



## Einparken – Wie parkt man richtig ein?

**Mitwirkende:** Andreas Endres, Theresa Heurig, Judith Thoma, Stefanie Kreß, Esther Ortloff, Marcel Rother, Niels Ströher,

**Projektleitung und Betreuung:** Herr Prof. Dr. Weigand, Herr Dr. Roth, Frau Dr. Appell, Frau Bezold, Herr Ruppert, Herr Weigel

**Dienstag, 11. Juli 2006**

Am Anfang stand die Frage:

### Wie parkt man richtig ein?

Die erste Sitzung unserer Arbeitsgruppe begann mit einem allgemeinen Brainstorming zum Thema Einparken, in dem wir die Eckpunkte unserer Betrachtungen absteckten.

- Zunächst kamen wir auf die drei häufigsten Parksituationen zu sprechen:
  - Längs zur Fahrtrichtung
  - Quer zur Fahrtrichtung
  - Schräg zur Fahrtrichtung
- Wir erinnerten uns mehrerer Regeln, die uns im Fahrschulunterricht zur Orientierung beim Einparken vermittelt wurden:
  - 0,5 m seitlicher Abstand zum vor der Parklücke stehenden Wagen.
  - Umlenken, wenn das eigene Auto in einem Winkel von  $45^\circ$  zur Bordsteinkante steht.
  - Beginn des Einparkvorgangs, wenn der Fahrer (man selbst) sich auf Höhe des Fahrersitzes des Autos vor der Parklücke befindet.
- Wir setzten uns mehrere Ziele:
  - Die Fahrschulregeln sollten darauf überprüft werden, ob sie sinnvoll sind und damit zu einer optimierten Einparktechnik führen.
  - Als weiteres Ziel wurde die Ermittlung einer idealen Kurve (Streckenverlauf des Einparkvorgangs) für den Einparkvorgang formuliert.
  - Ferner könnten das Erstellen einer den Einparkmethoden angepassten Parkplatzordnung oder die entsprechende Konzeption eines Parkplatzes unter Berücksichtigung der benötigten Fläche weitere Ziele sein. Die Abstände der Autos, die die Parklücke einschließen, sind sicherlich von erheblicher Bedeutung.



⇒ Um diese Ziele zu erreichen, müssen mehrere Randbedingungen beachtet werden.

- Selbstverständlich ist das Risiko, einen anderen Wagen zu touchieren, mitzubedenken. Während des Einparkvorgangs ist daher insbesondere auf die eigenen Außenspiegel zu achten.
- Es besteht für die verschiedenen Parksituationen die Möglichkeit, vorwärts oder rückwärts einzuparken.
- Als mögliche Rahmenbedingung diskutierten wir auch die Dauer des Einparkvorgangs und die Berücksichtigung des Verkehrs.
- Eine parallele Stellung des Autos zum Bordstein wurde als Ziel unserer Berechnungen formuliert.

Im Anschluss an das Brainstorming wählten wir das Einparken längs zur Fahrtrichtung als das Problem, das wir ausführlich erforschen wollten und das den komplexesten Bewegungsablauf darstellt. Diesen wollten wir ergründen und versuchen, ihn zu optimieren.

Wir gingen das Problem zunächst aus drei Blickwinkeln an:

- Eine Gruppe führte praktische Versuche mit einem Bobby-Car durch, um die Bewegungskurven des Einparkvorgangs ausgehend von verschiedenen Stellen am Wagen (Achsen, Front, Heck) nachzuzeichnen.
- Die zweite Gruppe ermittelte die Abmessungen an einem Auto: Länge, Breite, Wenderadien sowie die Maße eines eingezeichneten Parkplatzes.
- Eine weitere Gruppe stellte theoretische Überlegungen an, um den Parkvorgang in Formeln und Gleichungen ausdrücken zu können.

Die drei Gruppen erzielten folgende Ergebnisse:

### **Bobby-Car-Gruppe:**

Der Fahrtweg des Bobby-Cars wurde auf einer Papierbahn festgehalten. Dazu wurden an mehreren Punkten des Bobby-Cars Stifte angebracht, um die Kurven aufzuzeichnen.

