Jürgen Roth

Zur Entwicklung und Förderung Beweglichen Denkens im Mathematikunterricht Eine empirische Längsschnittuntersuchung

Zusammenfassung

Beim Lösen mathematischer Probleme und im Zusammenhang mit der Begriffsbildung ist es oft hilfreich, eine gegebene Situation in Gedanken zu verändern. Man versucht dabei, die Auswirkungen der Veränderung zu antizipieren und damit zu argumentieren. Der vorliegende Artikel befasst sich mit diesem „Beweglichen Denken“. Nach einer knappen Eingrenzung des Begriffs „Bewegliches Denken“ ist der Schwerpunkt die Darstellung einer empirischen Längsschnittuntersuchung über ein ganzes Schuljahr in fünf 7. Klassen bayerischer Gymnasien. Es ging dabei um die Untersuchung der Frage, ob „Bewegliches Denken“ in einem Schuljahr entwickelt und gefördert werden kann und ob evtl. ein Transfer der dabei angeeigneten Fähigkeiten von einem Inhaltsbereich auf andere möglich wird.

Abstract

During the process of solving mathematical problems or trying to understand mathematical concepts it is often helpful to vary a given situation mentally. One tries to anticipate the effects of this variation and to argue with these effects. This article deals with this kind of “dynamical thinking”. Starting with a short outline of the theoretical concept “dynamical thinking” the emphasis in the following is on the analysis of an empirical longitudinal study covering a whole year in five 7th grade classes of Bavarian grammar schools. The aim of this study was to investigate whether “dynamical thinking” can be developed and promoted and whether students are able to transfer acquired abilities into other areas.

1 Bewegliches Denken – ein Fähigkeitsprofil

Im Zusammenhang mit Begriffsbildungen und beim Lösen mathematischer Probleme ist es oft hilfreich, eine gegebene Situation in Gedanken zu verändern. So kann man z. B. in eine geometrische Figur eine Bewegung hineindenken oder gegebene Größen gedanklich variieren. Man versucht dabei, die Auswirkungen der Veränderung zu antizipieren und damit zu argumentieren. In dieser Studie geht es um ein derartiges „Bewegliches Denken“ als Teil des mathematischen Denkens.

Bewegliches Denken ist kein „Allheilmittel“, kann aber an geeigneten Stellen immer wieder Gewinn bringend eingesetzt werden und gehört zum Methodenrepertoire der Mathematik. In der Geschichte der Mathematik und ihrer Didaktik gab es immer wieder Phasen, in denen das Argumentieren mit Bewegungen bzw. Veränderungen betont wurde, aber auch andere, in denen solche Argumentationen in den Hintergrund traten.

Bereits einer der ersten belegten mathematischen Beweise, nämlich der wahrscheinlich von Thales von Milet stammende Beweis zu dem Satz, dass der Durchmesser den

Kreis halbiert, basiert auf einer vorgestellten Bewegung.[1] Vor allem Platon und seine Anhänger versuchten dann allerdings Argumente zu vermeiden, die sich auf Bewegungen stützten. Trotzdem kamen auch Mathematiker dieser Zeit nicht ohne Bewegungen bzw. Veränderungen aus. Dies lässt sich z. B. daran ablesen, dass Platon einen sich bewegenden Punkt eine Linie erzeugen ließ und auch in den Elementen des Euklid die Kugel, der Kegel und der Zylinder mit Hilfe von Bewegungen definiert werden.[2] Im 17. Jahrhundert waren auf Bewegungen bzw. Veränderungen beruhende Argumentationen im Zuge der von Newton und Leibniz begründeten Infinitesimalrechnung wieder von grundlegender Bedeutung. Dagegen argumentierten Cantor und Dedekind bei der Entwicklung der Mengenlehre in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts weitgehend statisch.

Derartige Wellenbewegungen gab und gibt es auch im Bezug auf den Mathematikunterricht. Am Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts wurden für den Mathematikunterricht verstärkt Argumentationen mit Bewegungen und Veränderungen gefordert sowie die Bedeutung der Integration von dynamischen Visualisierungen aufgezeigt. Insbesondere die Forderung der Meraner Reformer um Felix Klein, die „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ in den Mittelpunkt des Mathematikunterrichts zu stellen, verdeutlicht die damalige Bedeutung des Argumentierens mit Bewegungen und Veränderungen.

