Protokoll zur Lerneinheit «Umkehrfunktionen I»

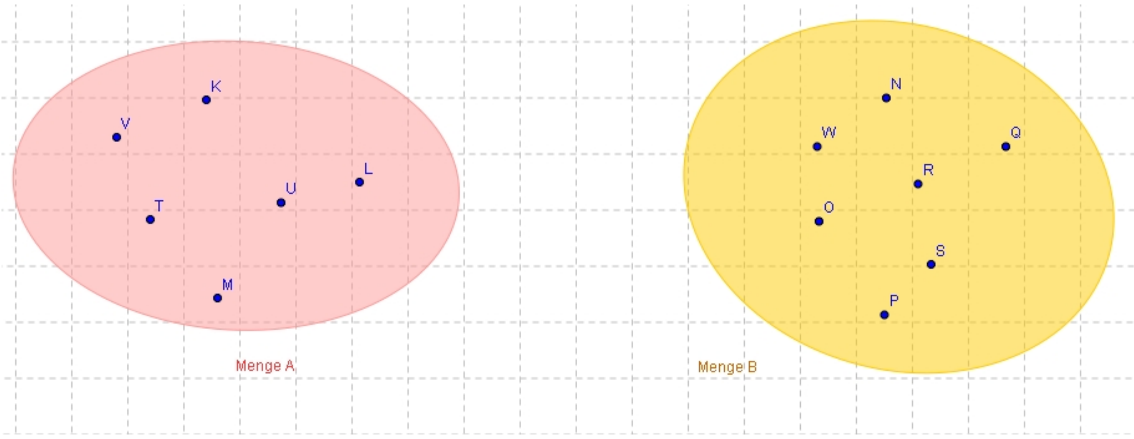
bearbeitet von

am

Die Lerneinheit ist auf der Homepage des
Instituts für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg
abrufbar [1]

1 Einführung

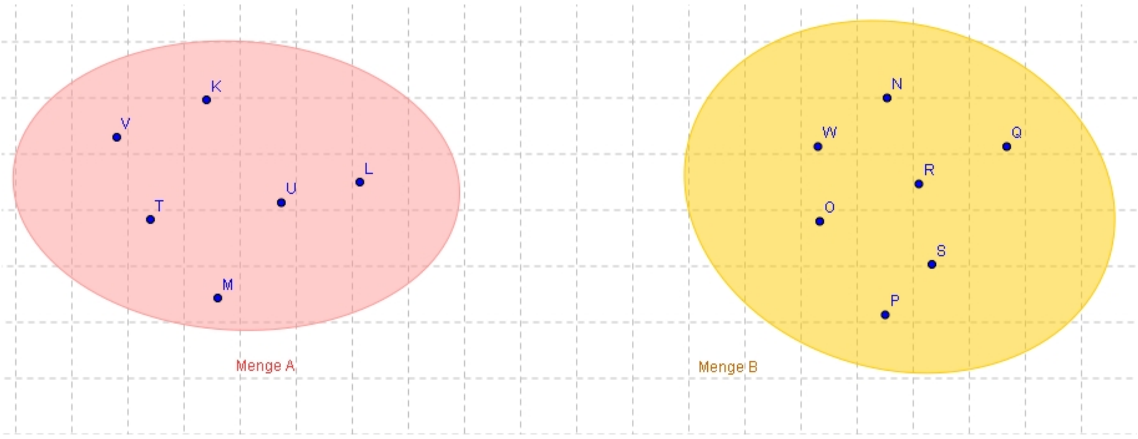
In der Mathematik spielen Relationen eine wichtige Rolle. Bereits in früheren Jahrgangsstufen hast Du Zuordnungen kennengelernt. Oben siehst Du zwei Mengen A und B, zwischen deren Elementen eine Relation $A \sim B$ hergestellt werden kann.
✎ Stelle eine Relation zwischen den Elementen der Mengen A und B her, indem Du Zuordnungspfeile einzeichnest.