Gleich zu Anfang wurden folgende Werte bestimmt:

- Länge des Bobby-Cars:  $l = 0,55$  m
- Wenderadius an der Außenkante:  $R = 1,05$  m

Als günstigste „Taktik“ für einen optimalen Einparkvorgang erschien es, das Lenkrad zunächst voll nach rechts einzuschlagen, dann bis zu einem bestimmten Punkt zu fahren und dort voll in die andere Richtung einzuschlagen.

Die aufgezeichneten Bahnen gaben uns zunächst Rätsel auf: Während die Stifte, die hinten angebracht waren, „schöne Wellenlinien“ zeichneten, zeichneten die Stifte, die vorn angebracht waren, Linien mit einem seltsamen Knick. Hatten die Stifte schlecht gezeichnet?



### Vermessungsgruppe:

Wir gingen davon aus, dass Länge, Breite und Wendekreisradius des Autos für das Einparkproblem wichtig sind.

An einem **Opel Corsa** 4-Türer wurden folgende Werte gemessen:

- Wenderadius am äußeren Hinterrad:  $r_a = 4,61$  m
- Länge des Wagens:  $L = 3,73$  m
- Breite des Wagens:  $B = 1,61$  m
- Wenderadius innen:  $r_i = 3,00$  m

Am **Parkplatz** wurden folgende Werte für eine Parklücke gemessen:

- Länge: 6,00 m
- Breite: 2,50 m

### Theoriegruppe:

Zuerst vereinfachten wir das Problem:

- Es erschien uns einfacher, das Ausparken aus einer entsprechenden Parklücke zu betrachten und das Einparken als entgegengesetzte Bewegung unter gleichen Bedingungen zu vermessen.
- Der Wagen wurde zunächst als Punkt dargestellt.



Das führte zu ersten Vermutungen:

- Bei der Betrachtung der Einparkkurve kamen wir zuerst zu der Vermutung, dass das Auto sich auf einer Sinuskurve bewegt.
- Daneben gab es aber auch schon die Vermutung, dass sich das Auto auf Kreisbögen bewegt.

Es gab auch schon eine erste Erkenntnis zum Wendekreismittelpunkt:

- Ein Lineal diente zur Darstellung der Hinterachse. Die Beobachtung von Kreisbewegungen des Lineals führte zu der Erkenntnis, dass der Mittelpunkt des Wendekreises auf der Verlängerung der Hinterachse liegt.

Daraus ergaben sich folgende Ideen für das weitere Vorgehen:

- Um die Bewegungskurve als Funktion zu erfassen, muss ein geeigneter Ursprung für das Koordinatensystem gefunden werden. Möglichkeiten zur Bestimmung dieses Punktes könnten der Einsatz der Dynamischen Geometriesoftware EUKLID DynaGeo und die Bobby-Car-Versuche sein.
- Wir wollten versuchen, die Kurven, die die Räder beschreiben, mit EUKLID DynaGeo zu zeichnen.