Im Zuge des Strukturalismus in der „Neuen Mathematik“ in den 60er und 70er Jahren des 20. Jahrhunderts kamen dynamische Denkweisen im Mathematikunterricht dann kaum noch vor. Dies führte aber zu Verengungen und Einseitigkeiten und so plädierte Führer (1985) in seinem Aufsatz „‚Funktionales Denken’: Bewegtes fassen – das Gefaßte bewegen“ für die Reintegration des Argumentierens mit Bewegungen und Veränderungen in die Schulalgebra. Bender/Schreiber (1985) arbeiteten in ihrem Buch „Operative Genese der Geometrie“ heraus, welche zentrale Rolle Bewegungen und Veränderungen für den Geometrieunterricht spielen. Auch für allgemeine Fragen der Mathematikdidaktik stellte Wittmann (1985) im Zusammenhang mit dem operativen Prinzip das Denken in Veränderungen und deren Auswirkungen als wesentlich heraus („Was passiert mit …, wenn …?“). Weitere Fürsprecher von Bewegungen bzw. Veränderungen im Mathematikunterricht aus dieser Zeit waren etwa Weigand (1988), der die Bedeutung der Zeitfunktionen für das Verständnis von Veränderungen im Mathematikunterricht betonte, oder auch Bender (1989), der für „Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen“ plädierte.

Mit der Verfügbarkeit neuer Medien rückte in neuerer Zeit der Aspekt der dynamischen Visualisierung in das Zentrum des Interesses. In den 80er Jahren des 20. Jahrhunderts wurden dynamische Visualisierungen mit Hilfe des Mediums Film realisiert. Entsprechende Aktivitäten der Mathematikdidaktik spiegeln sich insbesondere in den von

[1] Proklus Diadochus (1945), S. 275f

[2] Der Kegel wird dort z. B. wie folgt erklärt: „Ein Kegel ist der Körper, der umschlossen wird, wenn ein rechtwinkliges Dreieck, während eine der Seiten um den rechten Winkel fest bleibt, durch Herumführen wieder in dieselbe Lage zurückgebracht wird, von der es ausging.“ Euklid (1997), XI. Buch, Definition 18, S. 316

Kautschitsch/Metzler herausgegebenen Tagungsbänden zu den Klagenfurter Workshops zur „Visualisierung in der Mathematik" wider. Der Aufwand zur Herstellung entsprechender Mathematikfilme ist allerdings erheblich und darüber hinaus haben Unterrichtsfilme den Nachteil, dass Eingriffe in den Ablauf eines einmal erstellten Films nur in geringem Umfang durchführbar sind. Damit sind aber entdeckendes Lernen und das Beschreiten individueller Lernwege kaum oder nur sehr eingeschränkt möglich. Diese Problematik hat sich durch die Verfügbarkeit von Computern und die Entwicklung von dynamischer Geometriesoftware (DGS), Tabellenkalkulationsprogrammen (TKP) und Computeralgebrasystemen (CAS) grundlegend geändert. Mit ihrer Hilfe können Visualisierungen relativ einfach erzeugt und dynamisch variiert werden. Wichtig im Hinblick auf das Bewegliche Denken ist dabei die Möglichkeit, einzelne Ausgangsdaten oder Parameter gezielt verändern zu können.

Ziegler (1991) schrieb im Zusammenhang mit dem Computereinsatz im Mathematikunterricht von den Vorteilen des „variablen Denkens", nämlich des Denkens in Bewegungen bzw. Veränderungen. Seitdem ist der Aspekt „Veränderungen und Bewegungen" (auch unter den Begriffen „Dynamik" und „Variation") für den Mathematikunterricht ständig in der didaktischen Diskussion.[3] In den Veröffentlichungen werden vielfach Möglichkeiten zum Einsatz von DGS[4], TKP[5] und auch CAS[6] diskutiert oder vorgeschlagen. Es gibt einige qualitative Arbeiten, die sich in Fallstudien u. a. damit auseinander setzen, wie Schülerinnen und Schüler mit dynamischer Mathematiksoftware arbeiten.[7] Darüber hinaus gibt es Untersuchungen, die Defizite im Bereich des Denkens in Bewegungen bzw. Veränderungen feststellen.[8]

Aus dem bisher Dargestellten geht hervor, dass die gedankliche Auseinandersetzung mit Bewegungen bzw. Veränderungen ein wichtiger Aspekt des Mathematikunterrichts ist. Eine Förderung von Schülerinnen und Schülern in diesem Bereich erfordert eine Zusammenstellung der dazu grundsätzlich notwendigen Kernfähigkeiten, die aber bisher fehlte. Auf der Grundlage eingehender Literaturrecherchen, eigener Unterrichtserfahrungen und durch die theoretische Analyse des Arbeitens mit dynamischer Mathematiksoftware haben sich für mich drei Kernfähigkeiten herauskristallisiert, die im Folgenden unter dem Begriff Bewegliches Denken zusammengefasst werden sollen:

1. In eine Konfiguration Bewegung hineinsehen und damit argumentieren.
2. Die Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren.
3. Das Änderungsverhalten erfassen und beschreiben.

---

3 Seit 1991 finden sich in jedem Jahr mehrere Artikel in der mathematikdidaktischen Literatur, die den genannten Aspekt von sehr verschiedenen Seiten beleuchten.