Andererseits ist es möglich, zu obiger Relation eine Umkehrrelation zu bestimmen.
✎ Zeichne diese Umkehrrelation $B \sim A$ zwischen den Mengen B und A in das folgende Mengendiagramm[2]:

[1] benutzen Sie den Link oder geben Sie `http://www.juergen-roth.de/dynama/AKGeoGebra/ak_geogebra.html` in Ihren Webbrowser ein.

[2] im elektronischen Protokoll leider nicht möglich



2 Anleitung

✎ Nenne die Arbeitsschritte, die beim Bestimmen der Umkehrfunktion notwendig sind:

①

②

③

3 Beispiel 1 ($y = \frac{1}{4}x + 2$)

✎ Bestimme die Gleichung der Umkehrfunktion zu folgender Funktion f:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y = \frac{1}{4}x + 2$$

4 Beispiel 2 ($y = -3x$)

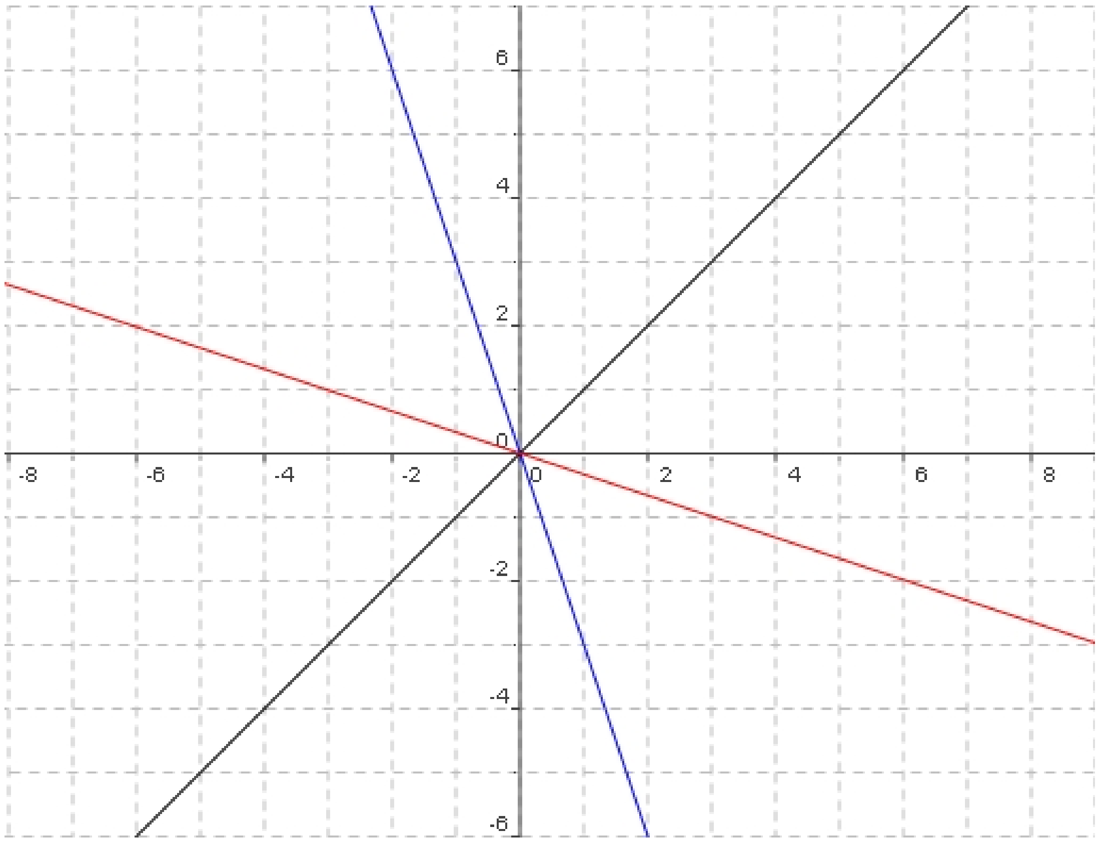


Abbildung 1: Graph der Funktion $y = -3x$ und Graph deren Umkehrfunktion

In Abbildung 1 sind die Graphen der Funktion $y = -3x$ und deren Umkehrfunktion eingezeichnet.
✎ Wie kann auf geometrischem Weg der Graph der Umkehrfunktion zu einer gegebenen Funktion ermittelt werden? Beschreibe Deine Vorgehensweise!