## **Mittwoch, 12. Juli 2006**

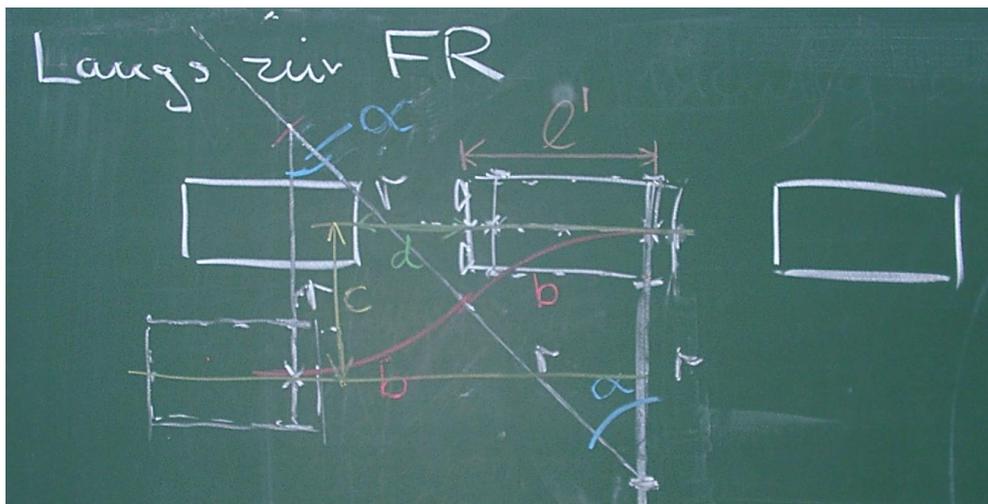
Unser Tageswerk begann mit einer Wiederholung der Erkenntnisse vom Vortag, um wieder in die Problematik einzusteigen. Besonders wichtig waren folgende Erkenntnisse: Die Wege, die die verschiedenen Punkte des Autos beim Einparken beschreiben, setzen sich aus zwei Kreisbögen zusammen. Die Mittelpunkte der Wendekreise – und damit auch die Mittelpunkte dieser Bögen – liegen auf den Verlängerungen der Hinterachse. Für den Mittelpunkt der Hinterachse sind die Radien der beiden Kreisbögen gleich groß. Deshalb ist es am sinnvollsten die Linie zu betrachten, welche der Mittelpunkt der Hinterachse beim Einparken beschreibt.

Wir hielten fest, welche Größen wir nun ermitteln müssen, um den Einparkvorgang zu erfassen:

- Mittelpunktswinkel  $\alpha$

- Länge der Ortskurve  $b$
- Abstand der Mittelpunkte der Hinterachsen des einparkenden Autos und des Autos vor der Parklücke vor dem Einparken  $c$  (wenn die beiden Autos nebeneinander stehen)
- Abstand des eingeparkten Autos zum Auto vor der Parklücke  $d$
- Radius des Wendekreises des Mittelpunktes der Hinterachse  $r$
- Abstand von der Hinterachse zur Front  $l$
- Länge des Autos  $L$
- Breite des Autos  $B$

Es gelang uns, die Einparksituation in einer detailliert beschrifteten Skizze an der Tafel festzuhalten:

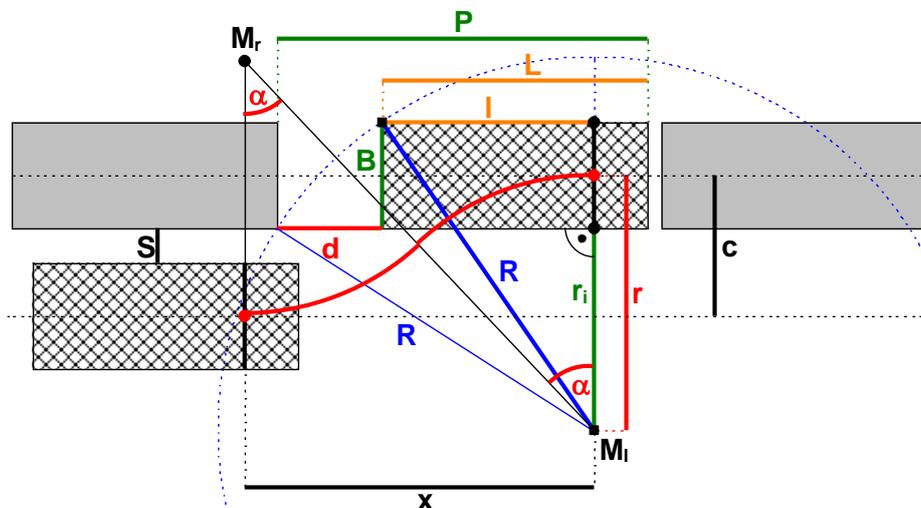


Wir bildeten erneut drei Gruppen, die den Einparkvorgang und die dafür benötigten Größen mit verschiedenen Mitteln erforschen sollten:

- Das **SFK** (Sonderformelkommando) versuchte Gleichungen zur Ermittlung der fehlenden Größen aufzustellen.
- Das Ziel des **TÜVs** (Team für überschaubare Visualisierung) was es, den Verlauf des Einparkvorgangs, insbesondere die Ortskurven, mit der Dynamischen Geometriesoftware EUKLID DynaGeo zu konstruieren.
- Die **VAG** (Videoanalysegruppe) hatte die Aufgabe, den Einparkvorgang eines realen Autos in der Draufsicht zu filmen, um anschließend am PC die Ortskurve des hinteren Achsenmittelpunkts zu bestimmen.