4 Vgl. etwa Elschenbroich (1999), Elschenbroich (2000), Schumann (1991), Schumann (2000a), Ulm (2003).

5 Vgl. etwa Hole (1998), Thies (2001), Thies (2002), Weigand (2001)

6 Vgl. etwa vom Hofe (1996a), vom Hofe (1996b)

7 Vgl. etwa Hölzl (1994), Hölzl (1999a), Thies (2002), vom Hofe (1998b), vom Hofe (1999), Weigand/Weller (2001).

8 Vgl. etwa Monk (1992) und Ossimitz (2000).

Diese Kompetenzen stellen unterschiedliche Anforderungsniveaus dar. Es ist anspruchsvoller, eine Gesamtkonfiguration mit den darin enthaltenen Veränderungsmöglichkeiten und Invarianten zu erfassen und zu analysieren, als in eine Konfiguration „nur“ *eine* Bewegung hineinzusehen. Das Änderungsverhalten, also die Art und Weise der Änderung zu erfassen und zu beschreiben ist erfahrungsgemäß besonders schwierig. In einer Untersuchung von Ossimitz (2000) scheiterten die meisten der beteiligten Abiturienten bei entsprechenden Fragestellungen. Es liegt deshalb nahe, davon auszugehen, dass die Kompetenzen des Beweglichen Denkens in der genannten Reihenfolge jeweils höhere intellektuelle Anforderungen darstellen.

Bewegung hineinsehen und damit argumentieren

Hier geht es um die Fähigkeit, in ein (statisches) Phänomen eine Bewegung bzw. eine Veränderung hineinsehen zu können.[9] Darüber hinaus gehört zu dieser Komponente des Beweglichen Denkens aber auch die Fähigkeit, diese vorgestellte Bewegung bzw. Veränderung zur Argumentation beim Lösen von Problemen, Entdecken von Zusammenhängen und ganz allgemein beim Erforschen von (mathematischen) Phänomenen benutzen zu können.

Diese Fähigkeit nutzte z. B. Wagenschein (1969) um zu erarbeiten, dass in der euklidischen Ebene die Summe der Innenwinkel α, β und γ in einem Dreieck immer 180° beträgt. „Die Einsicht gelingt, wenn man (…) den einen Winkel, α, längs der einen Seite bis zur nächsten Ecke fortgleiten läßt, und zwar so, daß der eine seiner Schenkel auf dieser Seite sich mit ihr deckend, gleitet. Der andere bleibt dann immer zu sich selbst parallel, er weist immer in dieselbe Richtung, die er auch anfangs hatte (Figur 4). Macht man das Entsprechende mit β und erkennt ferner γ in seinem Gegenüber wieder, so ist man schon fertig.“[10] Wagenschein (1969, S. 27ff)

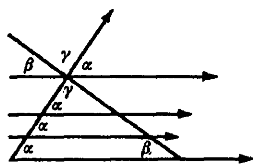


Fig. 4

Auch Schwank (1996) meint diese grundlegende Fähigkeit, wenn sie von funktionalem Denken im Gegensatz zum prädikativen Denken, nämlich dem Denken in Strukturen spricht. Ihre Untersuchungen legen nahe, dass Personen recht stabile individuelle Präferenzen für eine dieser Denkweisen entwickeln.[11] Bewegliches Denken umfasst im Gegensatz zum so verstandenen „funktionalen Denken“ aber weitere Fähigkeiten.

9 Diese Fähigkeit wird z. B. auch für alle dynamischen Denkvorgänge des Raumvorstellungsvermögens (räumliche Visualisierung, mentale Rotation und räumliche Orientierung) benötigt. Dabei sind die räumliche Visualisierung und die mentale Rotation Spezialfälle der Fähigkeit „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ des Beweglichen Denkens, während man zur räumlichen Orientierung daneben auch noch Aspekte der Fähigkeit „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ benötigt. Einen Überblick zum Raumvorstellungsvermögen bietet Maier (1999).

10 Wagenschein nutzt hier den Stufen- und Wechselwinkelsatz, die ihrerseits auf dem Parallelenaxiom beruhen.

11 Unabhängig von evtl. vorhandenen individuellen Präferenzen, muss das Bewegliche Denken geschult werden. Bei funktionalen Denkern im Sinne Schwanks werden auf diese Weise die vorhandenen Fähigkeiten angemessen gefördert und bei prädikativen Denkern wird das Methodenrepertoire erweitert.

Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren

Gemeint ist hier die Fähigkeit, die Fokussierung auf bestimmte Aspekte der Gesamtkonfiguration wechseln und so jeweils für gerade betrachtete Fragestellungen relevante Veränderungen bzw. Invarianten in den Blick nehmen zu können. Dies beinhaltet die Fähigkeiten,

- Konsequenzen von Bewegungen bzw. Veränderungen im Hinblick auf die vorliegende Gesamtsituation erkennen und analysieren zu können und
- Veränderungsmöglichkeiten an der Gesamtkonfiguration unter Beibehaltung der bestimmenden Eigenschaften der Konfiguration ausloten und analysieren zu können.

