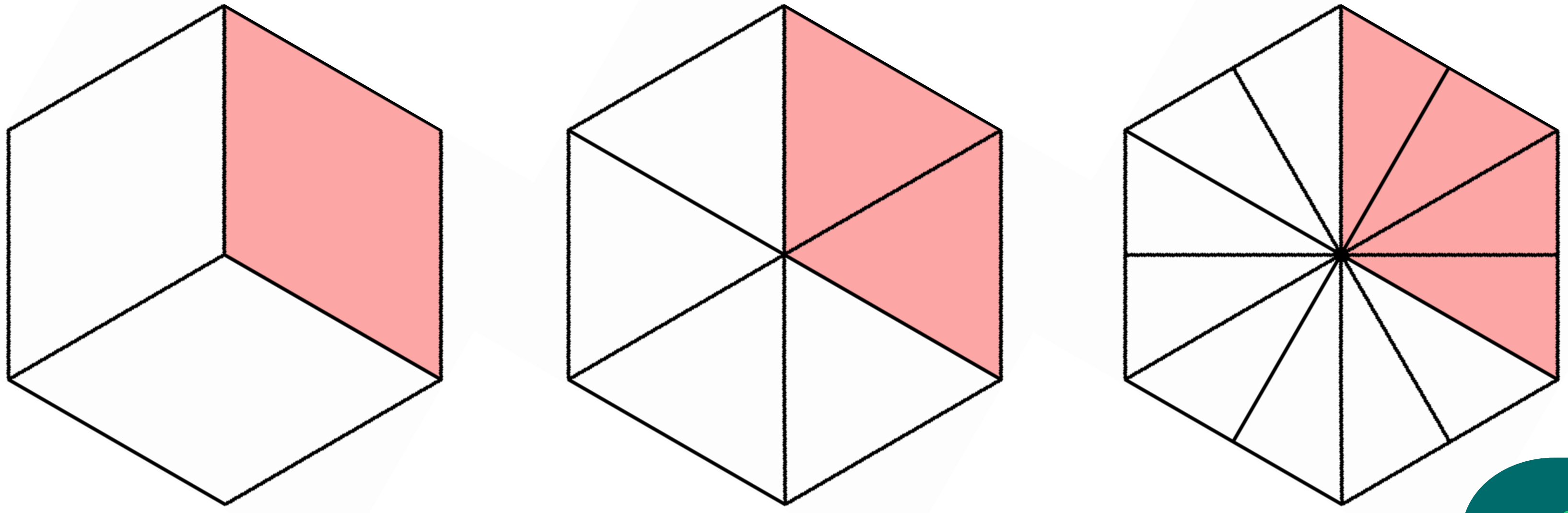
- Multiplizieren als „starkes“ Vermehren
- Multipliziert man zwei Zahlen, die ungleich 0 oder 1 sind, so ist das Ergebnis größer als jede der beiden Zahlen.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren 123*, 10-13

Erweitern und Kürzen

Erweitern
Bruchstück
und das Ganze
feiner unterteilen
(**Verfeinern**)

Erweitern als Verfeinern der Einteilung



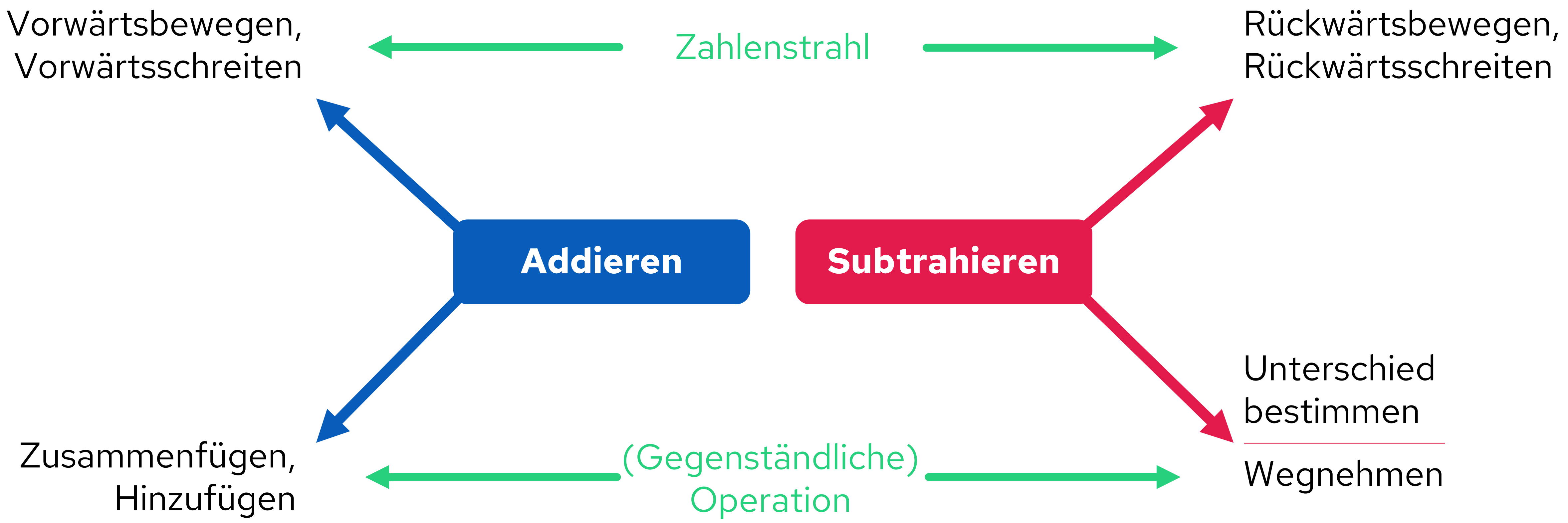
$$\frac{1}{3} \qquad \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} \qquad \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{4}{12}$$

Kürzen
Bruchstück
und das Ganze
gröber unterteilen
(**Vergröbern**)

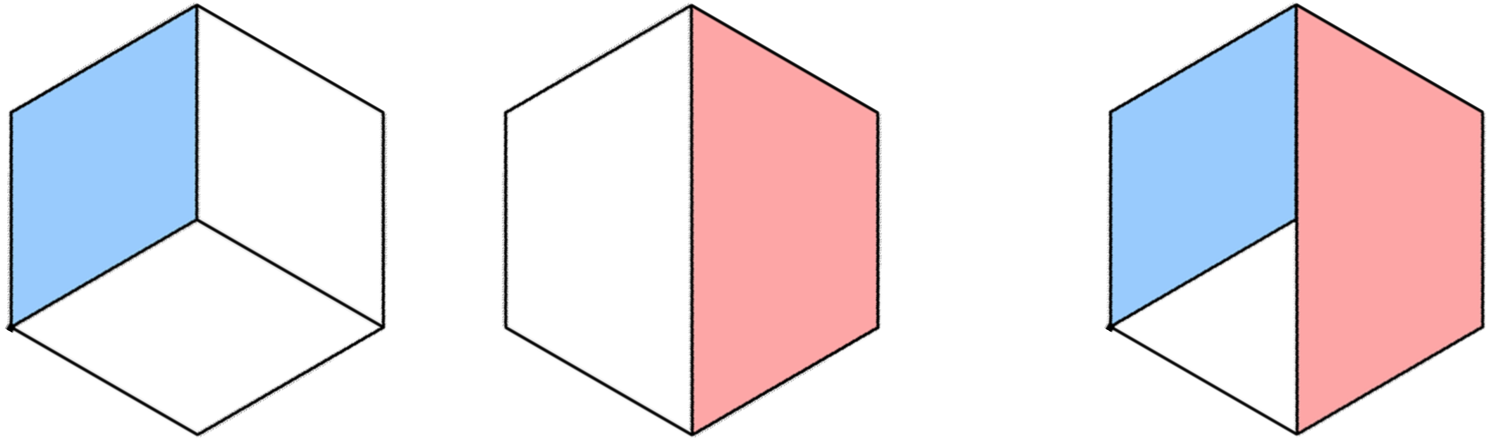
Kürzen als Vergröbern der Einteilung

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

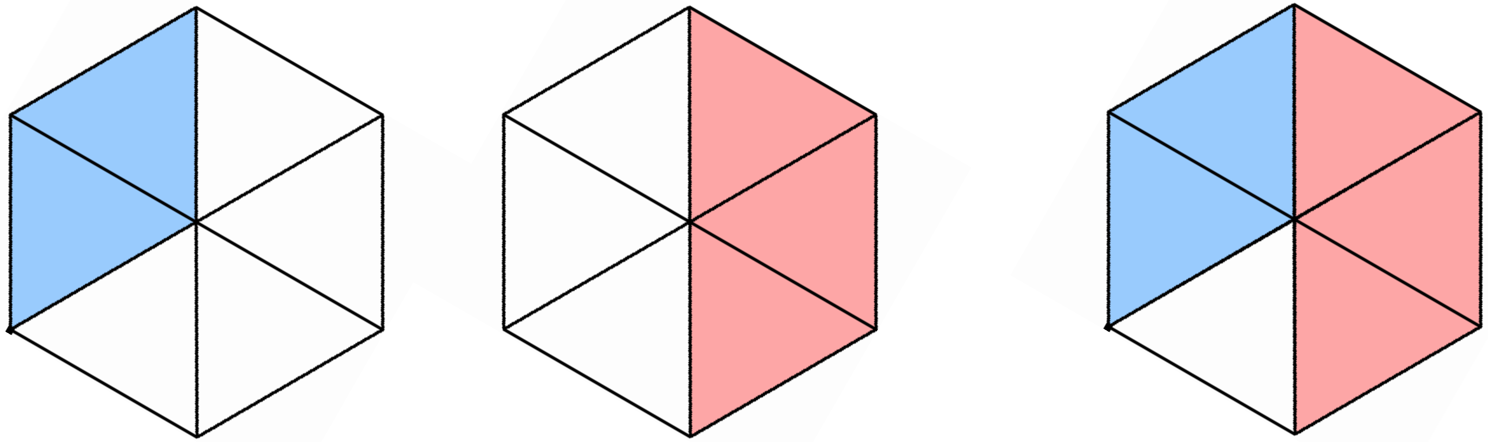
Addition und Subtraktion von Bruchzahlen



Addieren von Brüchen: Zusammenfügen



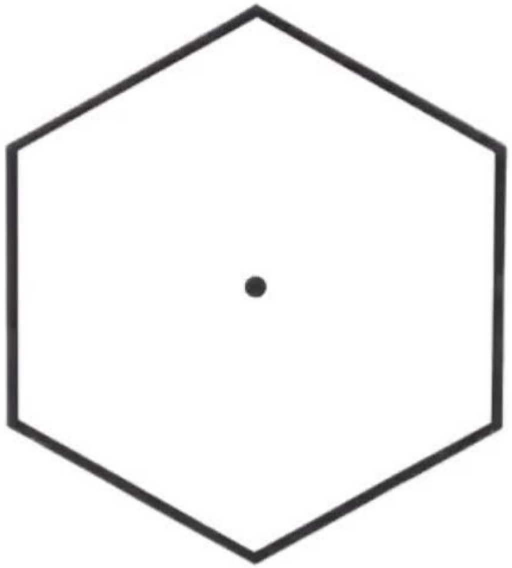
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = ?$$



$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

Subtrahieren von Brüchen: Wegnehmen

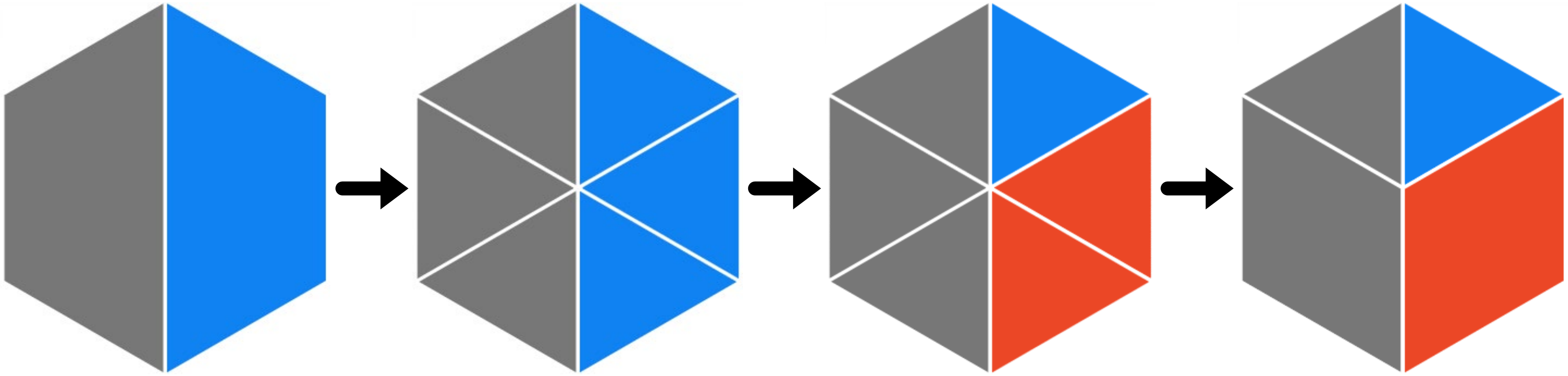


Multiplizieren von Brüchen: Von-Deutung

In einem Produkt wie $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ wird der erste Faktor als Operator (zwei Drittel von …) und der zweite Faktor als WABI interpretiert.

- Zeichnen Sie den zweiten Faktor als WABI und nehmen Sie die Operation durch Einzeichnen von Trennlinien vor.
- Schraffieren Sie das Ergebnis und geben Sie dessen Wert an.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \text{ von } \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



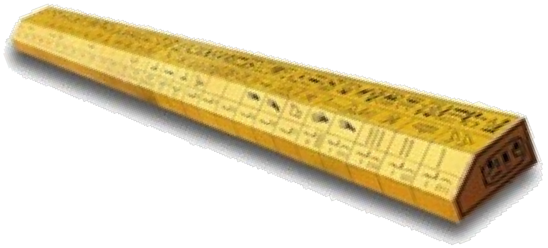
Division bei Bruchzahlen

$\frac{4}{9} : 2$

$\frac{7}{2} : \frac{7}{10}$

Teilen
(Verteilen)

Messen
(Aufteilen)



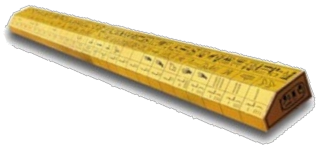
Maß kleiner als die zu messende Größe.