5 Beispiel 3 ($y = x^2$)

In diesem Beispiel der Lerneinheit hast Du versucht, den Graph der Umkehrfunktion von $y = x^2$ auf geometrischem Weg zu bestimmen. Betrachte dazu die Abbildung 2:

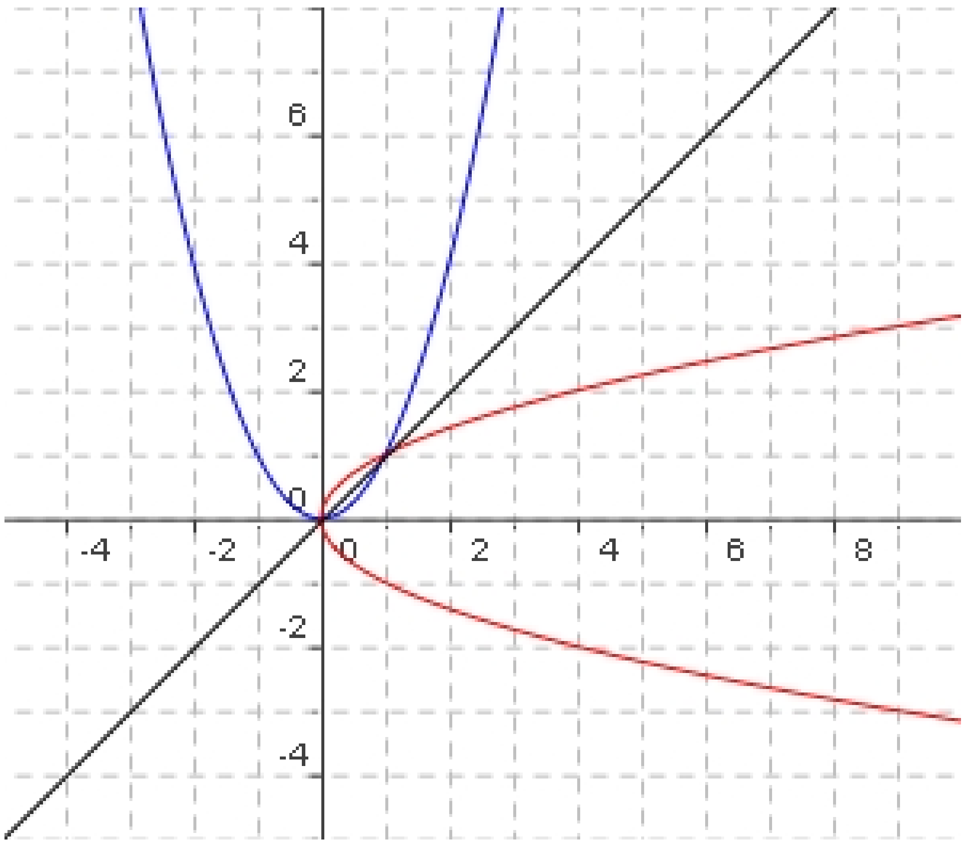


Abbildung 2: Geometrische Ermittlung des Graphen der «Umkehrfunktion» von $y = x^2$

✎ Was fällt Dir am Graphen der «Umkehrfunktion» auf? Darf hier von einer Umkehrfunktion gesprochen werden? Begründe Deine Entscheidung!