Die letztgenannte Fähigkeit kann z. B. beim Erforschen einer Begriffshierarchie gewinnbringend eingesetzt werden. Untersucht man etwa Zusammenhänge zwischen Viereckstypen, so kann man ausgehend von einem Trapez fragen, welche Veränderungen möglich sind, ohne dass das Trapez seine bestimmende Eigenschaft verliert, nämlich den Besitz zweier zueinander paralleler Seiten. Eine Möglichkeit besteht z. B. darin, die Länge einer der beiden parallelen Seiten zu verändern, bis sie genauso lang ist wie die andere. Man erhält ein Parallelogramm. Da bei der Veränderung die charakterisierende Eigenschaft des Trapezes erhalten geblieben ist, handelt es sich beim Parallelogramm um ein spezielles Trapez. Eine weitere Variationsmöglichkeit ist jede Scherung, bei der eine der parallelen Seiten des Trapezes Scherachse ist. Auf diese Weise kann man aus einem Parallelogramm ein Rechteck erzeugen ohne die charakteristischen Eigenschaften eines Parallelogramms und damit eines Trapezes zu verändern. Folglich ist ein Rechteck ein spezielles Parallelogramm und damit auch ein spezielles Trapez. Diese Überlegungen ließen sich noch fortführen (vgl. Roth 2008).

Änderungsverhalten erfassen und beschreiben

Der dritte Aspekt des Beweglichen Denkens ist die Fähigkeit, die Frage nach der Art und Weise der Veränderung beantworten, also das Änderungsverhalten qualitativ erfassen und beschreiben zu können.

Als Beispiel soll hier die Frage dienen, wo sich der Kolbenkopf eines Kolbenmotors (vgl. Abb. 1) am schnellsten und wo am langsamsten bewegt, wenn sich das „Schwungrad“ gleichmäßig, d. h. mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, dreht? Zunächst wird die Auf- bzw. Abwärtsbewegung des Kolbenkopfes von der Bewegung des Ansatzpunktes A der Pleuelstange am Schwungrad bestimmt. Sie lässt sich in einen Anteil in Kolbenrichtung und einen Anteil senkrecht dazu zerlegen. Bei der gleichmäßigen Kreisbewegung des Punktes A ändern sich diese beiden Bewegungsanteile von A ständig. In der Nähe seiner höchsten bzw. tiefsten Lage bewegt sich A fast senkrecht zur Kolbenrichtung. In diesen Bewegungssituationen wird der Kolben folglich nur sehr wenig nach oben bzw. unten bewegt. Bei der Bewegung von A nach unten bzw. nach oben ist der Bewegungsanteil von A in Kolbenrichtung am größten. Folglich ist die Kolbenbewegung bei der Aufwärts- und Abwärtsbewegung von A am schnellsten und um die höchste bzw. tiefste Lage herum am langsamsten.

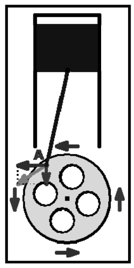


Abb. 1: Kolbenmotor

2 Beweglichkeit des Denkens in der Psychologie – eine Abgrenzung

In der Psychologie ist im Zusammenhang mit Denken auch immer wieder von Beweglichkeit die Rede, womit ein flexibler Umgang mit Wissen gemeint ist, also die Fähigkeit, Wissen umstrukturieren, aus unterschiedlichen Perspektiven betrachten und auf neue Ziele anwenden zu können. Der Psychologe Köhler (1963) verweist z. B. darauf, dass zum intelligenten Denken und Handeln die Fähigkeit gehört, auch Umwege benutzen zu können, um zum Ziel zu gelangen, und für Wertheimer (1957) ist ein Aspekt des produktiven Denkens die Fähigkeit zur Umstrukturierung.

Aufbauend auf Piaget gibt Aebli (2001) Aspekte des „beweglichen Denkens und Handelns" an. Vergleicht man diese Fähigkeiten mit denen, die hier unter dem Begriff Bewegliches Denken subsumiert wurden, so erkennt man Gemeinsamkeiten, aber auch deutliche Unterschiede.