## Auswertung:

**SFK:** Folgende Größen wurden behandelt:



Bekannte Größen	
$l$	Abstand der Hinterachse von der Front des einparkenden Autos
$R$	Wendekreisradius des einparkenden Autos
$B$	Breite des einparkenden Autos
$L$	Länge des einparkenden Autos
$S$	Sicherheitsabstand

Unbekannte Größen	
$c$	Abstand der Mittelachsen der benachbarten Autos vor dem Einparkvorgang
$r$	Wendekreisradius des Mittelpunkts der Hinterachse
$r_i$	Wendekreisradius des inneren Hinterrades
$P$	Mindestlänge der Parklücke
$\alpha$	Mittelpunktswinkel
$x$	Abstand der Hinterachse zu Beginn und am Ende des Einparkvorgangs

Folgende Gleichungen wurden dazu gefunden:

$$R^2 = l^2 + \left(r + \frac{B}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{l^2 + \left(r + \frac{B}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow r = -\frac{B}{2} + \sqrt{R^2 - l^2}$$

$$R^2 = (d+l)^2 + r_i^2$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{R^2 - r_i^2} - l$$

$$c = B + S$$

Andererseits lässt sich  $c$  auch so berechnen:

$$c = 2 \cdot (r - r \cdot \cos \alpha)$$

$$= 2r \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$= -B + 2\sqrt{R^2 - l^2} \cdot 1 - \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \left( 1 + \frac{B + S}{B - 2\sqrt{R^2 - l^2}} \right)$$

Daraus ergibt sich:

$$r_i = r - \frac{1}{2}B = \sqrt{R^2 - l^2} - B$$

$$\text{Es gilt } |M_r M_l| = 2r.$$

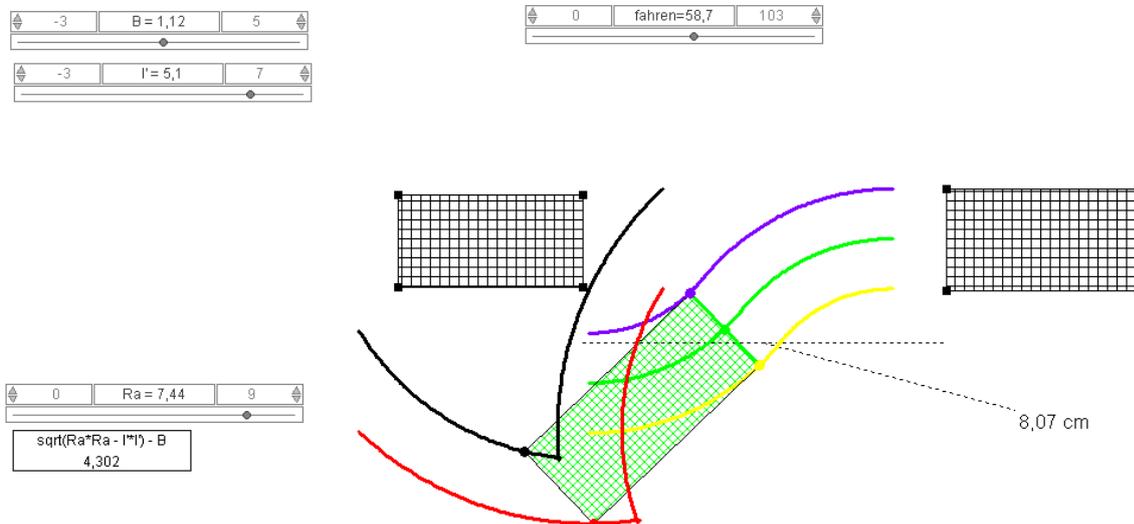
$$\Rightarrow x = 2r \cdot \sin \alpha = (-B + 2\sqrt{R^2 - l^2}) \cdot \sin \alpha$$