✎ Wende die Dir bekannten drei Arbeitsschritte zur Bestimmung der Umkehrfunktion auf das Beispiel der folgenden Funktion an. Wie lautet Dein Ergebnis?

$$y = x^2$$

6 «Spezielle Umkehrfunktionen»

Die Abbildung 3 zeigt, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y = x^2$$

nicht auf dem ganzen Definitionsbereich umkehrbar ist. Folglich muss die Definitionsmenge verändert werden, um von f die Umkehrfunktion bestimmen zu können. ✎ Ergänze die folgenden Aussagen.
Die Definitionsmenge der Funktion f wird so verändert, dass die neue Funktion

$$g : \boxed{\quad} \to \boxed{\quad}, \quad y = \boxed{\quad}$$

umkehrbar ist und die Gleichung der zugehörigen Umkehrfunktion

$$g^{-1} : \boxed{\quad} \to \boxed{\quad}, \quad y = +\sqrt{x}$$

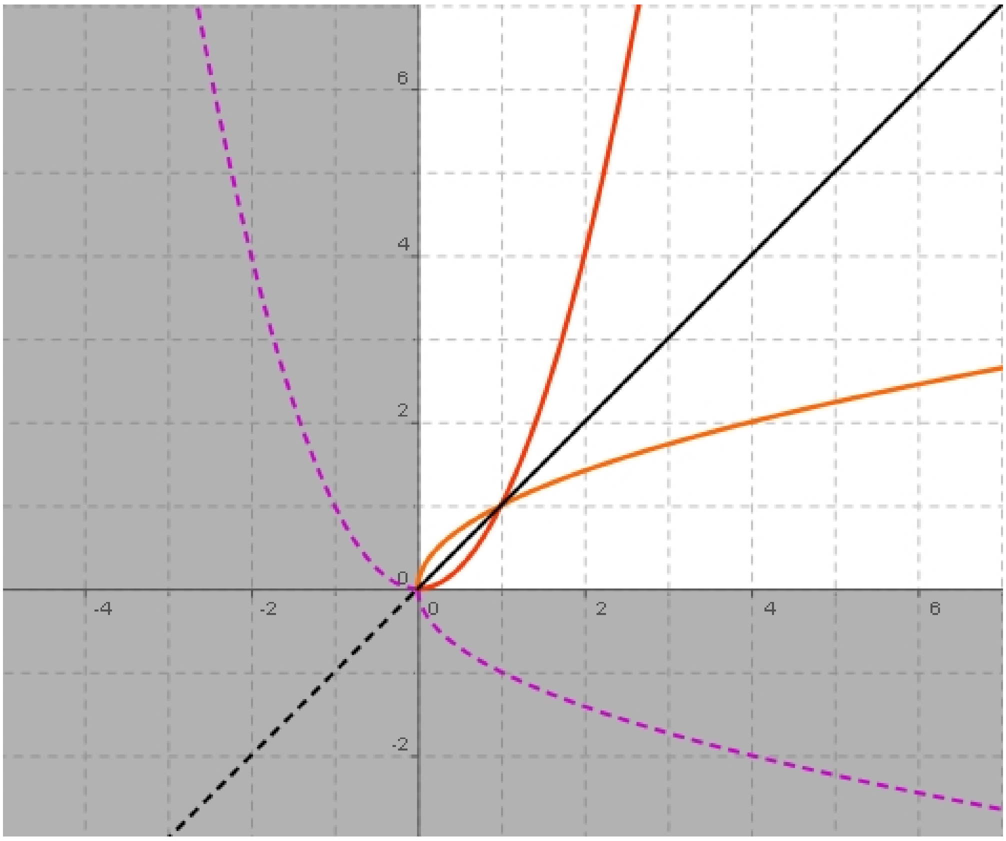


Abbildung 3: Definitionsbereiche der Funktion $y = x^2$ und deren «Umkehrfunktion»

lautet.

Ebenso kann die Definitionsmenge der Funktion f so verändert werden, dass die neue Funktion

$$h : \boxed{} \to \boxed{}, \quad y = \boxed{}$$

umkehrbar ist und die Gleichung der zugehörigen Umkehrfunktion

$$h^{-1} : \boxed{} \to \boxed{}, \quad y = -\sqrt{x}$$

lautet.