- „Die elementarste Form der geistigen Beweglichkeit (…) ist die Fähigkeit, Veränderungen im Geiste nachzuvollziehen." Aebli (2001, S. 314)

Veränderungen „im Geiste nachzuvollziehen" impliziert, sie vorher bereits wahrgenommen zu haben. Die Fähigkeit Veränderungen, wenn sie sich ereignen, als solche bewusst wahrzunehmen, ist sicher eine Voraussetzung dafür, sich Veränderungen auch dann vorzustellen, wenn sie nicht real ablaufen und damit sinnlich wahrgenommen werden können. Mir geht es beim Beweglichen Denken gerade darum, Bewegungen bzw. Veränderungen in ein Phänomen hineinzusehen, bei dem zunächst keine Bewegung vorhanden ist bzw. diese nicht geeignet wahrgenommen werden kann. Es geht also nicht um ein Nachvollziehen von bereits vorhandenen Veränderungen, sondern um das bewusste, aktive Verändern einer evtl. zunächst statischen Konfiguration einschließlich der Reflexion der Konsequenzen dieser Veränderung, um neue Einsichten in Zusammenhänge zu gewinnen.

- „Beweglichkeit bedeutet (…) die Fähigkeit, sich auf fremde Standpunkte zu stellen und zu erkennen, dass die Perspektive von verschiedenen Standpunkten verschieden ausfällt." Aebli (2001, S. 315)

„Sich auf fremde Standpunkte stellen" korrespondiert mit der Fähigkeit des Beweglichen Denkens, die Gesamtkonfiguration zu erfassen und zu analysieren. Um eine Veränderung in ihren Auswirkungen auf die Gesamtkonfiguration zu erfassen ist es notwendig, jeweils relevante Veränderungen bzw. Invarianten zu fokussieren und ggf. miteinander in Beziehung zu setzen.

- „Die Planung von Handlungen erfordert (…) Beweglichkeit. Der Handelnde sollte seine Handlungspläne den sich wandelnden Bedingungen anpassen, wenn nötig die Zwischenziele verändern können, um auf einem neuen Weg zum Ziel zu gelangen." Aebli (2001, S. 318)

„Zwischenziele verändern können“ spielt beim Beweglichen Denken dann eine Rolle, wenn die Anzahl der Freiheitsgrade bewusst variiert wird, um die Konsequenzen einer Veränderung besser analysieren zu können.

In dem von mir für mathematikdidaktische Zwecke geprägten Begriff des Beweglichen Denkens tritt zu den bereits bei Aebli genannten noch ein weiterer Aspekt hinzu, nämlich die Fähigkeit, Änderungsverhalten erfassen und beschreiben zu können. Diese Fragestellung nach der Art und Weise der Veränderung der abhängigen Größen bei gleichmäßigem Durchlaufen des bzw. eines Definitionsbereichs ist für viele mathematische Sachverhalte relevant und muss deshalb mit Blick auf den Mathematikunterricht aufgenommen werden.

Weitere Aspekte zur „Beweglichkeit des Denkens“ finden sich bei Lompscher et al. (1976). Dort schreibt Hasdorf: „Das geistige – beim Probieren mit praktischen Handlungen verbundene – Verändern der jeweiligen Beziehungen der Dinge und Eigenschaften zueinander ist der eigentliche Kern der Beweglichkeit des Denkens.“ Lompscher et al. (1976, S. 16) Das „aktive Umformen von Gegebenheiten“ (a.a.O. S. 16) spielt auch bei der Fähigkeit „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ des Beweglichen Denkens eine Rolle. Allerdings werden beim Beweglichen Denken z. B. keine „Funktionsveränderungen von Elementen“ (a.a.O. S. 17) vorgenommen, sondern es wird jeweils eine Variable gezielt in ihrem Definitionsbereich variiert und dabei die Veränderungen von abhängigen Größen (bzw. die Invarianten) in den Blick genommen. „Reversibilität“ (a.a.O. S. 17) spielt beim Beweglichen Denken bei der Fähigkeit eine Rolle, die Fokussierung auf bestimmte Aspekte einer Konfiguration wechseln zu können. Bei Lompscher et al. (1976) kommt die Reversibilität dagegen eher in den Punkten „Wechseln von Annahmen oder Kriterien“ (a.a.O. S. 17) sowie „Erfassen und Anwenden der Relativität“ (a.a.O. S. 17) zum Tragen. Aus der Sicht des Beweglichen Denkens würde auch der Punkt „Gleichzeitiges Beachten mehrerer Aspekte“ (a.a.O. S. 17) unter die Fähigkeit „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ zu subsumieren sein.

Im Hinblick auf mathematikdidaktische Anforderungen ist es notwendig, Bewegliches Denken unter anderen Gesichtspunkten zu sehen, als dies in der Psychologie der Fall ist. Insbesondere muss die Fähigkeit, das Änderungsverhalten erfassen und beschreiben zu können, für mathematikdidaktische Zwecke hinzukommen.