- **Beispiel:** $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$
- **Zugehörige Frage:**
  Wie oft passt $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{4}$?

Maß Größer als die zu messende Größe.

- **Beispiel:** $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$
- **Zugehörige Frage:**
  Welcher Bruchteil von $\frac{3}{4}$ passt in $\frac{1}{4}$?

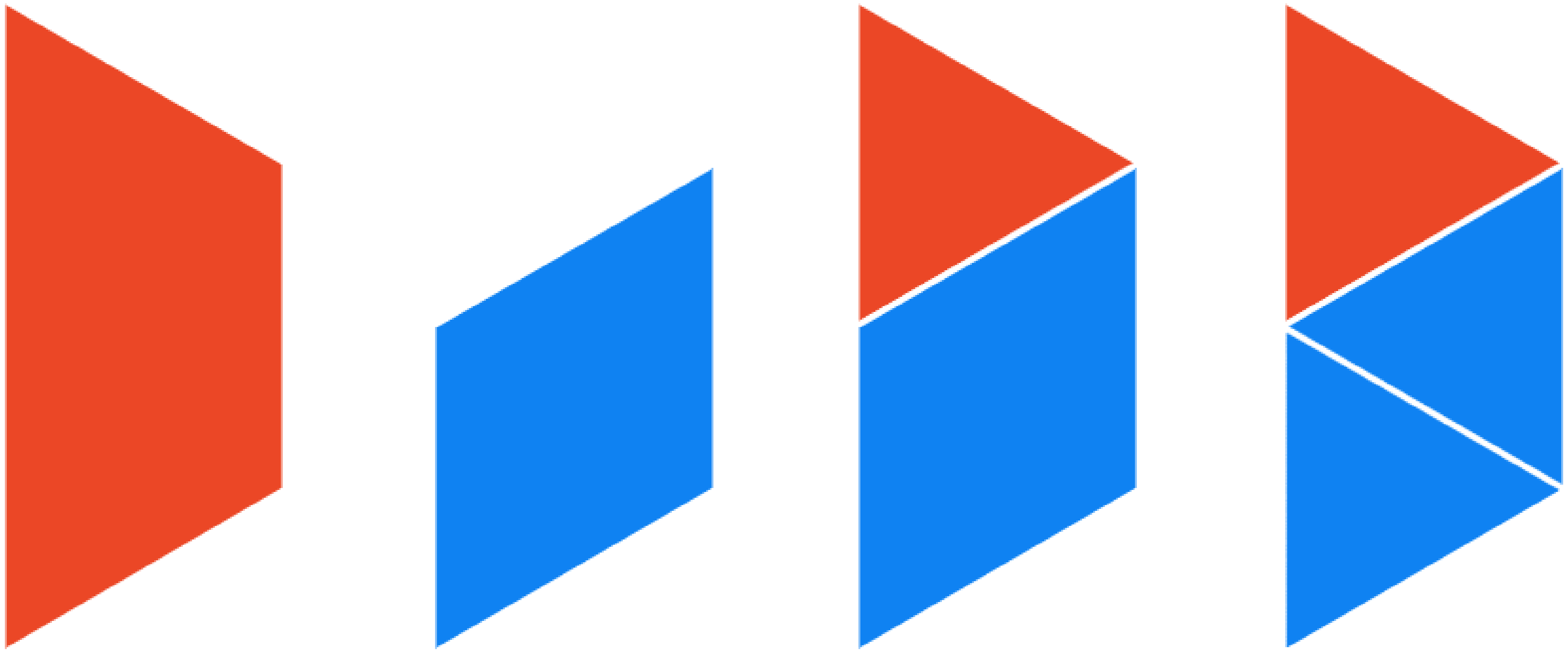
Malle (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren 123*, S. 4-8



Dividieren von Brüchen: Messen

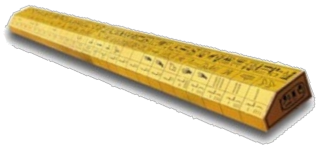
$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = ?$

Maß kleiner als die zu messende Größe. → „Wie oft passt $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$?"



$$\frac{1}{2} \quad : \quad \frac{1}{3} \quad = \quad 1\frac{1}{2} \quad = \quad \frac{3}{2}$$

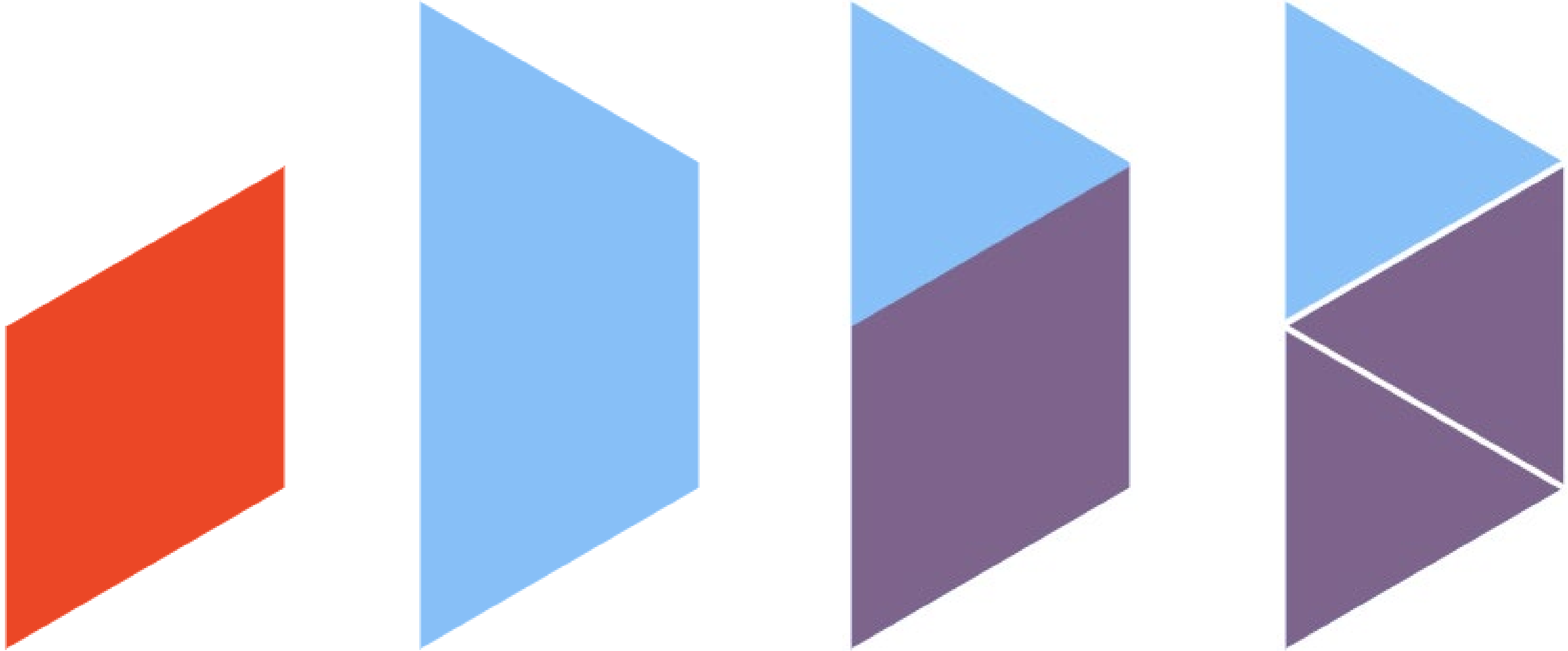
https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ



Dividieren von Brüchen: Messen

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = ?$

Maß größer als die zu messende Größe. → „Wie Bruchteil von $\frac{1}{2}$ passt in $\frac{1}{3}$?“



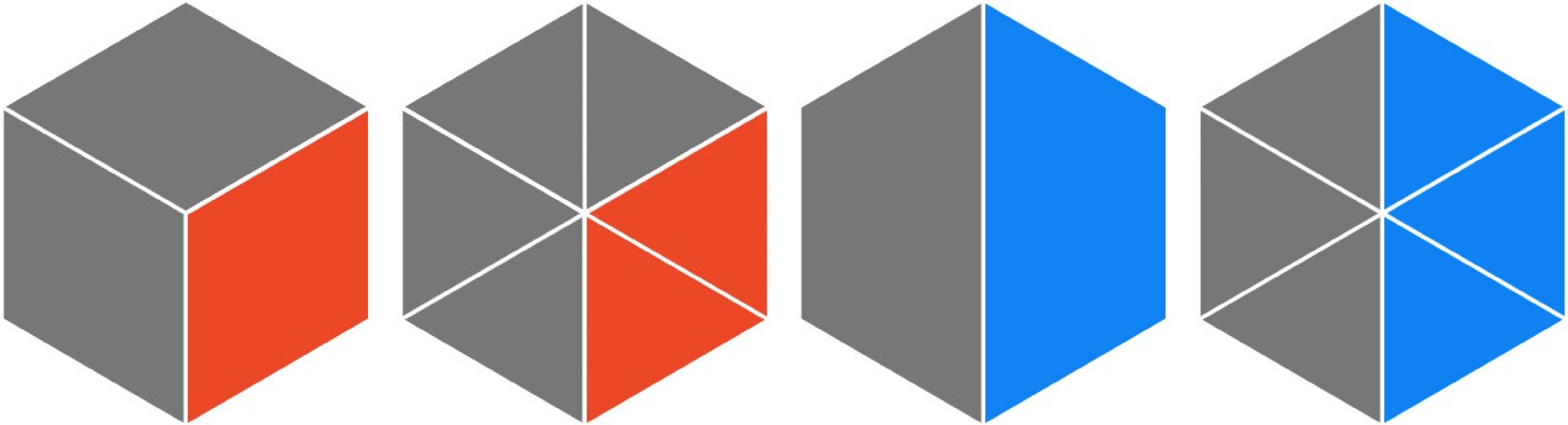
$$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \mathbf{?} = \frac{2}{3}$$

 https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

Dividieren von Brüchen: Messen

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = ?$

Maß größer als die zu messende Größe. → „Wie Bruchteil von $\frac{1}{2}$ passt in $\frac{1}{3}$?"



$$\frac{1}{3} \quad : \quad \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{2}{3}$$

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

4 WABIs selbst erkunden

WLAN:	uni-landau
Benutzername:	ml-user@uni-landau.de
Passwort:	mlmim_tablets_2022

WABI-Stationen des Mathematik-Labors

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

https://mathe-labor.de

	Arbeitsheft		Hilfeheft	
Teil 1	Arbeitsheft	Arbeitsheft	Hilfeheft	Hilfeheft
Teil 2	Arbeitsheft	Arbeitsheft	Hilfeheft	Hilfeheft
Teil 3	Arbeitsheft	Arbeitsheft	Hilfeheft	Hilfeheft

Lehrerinformation Material

WABI 1: Grundvorstellungen zu Brüchen

Bruchzahlen

Ansehen

WABI 1: Grundvorstellungen zu Brüchen

Bruchzahlen

Ansehen

WABI 2: Brüche addieren und subtrahieren

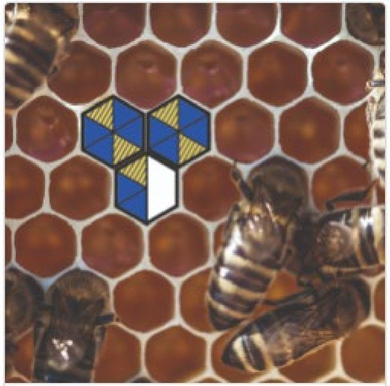
Bruchzahlen

Ansehen

WABI 2: Brüche addieren und subtrahieren

Bruchzahlen

Ansehen



WABI 3: Multiplikation & Division von Bruchzahlen

Bruchzahlen

Ansehen

WABI 3: Multiplikation & Division von Bruchzahlen

Bruchzahlen

Ansehen

MatheWelt 236
Schülerarbeitsheft

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Berres, C., Bolz, L., Burckgard, K., Kempf, F., Engelhardt, A., Ossadnik, H. & Roth, J. (2023). **Anteile bilden und Brüche verstehen mit WABIs.** Mathe-Welt, 236.

Erläuternder Text und grundlegende Aufgaben zu WABIs (EXIs)

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Roth, J. (2009).
Eine geometrische Lernumgebung – Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüchen.
In A. Fritz-Stratmann & S. Schmidt (Hrsg.), Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I – Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden (S. 186-200). Weinheim: Beltz Verlag. ISBN: 978-3-407-62630-1

Roth, J. (2009).
Grundverständnis für Bruchzahlen aufbauen mit „WABIs“: Ein Anschauungsmittel auf der Basis eines regelmäßigen Sechsecks.
Ein Bastelbogen für WABIs ist enthalten.

 https://juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2009/Roth_2009_Geometrische_Lernumgebung_Bruchzahlen.pdf

Erfahrungen und Fragen

WLAN:	uni-landau
Benutzername:	ml-user@uni-landau.de
Passwort:	mlmim_tablets_2022

RPTU

5 Veranstaltungsfeedback

WLAN:	uni-landau
Benutzername:	ml-user@uni-landau.de
Passwort:	mlmim_tablets_2022

Veranstaltungsfeedback

Umfragen: Veranstaltungsfeedback

- https://roth.tel/feedback

Fragen (Es sind mehrere Antworten möglich.)