$$P = d + L = \sqrt{R^2 - r_i^2} - l + L$$

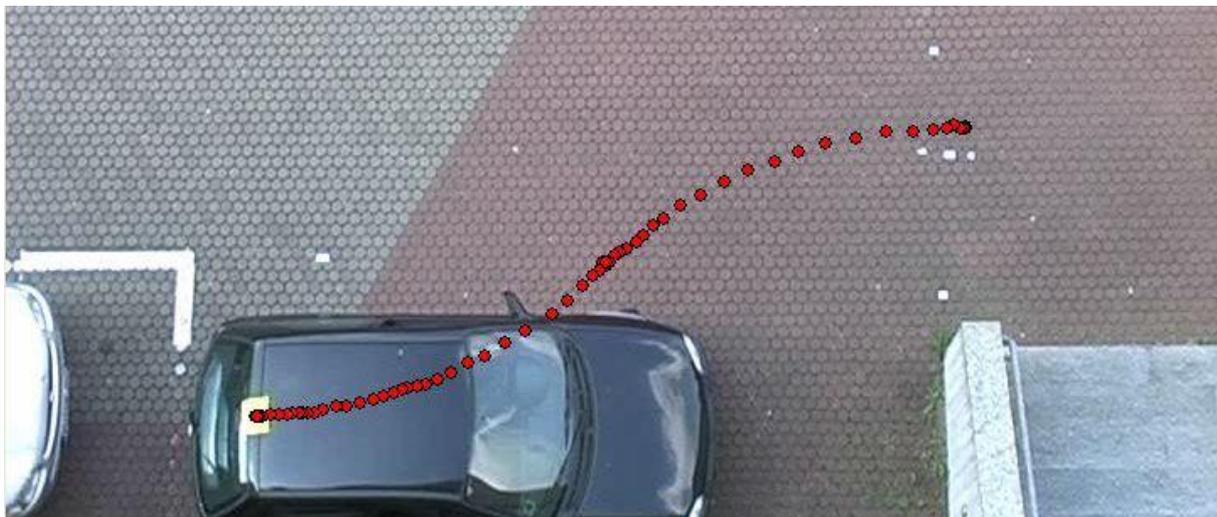
$$= \left( \sqrt{R^2 - \sqrt{R^2 - l^2} - B^2} - l \right) + L$$

$$= \sqrt{l^2 + 2B\sqrt{R^2 - l^2} - B^2} - l + L$$

**TÜV:** Mittels Euklid wurde eine animierte Bewegungsskizze erstellt, bei der die Maße des Autos beliebig verändert werden können.



**VAG:** Die Auswertung des Videomaterials am PC bestätigte die Konstruktion der Ortskurve in der Tafelskizze.



Im Anschluss an die Auswertung versuchten die einzelnen Gruppen, ihre Ergebnisse zu optimieren:

Während das **SFK** seine Ergebnisse durch Berechnungen anhand realer Werte überprüfte und die Formeln in einer Excel-Tabelle erfasste, verfeinerte der **TÜV** seine Animation und überprüfte ihre Funktion anhand der realen Werte aus der Berechnung der Formelgruppe. Die **VAG** trug in ihrer Aufnahme zusätzlich zur Ortskurve die Radien und die Mittelpunkte der Wendekreise ein.

## Donnerstag, 13. Juli 2006

Zu Beginn unseres Arbeitstages formulierten wir die verbleibenden Aufgaben:

- Die Aufgabe des **SFK** war es, Formeln zur Berechnung der Daten für die Startposition des eigenen Fahrzeugs zu ermitteln und schließlich ein benutzerfreundliches Computerprogramm zu erstellen, das nach Eingabe der Autodaten die gesuchten Daten für den Einparkvorgang ermittelt.
- Die Euklid-Gruppe und die Videogruppe erstellten die Abschlusspräsentation.