3 Forschungsfragen

Es wurde deutlich, dass Bewegliches Denken im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle spielt. Vor diesem Hintergrund, sollte in einer Längsschnittuntersuchung über ein ganzes Schuljahr den Fragen nachgegangen werden, ob die Entwicklung des Beweglichen Denkens durch einen geeigneten Unterricht gefördert werden kann und ob ein Transfer des Beweglichen Denkens auf andere Inhalte bzw. Kompetenzen stattfindet, die nicht explizit in den Lehrgang zur Schulung des Beweglichen Denkens einbezogen wurden. Dazu wurde ein Unterrichtskonzept für den gesamten gymnasialen Geometrieunterricht der 7. Jahrgangsstufe entwickelt. Auf dieser Basis wurden folgende Forschungsfragen untersucht:

Entwicklung des Beweglichen Denkens

1. Wirkt sich das entwickelte Unterrichtskonzept positiv auf die Entwicklung der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens aus?

Diese Frage lässt sich noch präzisieren, wenn man die bereits vor der Untersuchung vorhandenen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler im Bereich des Beweglichen Denkens berücksichtigt.

2. Ist die Steigerung der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens infolge des Unterrichts abhängig davon, wie stark die Kompetenzen des Beweglichen Denkens bereits vor dem Unterricht ausgeprägt waren?

Transfer des Beweglichen Denkens auf andere Inhalte bzw. Kompetenzen
Ein weiterer Gesichtspunkt ist die Frage nach der Fähigkeit, Bewegliches Denken auf neue Inhaltsbereiche anzuwenden.

3. Wirkt sich ein Unterricht, der nur in Geometrie stattfindet, auch auf die Lösungswahrscheinlichkeit von Fragestellungen zum Beweglichen Denken aus, die der Algebra zuzuordnen sind?

Die Entwicklung einer Denkweise ist ein langwieriger Prozess. Der im Rahmen dieser Studie durchgeführte Unterricht stand am Anfang dieses Prozesses und musste deshalb zunächst Grundlagen erarbeiten. Er zielte folglich primär auf die Entwicklung der ersten beiden Kompetenzen des Beweglichen Denkens mit den niedrigeren Anforderungsniveaus. Damit stellt sich folgende Frage:

4. Inwieweit sind die Schülerinnen und Schüler nach einem Unterricht, der primär die ersten beiden Kompetenzen des Beweglichen Denkens fordert und fördert, in der Lage, auch das Änderungsverhalten zu erfassen und zu beschreiben?

4 Grundideen eines Unterrichtskonzepts[12]

Vor der Entwicklung des Unterrichtskonzepts für die Längsschnittstudie wurde in Voruntersuchungen der Frage nachgegangen, ob Bewegliches Denken bei Schülerinnen und Schülern durch geeignete Unterrichtsansätze entwickelt werden kann, die sich auf Unterrichtssequenzen von bis zu sieben Unterrichtsstunden beschränken. Die Ergebnisse deuteten darauf hin, dass dies nicht möglich ist. Ein nur wenige Stunden umfassendes Konzept führte zu keiner – anhand der Bearbeitung des entwickelten Leistungstests – erkennbaren Weiterentwicklung der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens.[13] Dies bestä-

[12] Konkrete Beispiele aus dem Unterrichtskonzept finden sich in Roth (2005) und Roth (2006).

[13] Dieses Ergebnis deckt sich mit Resultaten anderer Untersuchungen. Schwank (1996, S. 178) warnt auf Grund eigener Erfahrungen vor allzu großen Erwartungen, und in einer Zusammenfassung der Ergebnisse empirischer Untersuchungen zum Lehren von Denkfähigkeiten (thinking skills) beantwortet Sternberg die Frage nach der für ein solches Programm sinnvollerweise mindestens aufzuwendenden Zeit wie folgt: „(…) I doubt that a program that is of less than a semester in duration is worthy of serious consideration and I would strongly urge planning that

tigte meine Annahme, dass die Entwicklung des Beweglichen Denkens ein langwieriger Prozess ist. Auf Grund dieser Erfahrungen wurde das Unterrichtskonzept auf ein ganzes Schuljahr ausgeweitet.

Die Voruntersuchungen zeigten auch, dass Unterrichtsinhalte der Geometrie sich besser zur Anbahnung des Beweglichen Denkens eignen, weil Veränderungen, die auf Bewegungen (in der Ebene) beruhen, für die Schülerinnen und Schüler leichter vorstellbar und auch visuell leichter zugänglich sind als etwa in der Algebra, z. B. beim Untersuchen des Änderungsverhaltens von Termen, da hier ein höherer Abstraktionsgrad notwendig ist.