- Was fanden Sie an der Veranstaltung gut?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)
- Was wünschen Sie sich für die Veranstaltung?
  Freitext (jeweils maximal 250 Zeichen)

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Prof. Dr. Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU

2+

Grundvorstellungen zu Bruchzahlen (Ergänzungen)

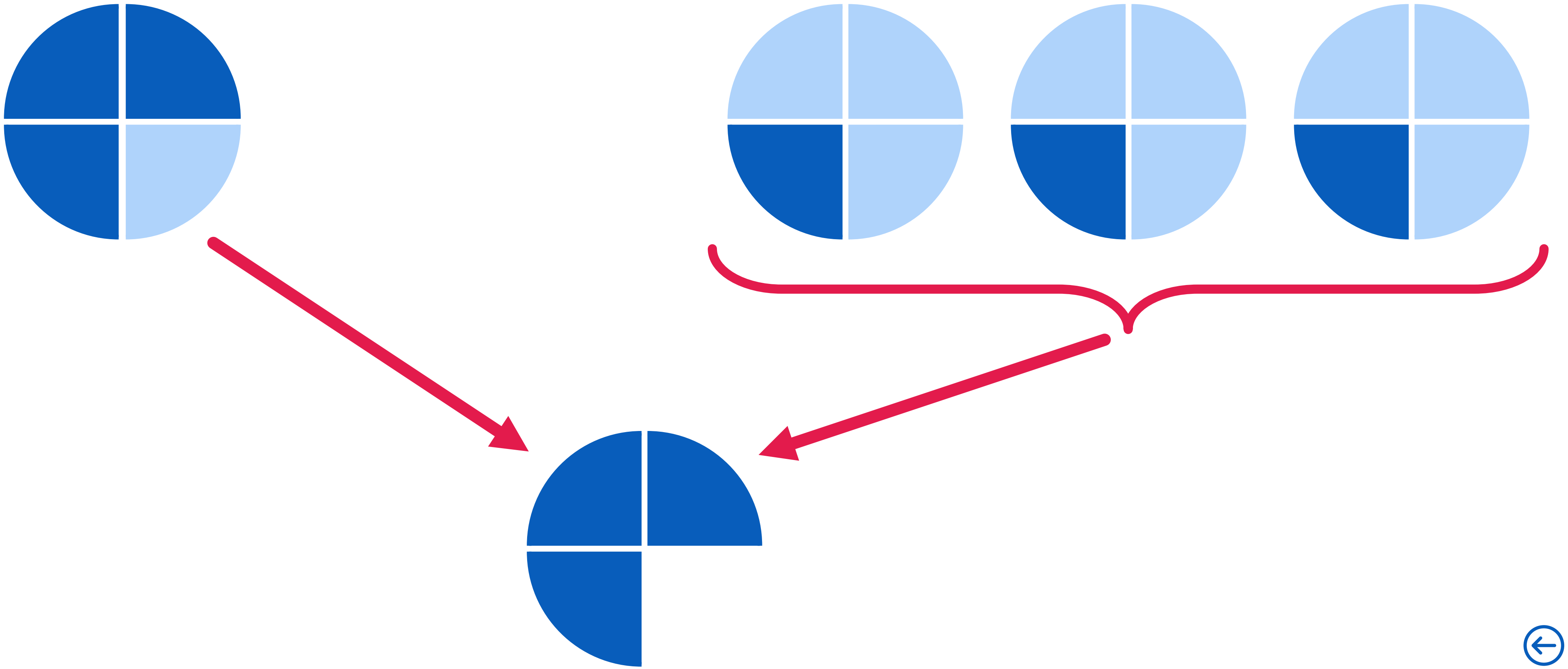
Teil vom Ganzen

Teil eines Ganzen

Drei Viertel einer Pizza nehmen.

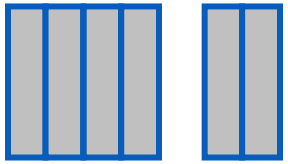
Teil mehrerer Ganzer

Drei Pizzen gerecht an vier Schüler/innen verteilen.



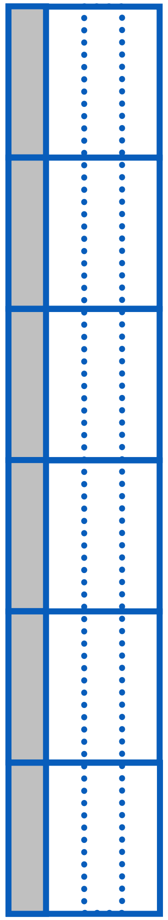
Padberg, Wartha (2017). Didaktik der Bruchrechnung. 5. Auflage, Berlin: Springer Spektrum, S. 28-30

Ausweitung des Standpunkts
„Teil“ ⇔ „Ganzes“



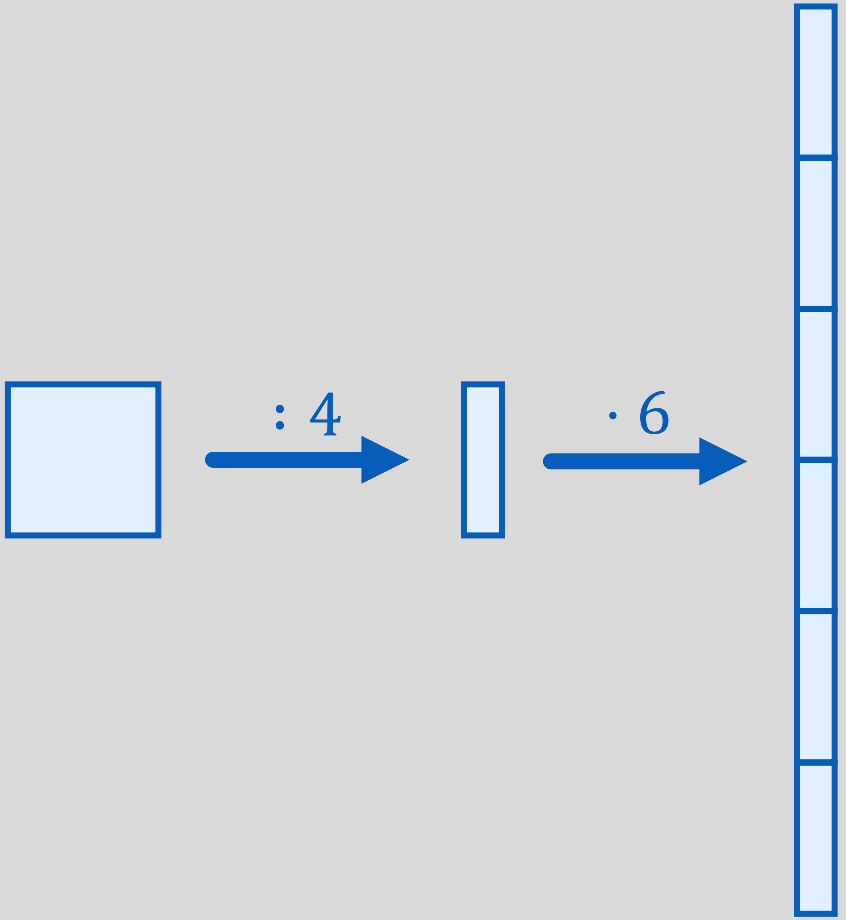
$$\frac{6}{4}$$

Darstellen



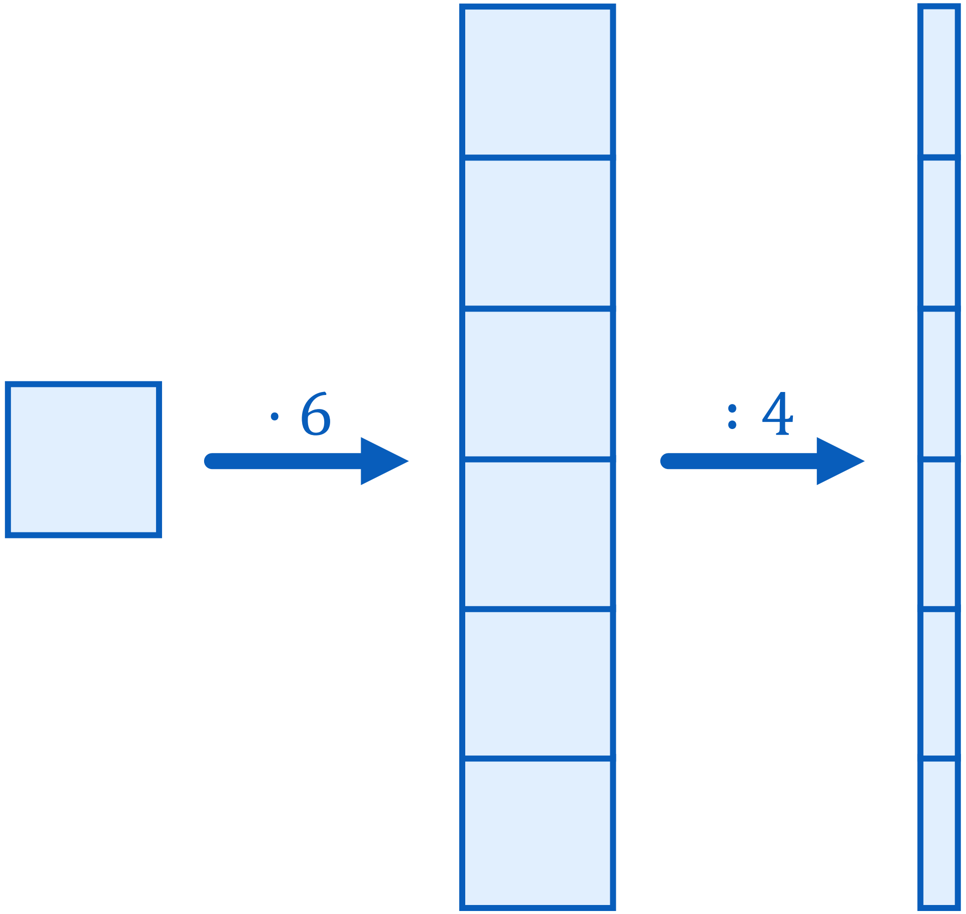
 Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. Mathematik lehren 78, S. 20-16

Ausweitung des Standpunkts
„Teil“ ⇔ „Ganzes“



$$\frac{6}{4}$$

Auflösen in Ketten von Einzel-operatoren



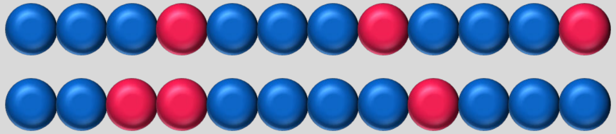
Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. Mathematik lehren 78, 20-16

Bruchzahlaspekte

1. Bruch als Anteil
2. Bruch als Maßzahl $\left(\frac{1}{2}h, \frac{3}{4}kg, \frac{1}{4}km\right)$
3. Bruch als Operator
4. Brüche und Verhältnisse
   („inneres bzw. äußeres Teilverhältnis)
5. Brüche und Quotienten
6. Brüche als Lösung linearer Gleichungen
   $n \cdot x = m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
7. Brüche als Skalenwerte
8. Quasikardinalität

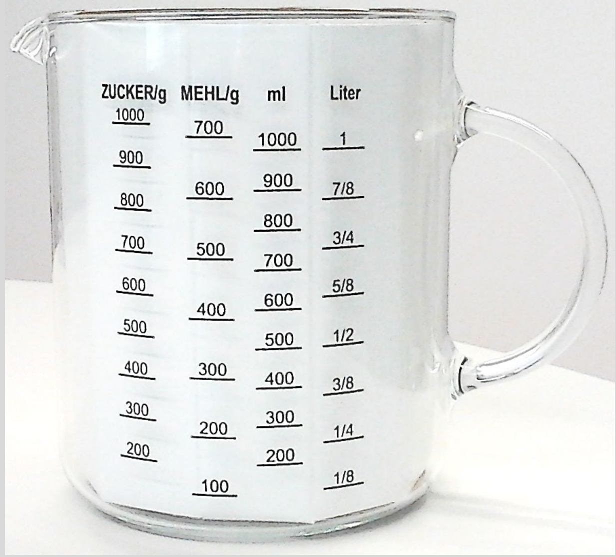
Inneres Teilverhältnis

Die roten Perlen verhalten sich zu den blauen Perlen wie 1 : 3.



Äußeres Teilverhältnis

Je eine von vier Perlen ist rot, je drei von vier Perlen sind blau.



 Padberg, F. & Wartha, S. (2017). Didaktik der Bruchrechnung. Spektrum Akademischer Verlag, S. 20-31

Brüche vergleichen

$\frac{5}{8} \quad \frac{5}{10}$

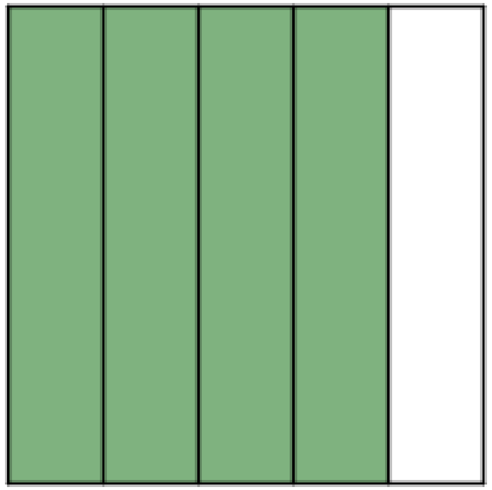
$\frac{3}{4} \quad \frac{2}{4}$

$\frac{8}{9} \quad \frac{7}{6}$

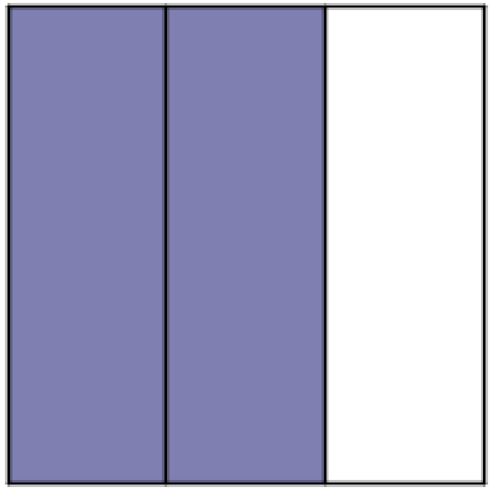
$\frac{3}{7} \quad \frac{5}{8}$

- zählergleiche Brüche
  → Größe der Teile
- nennergleiche Brüche
  → Anzahl der gleichen Teile
- mit 1 vergleichen
- mit $\frac{1}{2}$ vergleichen