Die Formelgruppe konnte schließlich ein Programm im PHP-Format präsentieren, das dem Benutzer nach Eingabe der Autodaten Anweisungen gibt, welche Abstände er einhalten muss, um einen optimalen Einparkvorgang zu erreichen. Ferner wurde ein entsprechendes Programm in Form einer Excel-Datei erstellt. Hier ein Beispiel aus der PHP-Datei mit den Daten eines serienmäßigen Ford Focus:

### Wie parkt man richtig ein?

**Bitte geben Sie die Daten Ihres Autos in das Formular ein und klicken Sie auf berechnen!**

Breite des Autos	<input type="text" value="1998"/>	mm
Länge des Autos	<input type="text" value="4454"/>	mm
Abstand Hinterachse - Front	<input type="text" value="3498"/>	mm
Wendekreisradius	<input type="text" value="5400"/>	mm
Sicherheitsabstand zum nebenstehenden Fahrzeug	<input type="text" value="400"/>	mm

### So parken Sie richtig ein:

Die Parklücke für Ihr Auto muss eine Mindestlänge von **5.92 Meter** haben.

Beim Einparken müssen sie folgendes beachten: Fahren Sie im seitlichen Abstand von 0.4 Meter zum vor der Parklücke stehenden Auto an die Parklücke heran.

Fahren Sie so neben das Auto, dass das Heck Ihres Autos **1.01 Meter** hinter dem Heck des Autos zum stehen kommt.

Schlagen Sie das Lenkrad voll ein und fahren Sie rückwärts in die Parklücke, bis die rechte hintere Ecke Ihres Autos **0.83 Meter** von der rechten Kante des vor der Parklücke stehenden Autos entfernt ist bzw. der Winkel zwischen der Seite ihres Autos und der Bordsteinkante **52°** beträgt.

Halten Sie an, schlagen Sie das Lenkrad voll in die andere Richtung ein und fahren Sie weiter rückwärts, bis Sie in der Parklücke sind.

---

© - Hinweis:

Schülerprojekttag der Fakultät für Mathematik und Informatik an der Universität Würzburg 11.-14. Juli 2006

Projekt "Einparken"

Mitwirkende: Esther Ortloff, Judith Thoma, Stefanie Kreß, Theresa Heurig, Niels Stöher, Andreas Endres, Marcel Rother

## Zusammenfassung der Ergebnisse:

Es ergaben sich folgende Formeln für die zum Einparken relevanten Größen:

- Mindestlänge  $P$  der Parklücke:

$$P = \sqrt{l^2 + 2B\sqrt{R^2 - l^2} - B^2} - l + L$$

- Abstand  $s$  des Hecks des einparkenden Autos zum Heck des Autos vor der Parklücke:

$$s = - \left[ B + 2\sqrt{R^2 - l^2} \cdot \sin \left( \arccos \left( 1 + \frac{c}{B - 2\sqrt{R^2 - l^2}} \right) \right) - \sqrt{l^2 + 2B\sqrt{R^2 - l^2} - B^2} - L \right]$$

- Abstand  $w$  der rechten hinteren Ecke des Hecks des einparkenden Autos zum Bordstein (genauer: zur Verlängerung der rechten Kante des Autos, das vor der Parklücke steht) beim Gegenlenken:

$$w = \frac{c - B}{2} - \frac{L - l}{\sin \left[ \arctan \left( \frac{2 \cdot L - l}{B} \right) \right]} \cdot \cos \left[ \arccos \left( 1 + \frac{c}{B - 2\sqrt{R^2 - l^2}} \right) - \arctan \left( \frac{2 \cdot L - l}{B} \right) \right]$$

- Winkel  $\alpha$  zwischen der rechten Seite des einparkenden PKW und der Bordsteinkante (dieser Winkel ist genau so groß wie der zum durchfahrenen Kreisbogen gehörende Winkel) beim Gegenlenken:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{1 + c}{B - 2\sqrt{R^2 - l^2}} \right)$$