Das auf dieser Grundlage entwickelte Unterrichtskonzept für den Geometrieunterricht der 7. Klasse, dessen grundlegende Ideen im Folgenden kurz skizziert werden, versucht, die Entwicklung des Beweglichen Denkens und der damit verbundenen Kompetenzen durch das gezielte Eingehen auf diese Denkweise in geeigneten Kontexten zu fördern. Im Rahmen der vom Lehrplan[14] vorgegebenen Inhalte wurden dabei Schwerpunkte in den Bereichen gesetzt, in denen das bewusste Denken in Bewegungen und das Argumentieren damit besonders gewinnbringend zu sein schienen. So wurde etwa das Thema „besondere Dreiecke" des Lehrplans mit einem eigens konzipierten Aufgabenformat zur Förderung des Beweglichen Denkens besonders intensiv und ausführlich bearbeitet. Den Rahmen steckte dabei ein Dreieck, bei dem eine Seite fest vorgegeben war. Gefragt war jeweils, wie der dritte Eckpunkt bewegt werden kann, so dass das Dreieck dabei immer gleichschenklig (bzw. rechtwinklig, spitzwinklig, stumpfwinklig, …) bleibt.[15]

Manche Themen, wie etwa „Grundbegriffe der Ebenen Geometrie" und „geometrisches Zeichnen", bieten sich nicht für einen beweglichen Zugang an und wurden deshalb bewusst nicht im Hinblick auf die Entwicklung des Beweglichen Denkens gestaltet. Bei anderen Themengebieten wurden die Teile, die mit Hilfe des Beweglichen Denkens angegangen werden können gegenüber denen betont (auch im Hinblick auf die aufgewendete Unterrichtszeit), die einen eher statischen Charakter haben. So wurden etwa die „Kongruenzsätze für Dreiecke" die in der Anwendung rein statischer Natur sind, bewusst an das Ende des Schuljahres verlegt. Dadurch war es möglich, den Schwerpunkt

---

includes at least a year of instruction (…). Of the programs described in this book [even the shortest] (…) could not be done adequately in less than a semester. In contrast (…) [another] program could range from the lower elementary grades all the way through high school. Ideally, I would view thinking-skills instruction as something that continues throughout schooling (…). If there is one thing we have learned about thinking skills, it is that there is no quick fix. Shorter-term programs may produce increases in test scores by teaching to specific tests; they will not produce long-term gains in thinking skills, nor should they be expected to produce such gains." Sternberg (1987, S. 257)

14 Da das Konzept an bayerischen Gymnasien erprobt werden sollte, musste eine inhaltliche Orientierung am bayerischen Gymnasiallehrplan erfolgen, der in der 7. Jahrgangsstufe im Untersuchungszeitraum folgende Inhalte für die Geometrie vorsah: „Grundbegriffe der ebenen Geometrie; geometrisches Zeichnen; (…) Winkel an Geradenkreuzungen; Winkel bei Dreiecken und Vierecken; (…) Symmetrie und Kongruenz von Figuren; (…) Dreiecke: Transversalen, besondere Dreiecke, Konstruktionen" Bayerisches Kultusministerium (1991, S. 1200-1203)

15 Ausführlichere Ausführungen zu diesem Aufgabenformat findet man in Roth (2006).

auf die Erarbeitung dieser Sätze zu legen. Im Sinne der Entwicklung der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens, ging es dabei insbesondere um die Frage, wie sich Änderungen an vorgegebenen Bestimmungsstücken eines Dreiecks auf die Konstruierbarkeit auswirken, und es ging um die Argumentation bzgl. der Kongruenz zweier Dreiecke über vorgestellte Bewegungen.[16] Auch hier wurden also wieder Fähigkeiten des Beweglichen Denkens eingesetzt und geübt.

Tabelle 1 ist zu entnehmen, welche Inhalte des Geometrielehrplans in Hinblick auf die Entwicklung und Förderung des Beweglichen Denkens unterrichtet wurden, wie viele Unterrichtseinheiten á 45 Minuten dafür aufgewendet wurden und welche Fähigkeiten des Beweglichen Denkens dabei eine Rolle gespielt haben. Es wird auch deutlich, dass in der Algebra nicht im Sinne des Beweglichen Denkens unterrichtet wurde. Die Kolleginnen und Kollegen, die im Untersuchungszeitraum nach meinem Konzept unterrichtet haben, erhielten dazu von mir kein Unterrichtsmaterial und entwickelten auch selbst keine eigenen Konzepte dazu.[17]

Anzahl der Unterrichts-einheiten	**Inhalte**	**Fähigkeiten des Beweglichen Denkens**[18]
1	Scheitel- & Nebenwinkelsatz als Erfahrungssätze	1
3	Winkelverschiebung (vgl. Wagenschein): • Winkelsätze an parallelen Geraden • Innenwinkelsumme im Dreieck • Außenwinkelsatz	1
3	Achsenspiegelung über die Klappbewegung; Dreiecksungleichung	1 & 2
9	Begriffe gleichschenkliges, gleichseitiges, recht-, stumpf- und spitzwinkliges Dreieck und deren Eigenschaften; Aufgabenformat: Eine Dreiecksseite ist fest vorgegeben, wie kann der dritte Eckpunkt bewegt werden, so dass das Dreieck dabei immer … bleibt.	1 & 2
3	Lage der Schnittpunkte von Dreieckstransversalen	1 & 2
4	Verschiebung, Drehung und Punktspiegelung über „Bewegungen“	1 & 2
1	Kontrastbeispiel: Schiefe Achsenspiegelung	1 & 2
5	Erarbeitung der Kongruenzsätze für Dreiecke über die eindeutige Konstruierbarkeit und die Argumentation mit Bewegungen	1 & 2
3	Änderungsverhalten erfassen und beschreiben	1, 2 & 3