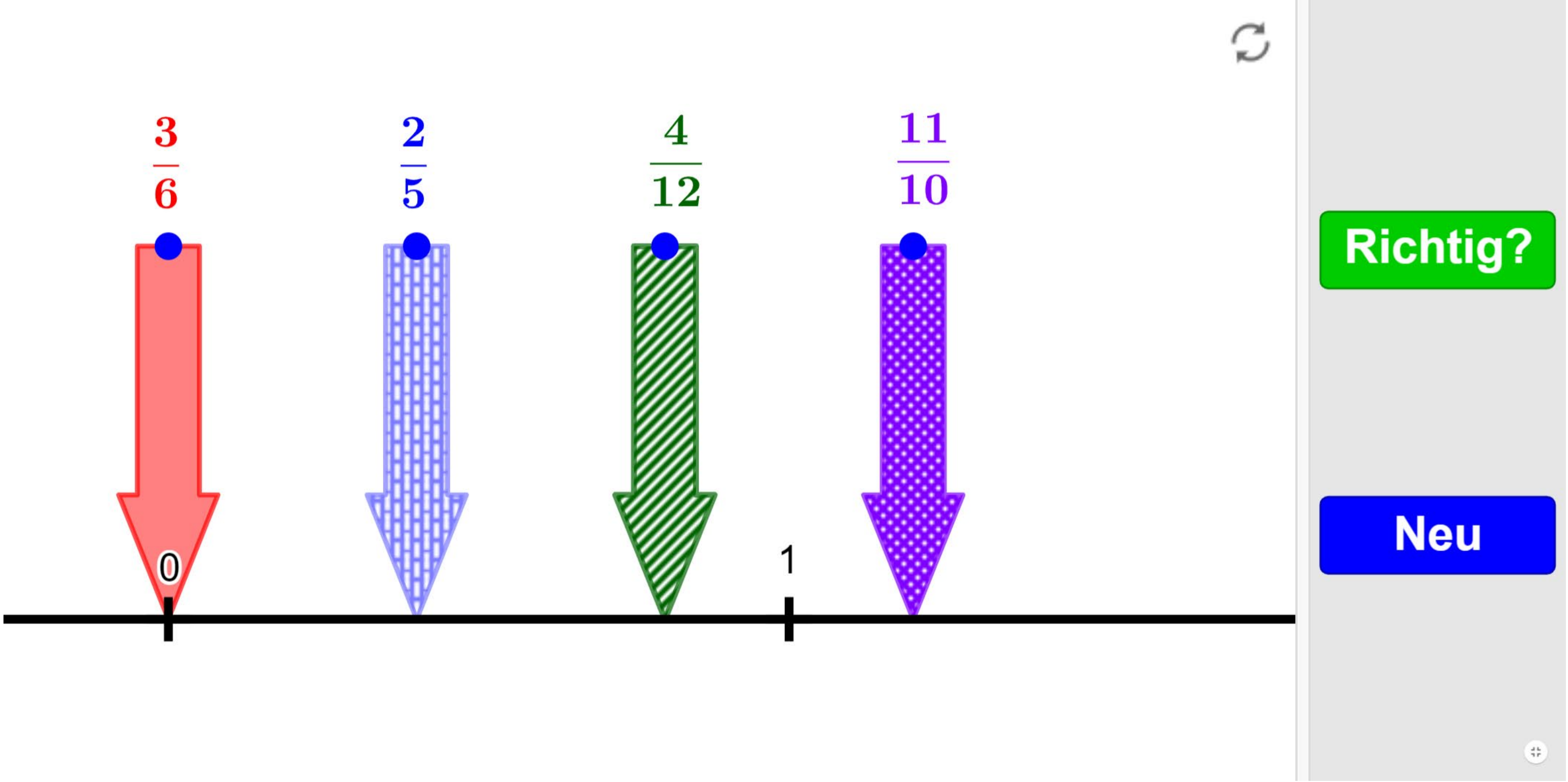
$\frac{4}{5}$



$\frac{2}{3}$



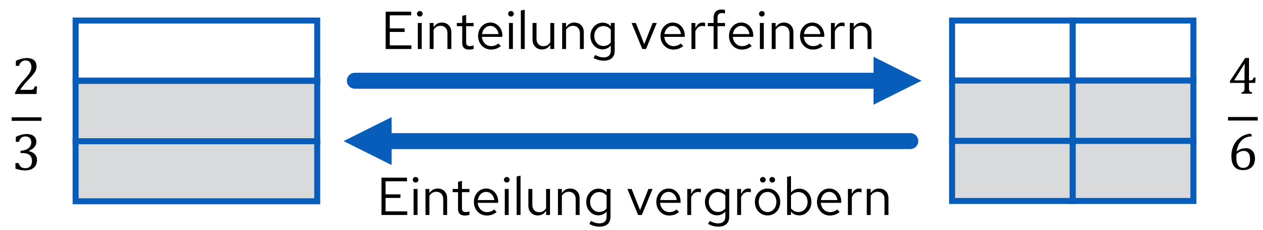
Zahlengerade: Brüche platzieren

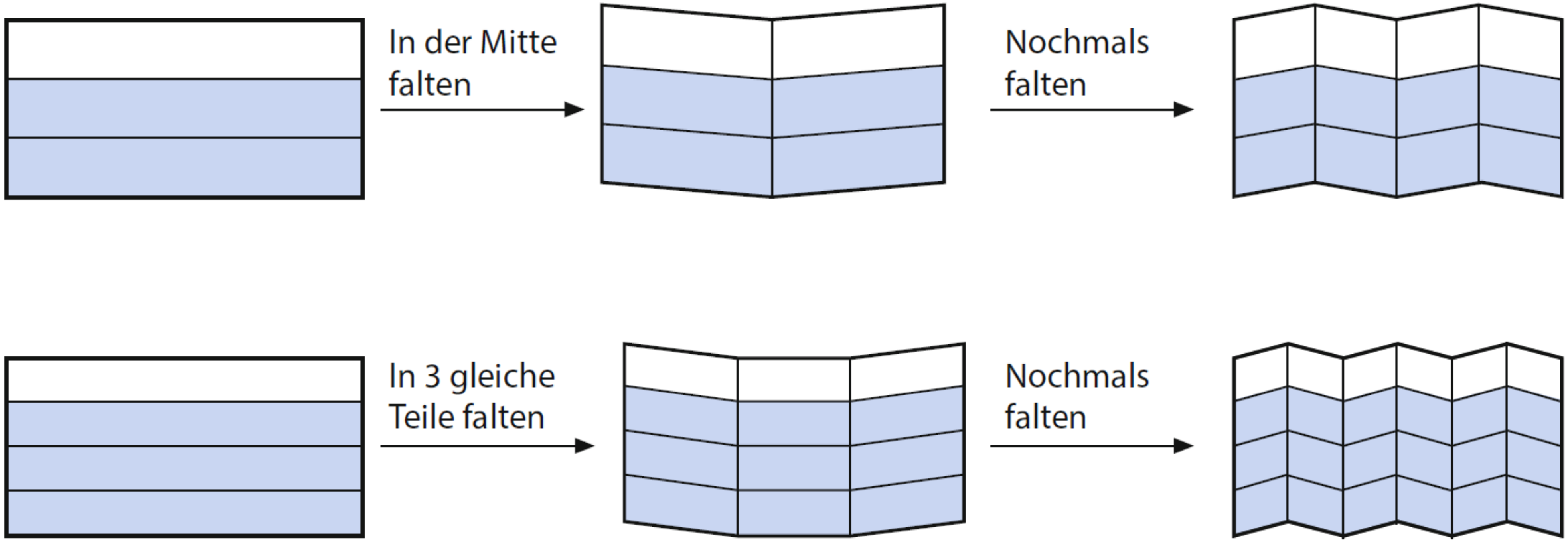


 https://www.geogebra.org/m/tmkzzukq

3+ Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen (Ergänzungen)

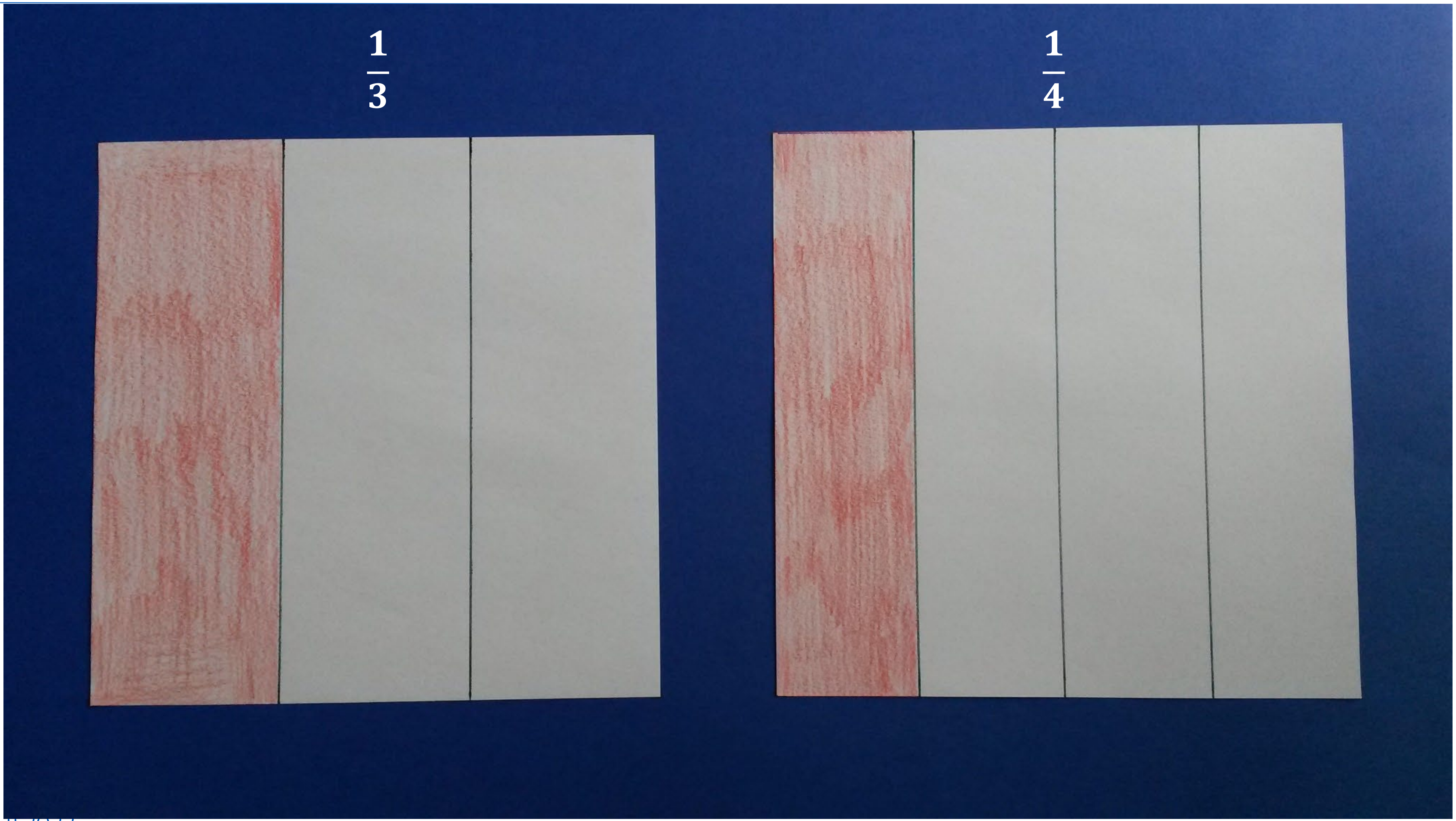
Erweitern und Kürzen von Brüchen



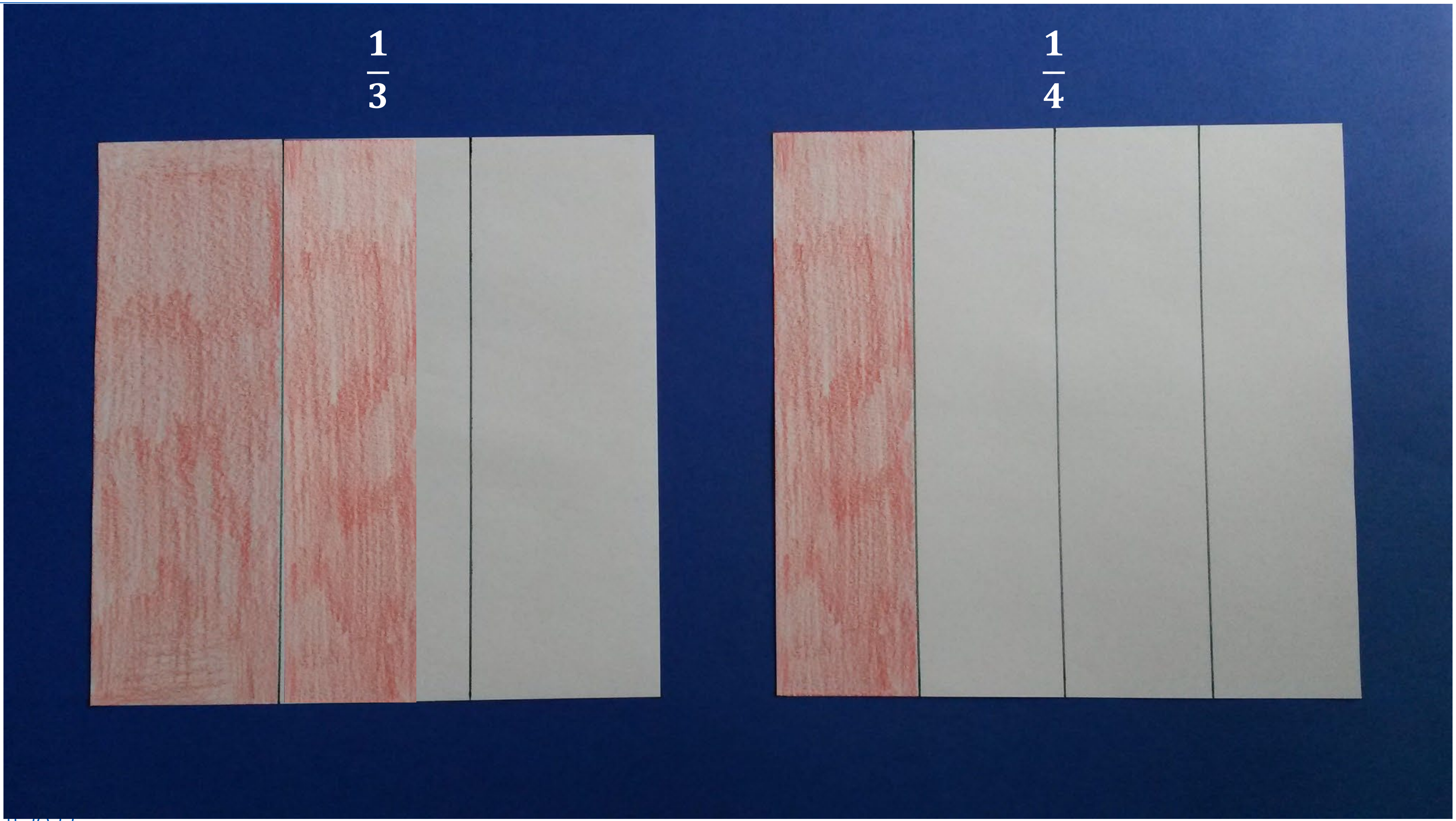


Padberg, Wartha (2017). Didaktik der Bruchrechnung. 5. Auflage, Berlin: Springer Spektrum, S. 43

Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen

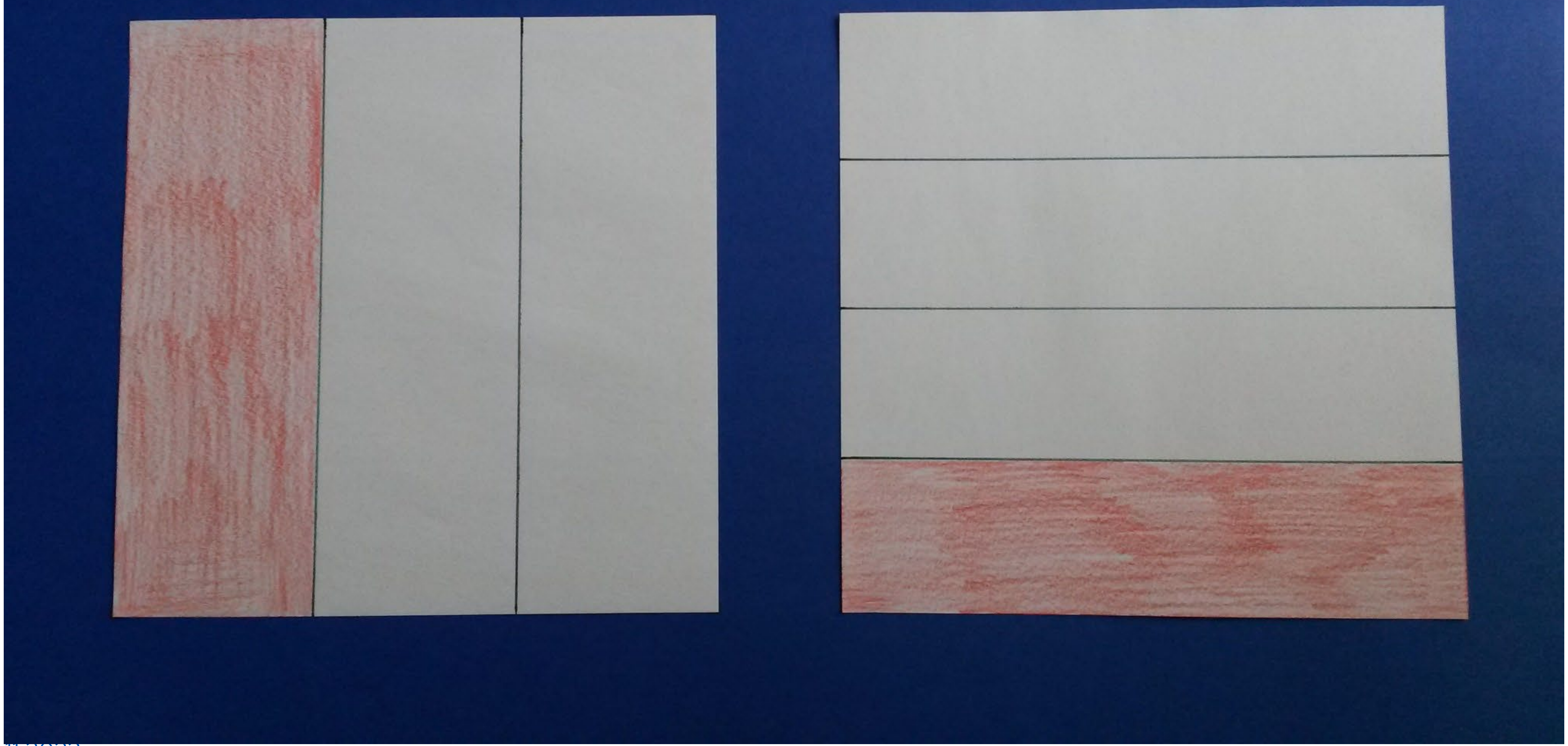


Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen

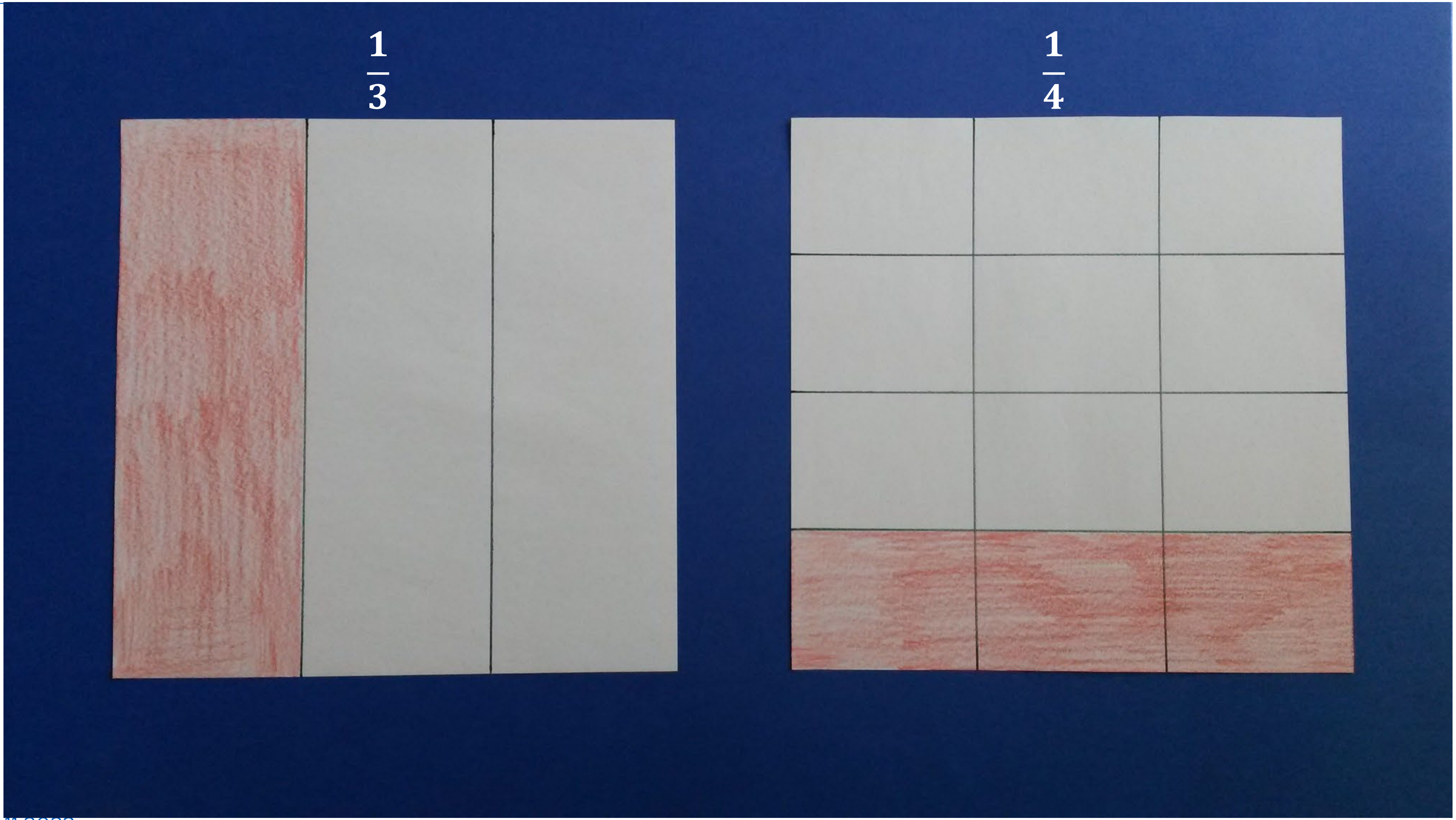


Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

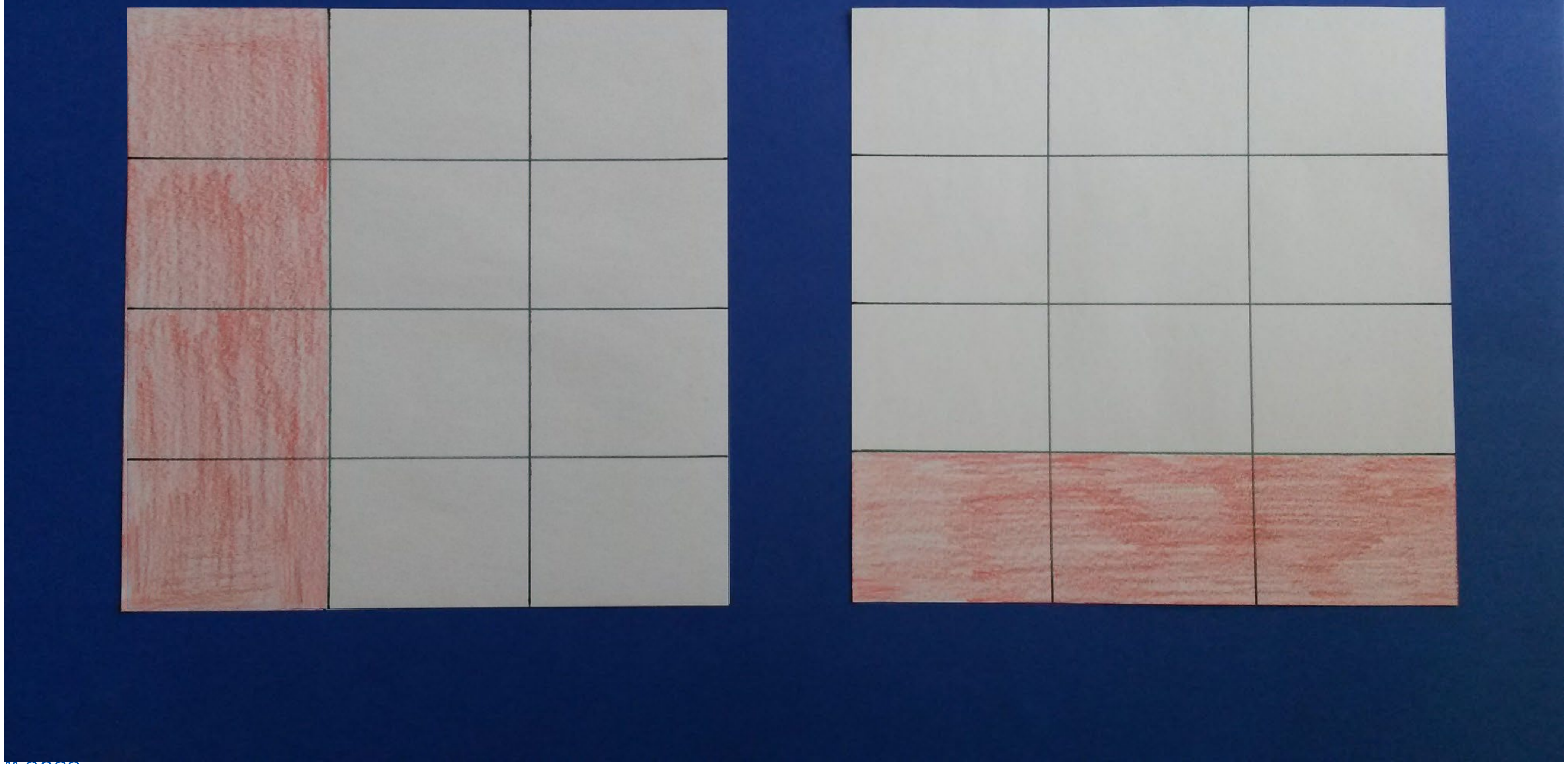


Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen

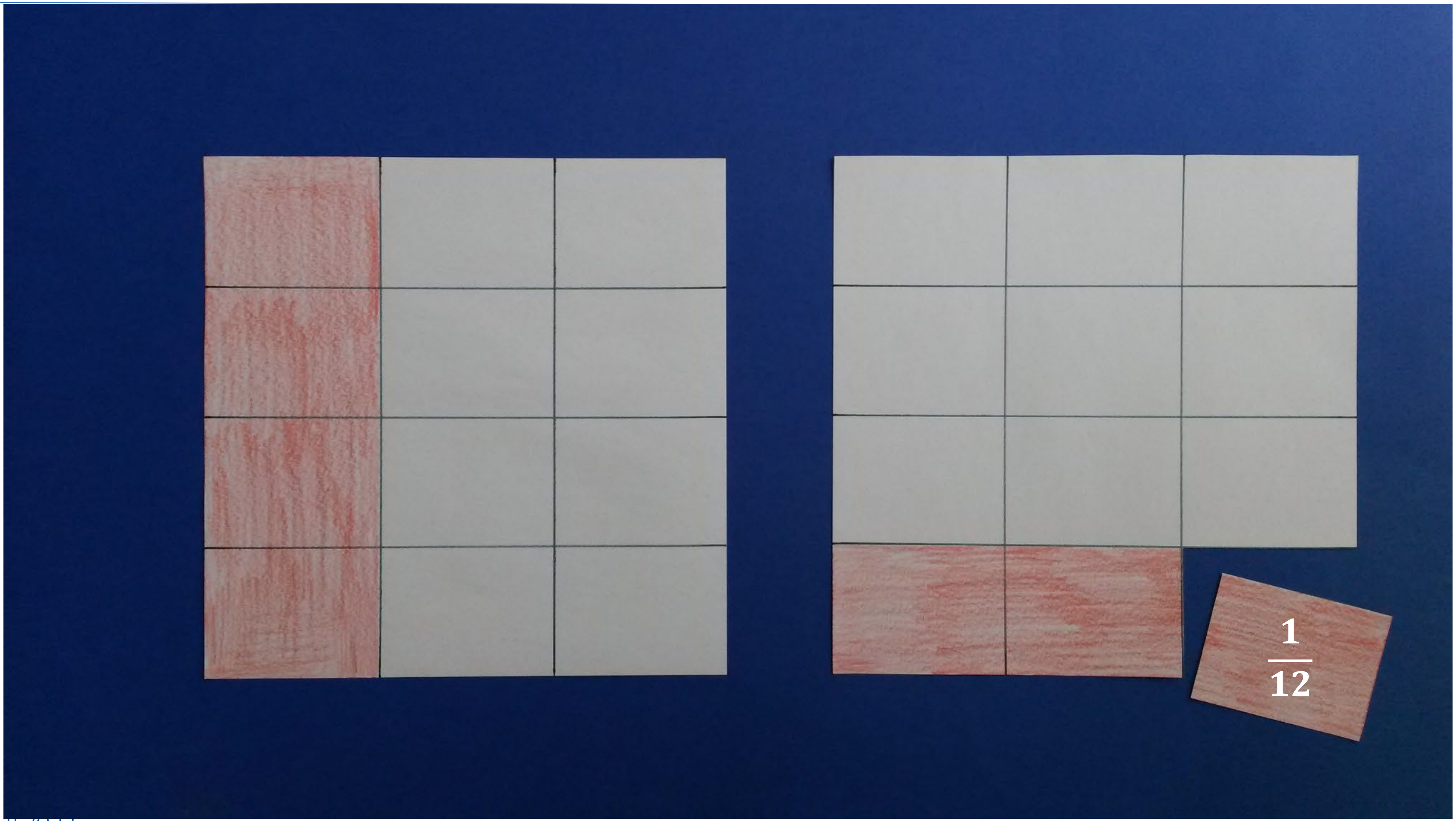


Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen

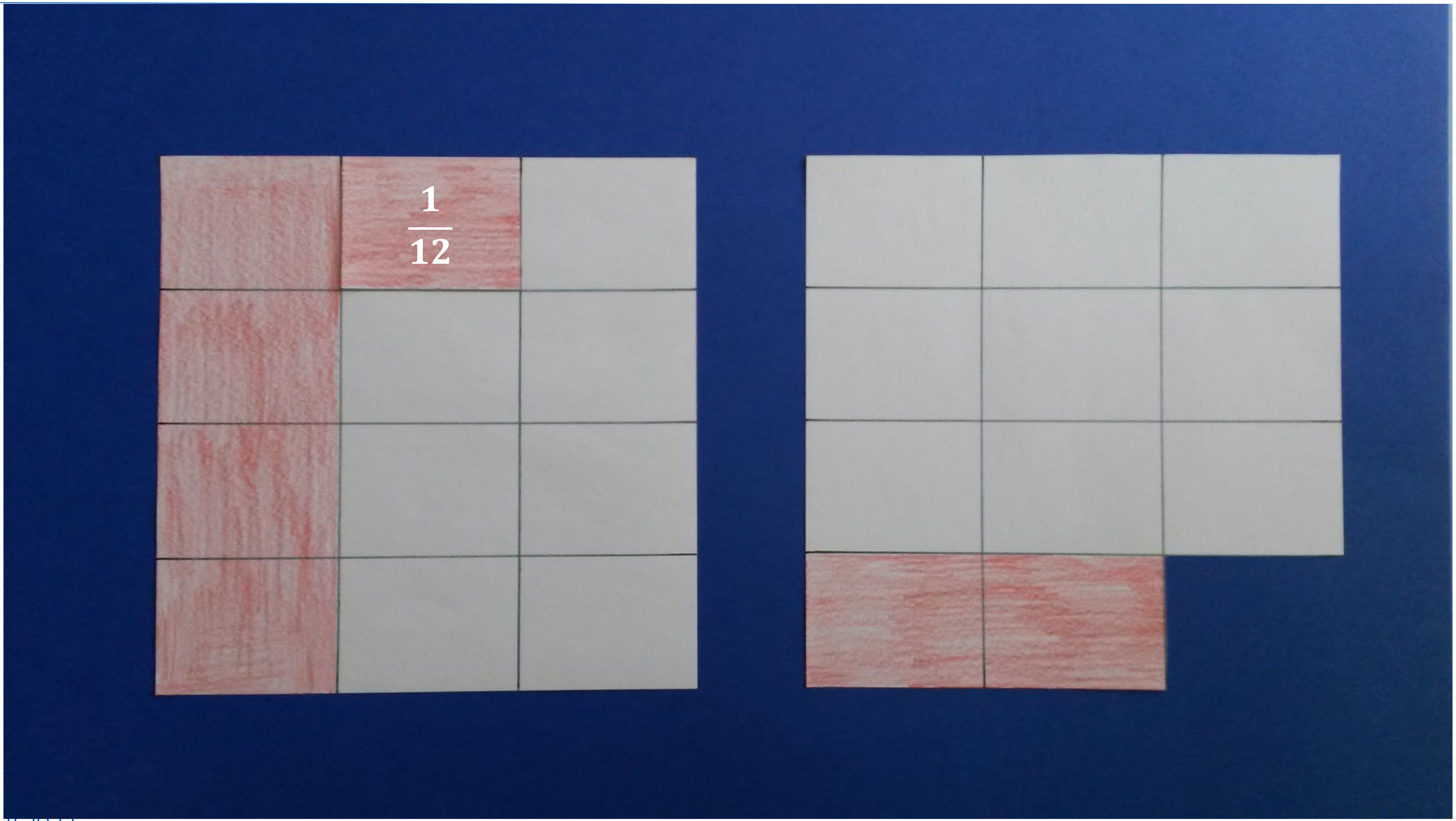
$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} \qquad \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$



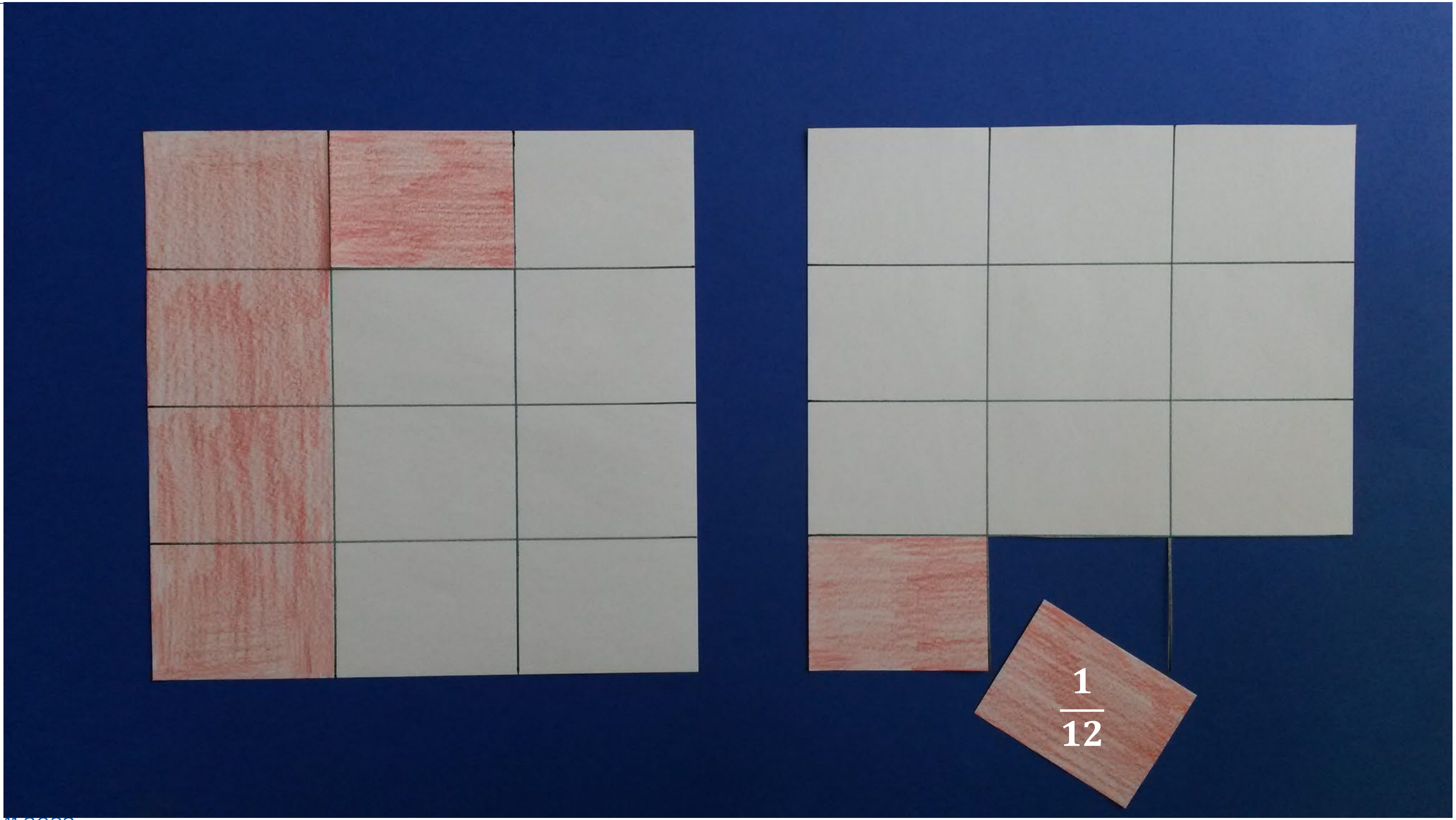
Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen



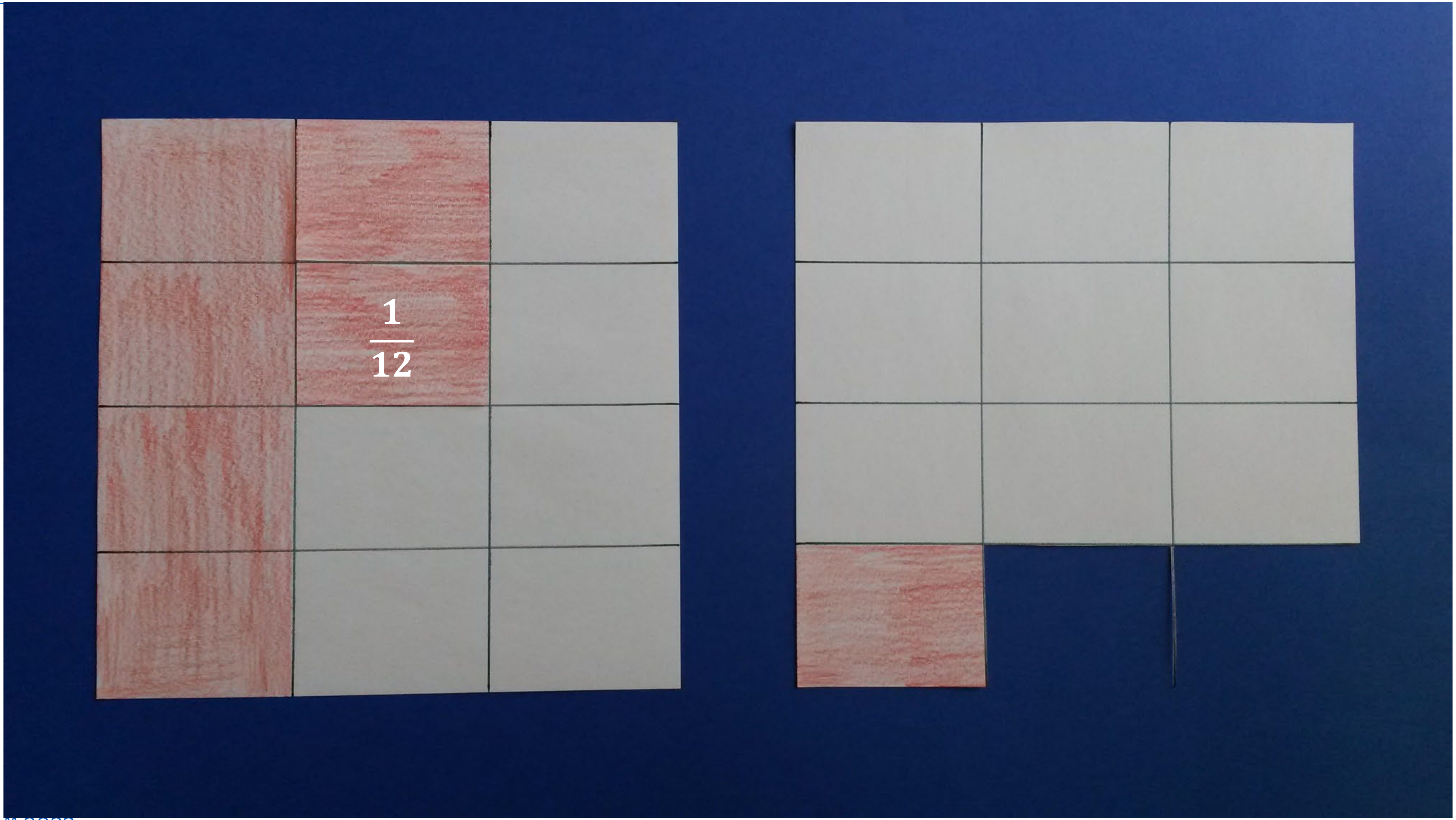
Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen



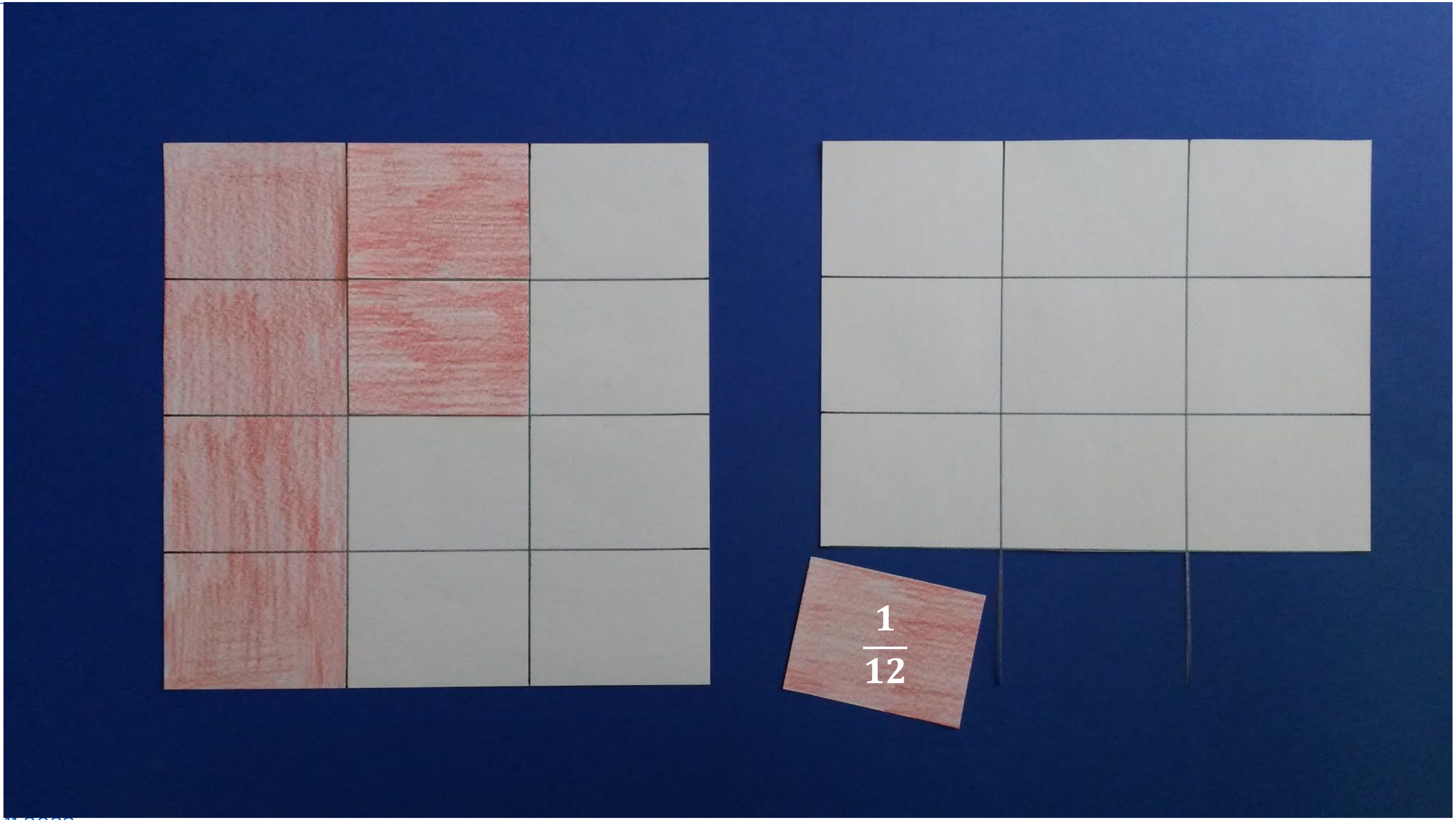
Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen



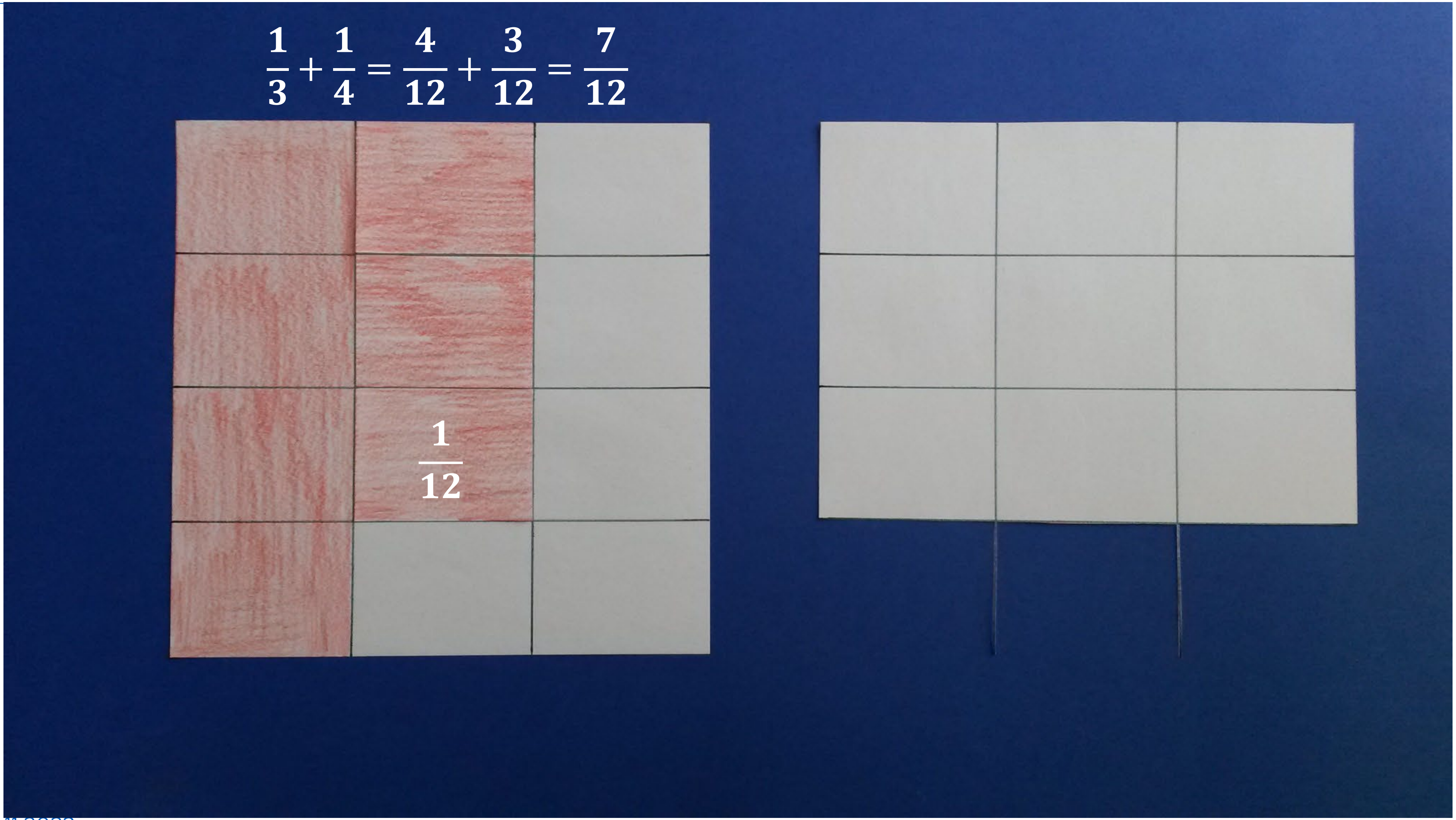
Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen



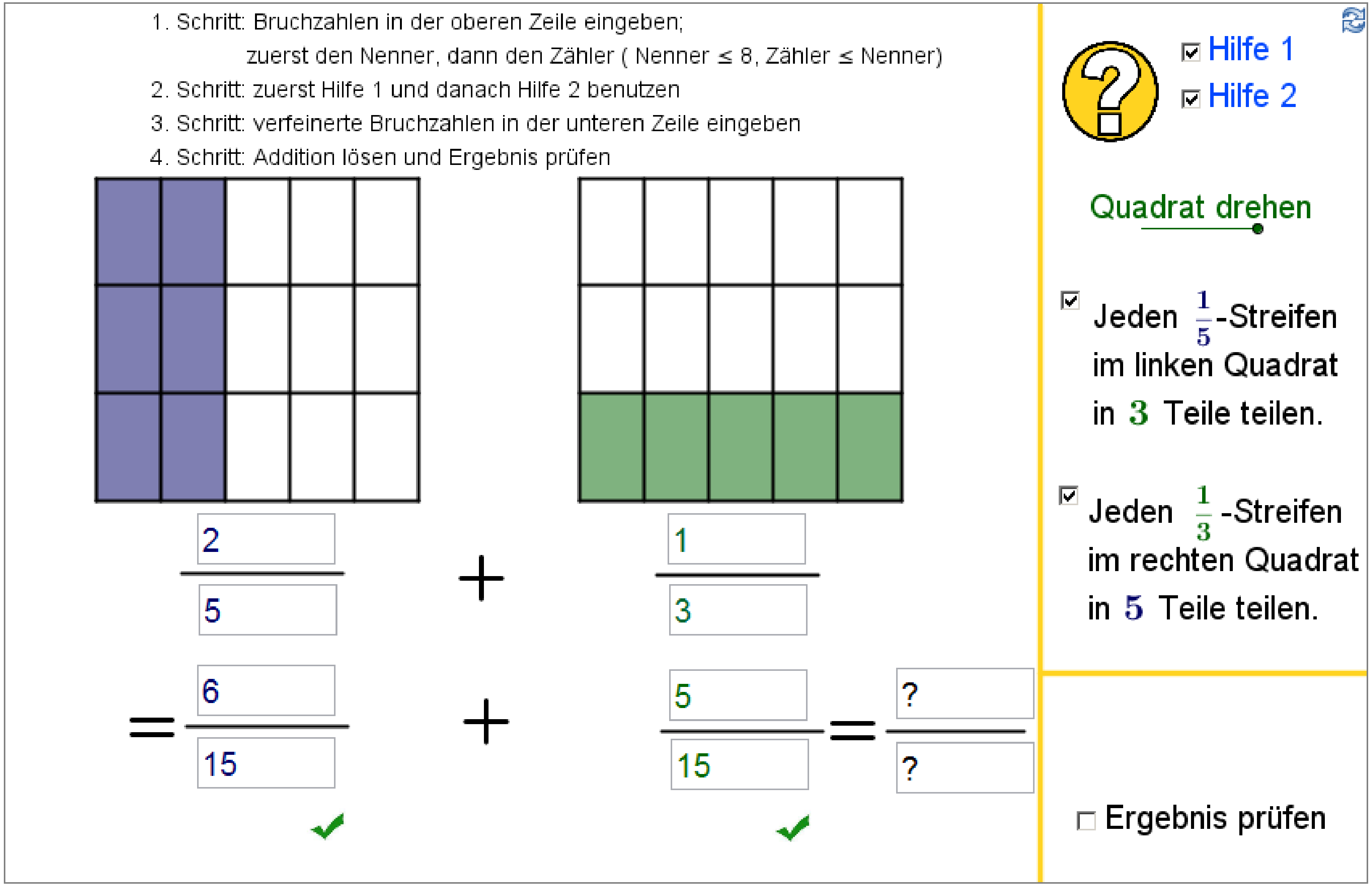
Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen



Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen



Grundvorstellungen zur Addition von Brüchen



https://mathe-labor.de/stationen/mathe-und-kunst-2015/a/teil3/ (Simulation 4) https://geogebra.org/m/tFaPj2mC

Grundvorstellungen zur Multiplikation von Brüchen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

1. Natürliche Zahl mal Bruchzahl

$3 \cdot \frac{4}{5} = ?$

$$3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}$$ Abgekürzte Addition

$$= 4 \text{ Fünftel} + 4 \text{ Fünftel} + 4 \text{ Fünftel}$$ Quasikardinalzahl

$$= 12 \text{ Fünftel} = \frac{12}{5}$$ Quasikardinalzahl

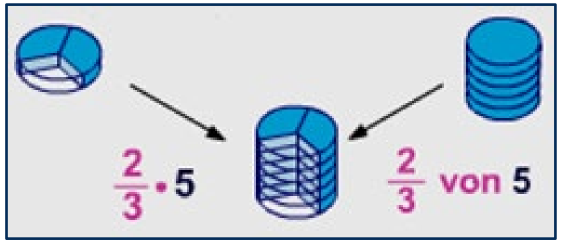
2. Bruchzahl mal natürliche Zahl

$\frac{4}{5} \cdot 3 = ?$

$$\frac{4}{5} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$ Permanenzprinzip (Kommutativgesetz)

oder $$\frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{4}{5} \text{ von } 3$$ Von-Deutung

$\frac{12}{5}$



 Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren 123*, S. 4-8

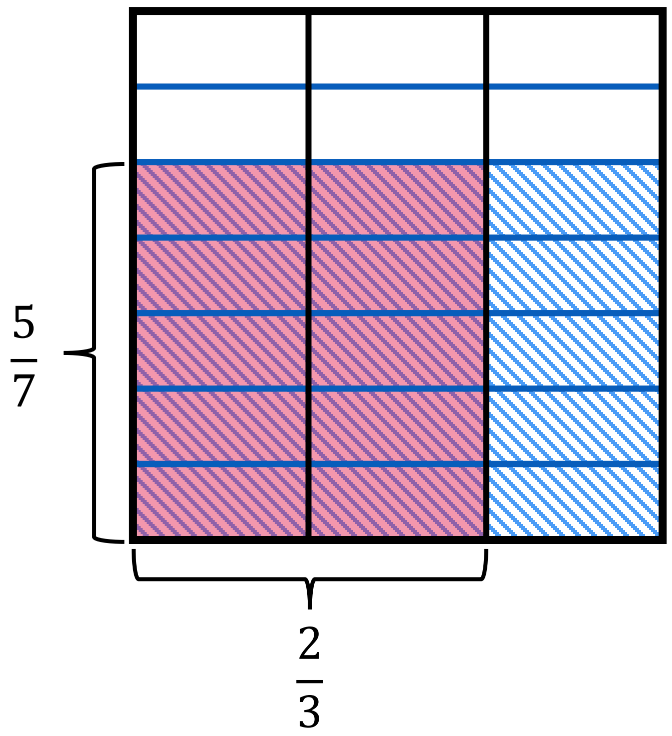
Multiplikation von Bruchzahlen: Von-Deutung

$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = ?$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \text{ von } \frac{5}{7}$

Von-Deutung

$A_{\text{Ausgangsquadrat}} = 1$



Aus Skizze ablesen:

$\frac{2}{3} \text{ von } \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$

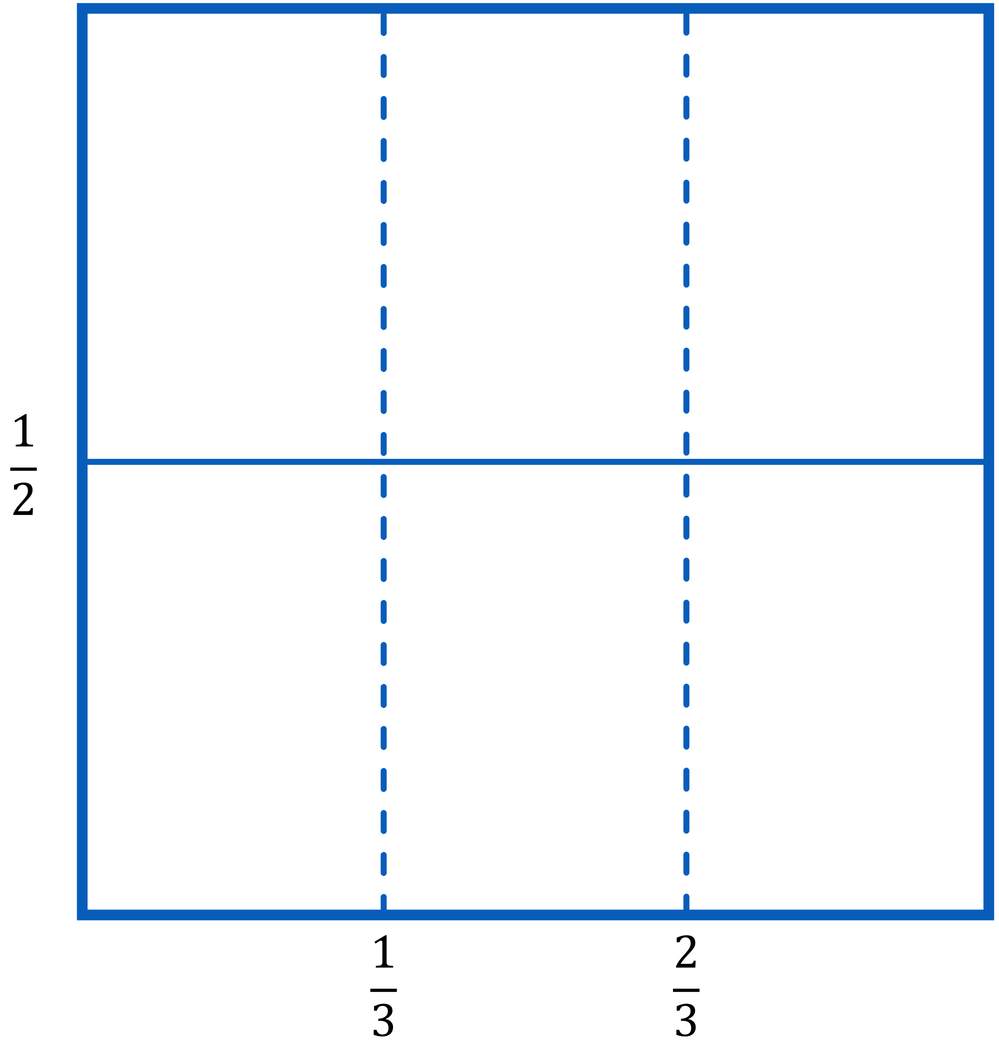
Flächeninhaltsformel

$A_{\text{Rechteck}} = l \cdot b = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$

Übung: Bestimmen Sie genauso die Produkte $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$ und $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}$.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren 123*, S. 4-8

Vereinigung vieler Bruchrechenaspekte



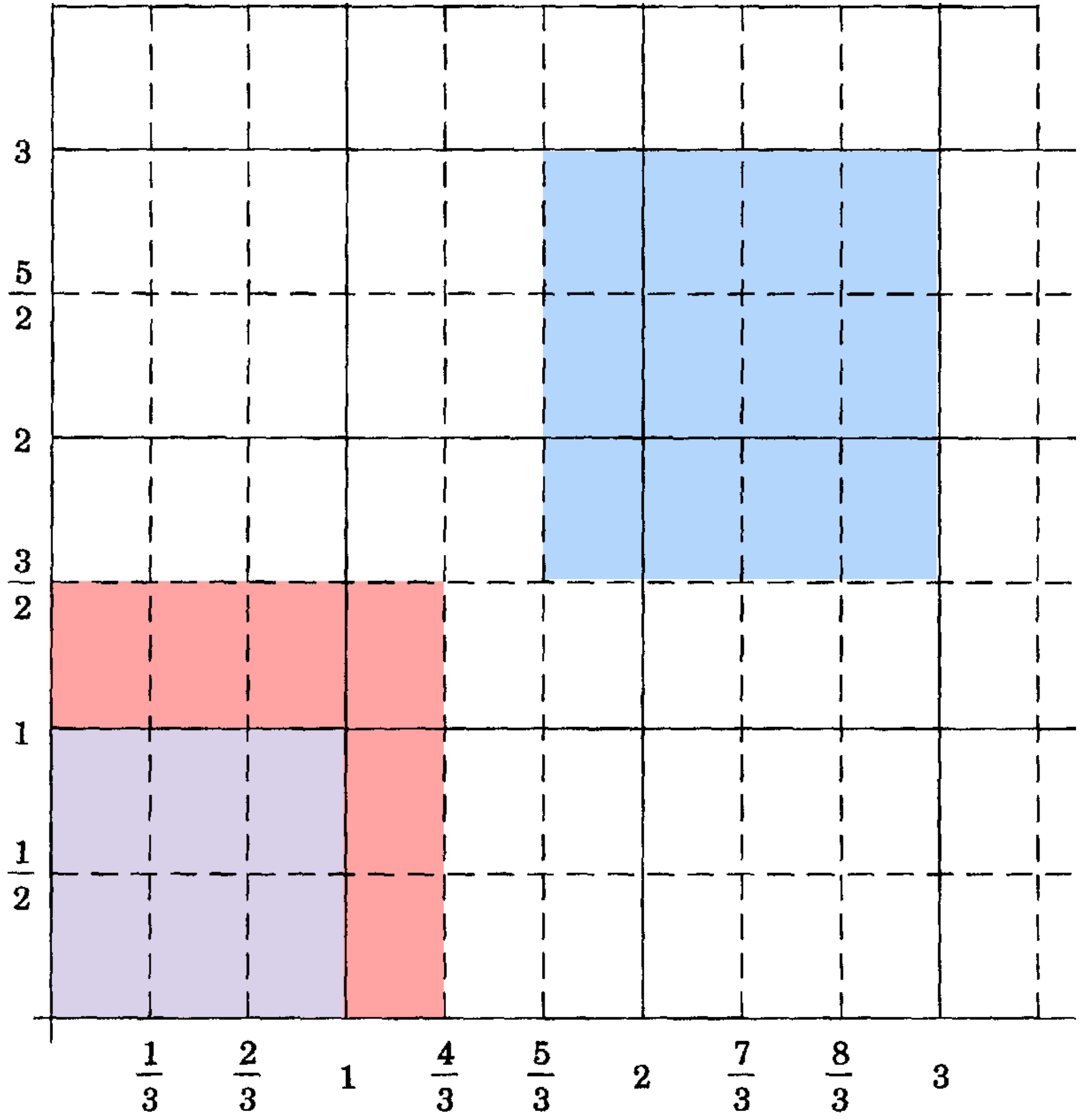
Jede „Fliese“ hat die Seitenlängen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ und ihre Fläche ist $\frac{1}{6}$ der Gesamtfläche.

$\frac{1}{6}$ ist außerdem

- die Hälfte von einem Drittelstreifen,
- ein Drittel von einer Quadrathälfte,
- das Ergebnis der formalen Rechnung $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

 Hefendehl-Hebeker, L. (1996): Brüche haben viele Gesichter. *Mathematik lehren 78*, S. 20-22, 47-48

„Bruchgitter“



- Bestimme die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $\frac{4}{3}$ und $\frac{3}{2}$.
- Erkläre dein Ergebnis an der Zeichnung und durch deine Rechnung.
- Finde andere Rechtecke mit demselben Flächeninhalt.
- Usw.

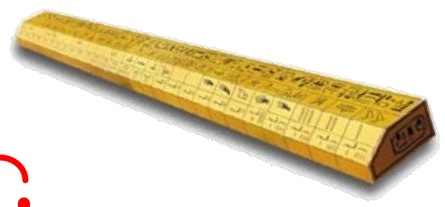
Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. *Mathematik lehren 78*, S. 20-22, 47-48

Division von Bruchzahlen: Messen

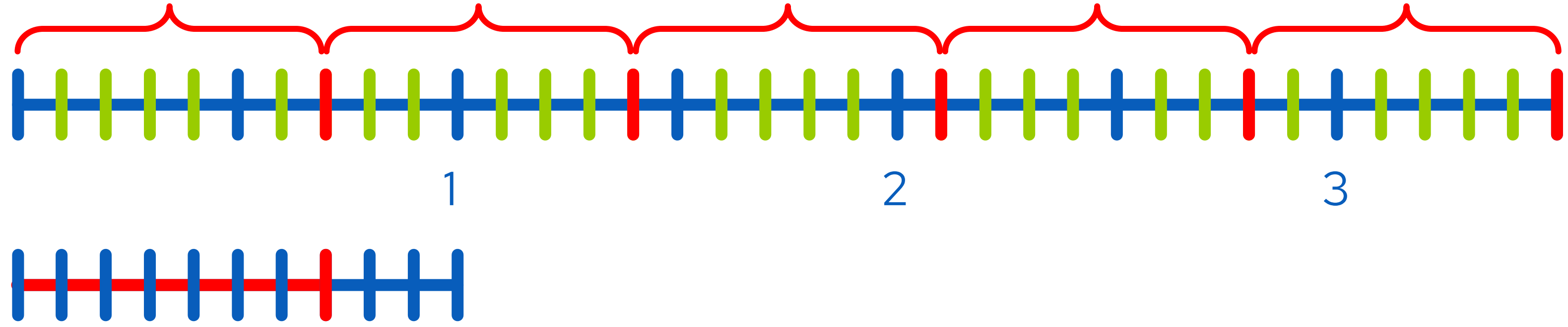
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

$\frac{7}{2} : \frac{7}{10} = ?$

Maß kleiner als die zu messende Größe. ⇨ „Wie oft passt $\frac{7}{10}$ in $\frac{7}{2}$?“



$\frac{7}{2}$



$\frac{7}{10}$

$\frac{7}{2} : \frac{7}{10} = \mathbf{5}$

Beispiel: $\frac{7}{2}$ Liter Wein sollen in $\frac{7}{10}$-Liter-Flaschen abgefüllt werden. Wie viele Flaschen können gefüllt werden?

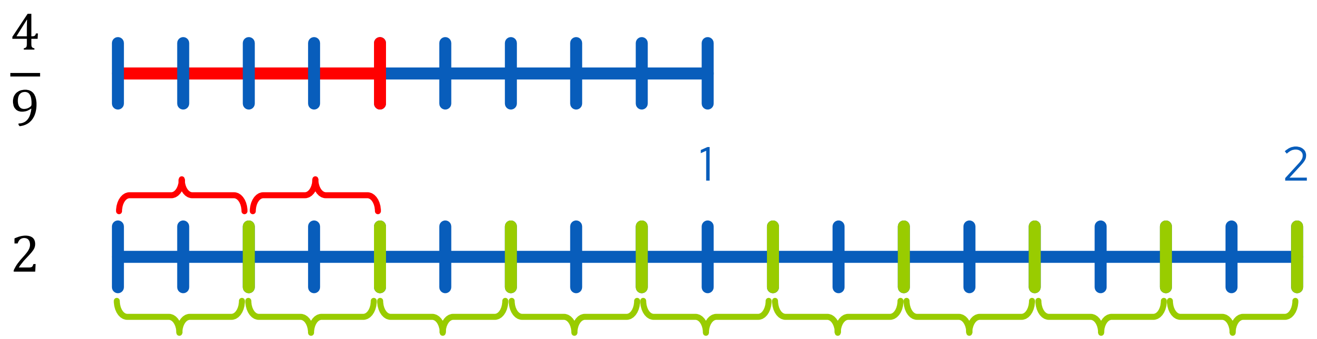
$$\underbrace{\frac{7}{2} : \frac{7}{10}}_{\text{Dividieren als Messen}} = \underbrace{\frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5} : \frac{7}{10} = \frac{35}{10} : \frac{7}{10}}_{\text{Verfeinerung der Einteilung}} = \underbrace{35\ \textbf{Zehntel} : 7\ \textbf{Zehntel}}_{\text{Bruchzahl als Quasikardinalzahl}} = 5$$

Es können 5 Flaschen gefüllt werden.

RPTU

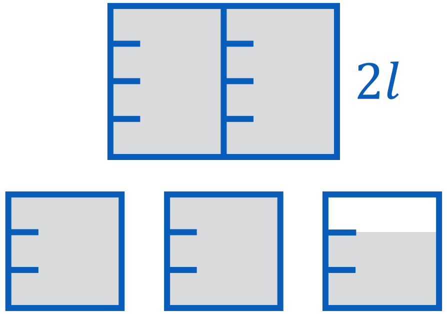
Division von Bruchzahlen: Messen

$\frac{4}{9} : 2 = ?$ Maß größer als die zu messende Größe ⇨ „Welcher Bruchteil von 2 passt in $\frac{4}{9}$?"



$\frac{4}{9} : 2 = \frac{2}{9}$

Dimensionen beim Aufgabenlösen

Syntax	Semantik	Pragmatik
Regeln, Formeln **Formales Verständnis**	**Bedeutung, Sinn** **Inhaltliches Verständnis**	**Anwendung, Gebrauch** **Handlungsverständnis**
$2 : \frac{3}{4} = \frac{2}{1} : \frac{3}{4}$ $= \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3}$ $= \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3}$ $= \frac{8}{3}$ $= 2\frac{2}{3}$	2 ist mit $\frac{3}{4}$ zu messen. $2 = \frac{8}{4}$ $\frac{8}{4} : \frac{3}{4} = 8 : 3 = \frac{8}{3}$ $2 : 3 = \frac{2}{3}$ $: 4$ $\quad \cdot 4$ $2 : \boxed{\frac{3}{4}} = \boxed{4 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{8}{3}$	2 Liter Milch sind in $\frac{3}{4}\,l$-Gefäße zu füllen.  2 volle Gefäße und ein $\frac{2}{3}$-volles von je $\frac{3}{4}\,l$.

Winter, H. (2004). Ganze und zugleich gebrochene Zahlen. *Mathematik lehren, 123*, S. 14-18