Tab. 1: Überblick über die Unterrichtseinheiten zur Entwicklung und Förderung des Beweglichen Denkens in den Unterrichtsklassen

16 Dabei wurde versucht ein konstruiertes Dreieck in Gedanken geeignet zu verschieben und zu drehen (notfalls auch an einer Dreiecksseite zu „klappen“), so dass es mit einem vorgegebenen Dreieck mit gleichen Bestimmungsstücken zur Deckung gebracht werden konnte.

17 In den unterrichtsbegleitenden Lehrerfortbildungen, die ich mit den Kolleginnen und Kollegen gehalten habe, wurde deutlich, dass es für sie ein hoher Aufwand war, nach diesem für sie ungewohnten Konzept zu unterrichten und sie sich erst langsam einfinden mussten. Dies mag ein Grund dafür sein, dass sie nicht selbst kreativ geworden sind und die Konzepte auf andere, von mir nicht ausgearbeitete Inhalte angewandt haben. Außerdem wurden sie explizit gebeten, in der Algebra „traditionell“ zu unterrichten.

18 Die angegebenen Zahlen entsprechen der Nummerierung der drei Fähigkeiten des Beweglichen Denkens auf Seite 3.

Ausgangspunkt des Unterrichtskonzepts ist die Überzeugung, dass ein Individuum sich nur dann Wissen aneignet und Fähigkeiten erwirbt, wenn es sich intensiv und selbsttätig damit auseinander setzt. Da Schülerinnen und Schüler sich aber zunächst mit einer Vorgehensweise vertraut machen müssen, bevor sie selbstständig damit arbeiten können, setzt das Unterrichtskonzept dieser Arbeit auf einen gestuften Aufbau.

Grundlegend für das Bewegliche Denken ist die Fähigkeit, mit Bewegungen bzw. Veränderungen argumentieren zu können. Das Unterrichtskonzept trägt dem Rechnung, indem zunächst Probleme betrachtet werden, die im Wesentlichen mit der Fähigkeit „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ gelöst werden können. Zunächst wurde im Inhaltsbereich „Winkel an Geradenkreuzungen; Winkel bei Dreiecken“[19] längere Zeit mit dieser grundlegenden Fähigkeit des Beweglichen Denkens am Beispiel der „Winkelverschiebung“[20] gearbeitet, dann wurden die Schülerinnen und Schüler sukzessive auch mit Fragestellungen konfrontiert, zu deren Bearbeitung sie zusätzlich die Fähigkeit „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ benötigten. Erst ganz am Ende des Schuljahres, als die Schülerinnen und Schüler bereits mit Bewegungen vertraut waren, bearbeiteten sie in Gruppenarbeit Probleme, die die dritte Fähigkeit des Beweglichen Denkens, nämlich „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben“ erforderten.

Die in Tabelle 1 zusammengestellten Unterrichtseinheiten wurden gleichmäßig über das gesamte Schuljahr verteilt durchgeführt. Als Hilfsmittel fanden dabei hauptsächlich von mir auf der Basis der dynamischen Geometriesoftware EUKLID DynaGeo entwickelte Lernumgebungen Verwendung. Die Entscheidung für diese Software wurde getroffen, weil damit Bewegungen sehr leicht realisiert werden können (Zugmodus und Animation), sie im Gegensatz zu anderen Medien (z. B. Filme, Modelle u. ä.) eine sehr flexible Gestaltung von Visualisierungshilfen ermöglicht[21], sie für Schülerinnen und Schüler weitgehend intuitiv zu bedienen ist und fast alle bayerischen Gymnasien über eine Schullizenz dieser Software verfügen.

EUKLID DynaGeo-Dateien wurden häufig als Experimentierumgebungen genutzt, an denen die Schülerinnen und Schüler Entdeckungen machten, die sie aber auch als heuristisches Hilfsmittel zum Testen eigener Hypothesen nutzten und mit dessen Hilfe sie schließlich Begründungen erarbeiten konnten. Daneben wurden sie auch von den Lehrkräften eingesetzt um Problemstellungen zu visualisieren und mit den Schülerinnen und Schülern zu diskutieren. In allen genannten Einsatzszenarien wurde zunächst die Komplexität des notwendigen beweglichen Denkprozesses dadurch reduziert, dass *Fokussierungshilfen* in die Lernumgebungen eingebaut wurden, die die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schülern auf jeweils relevante Aspekte der Konfiguration lenkten. Auf diese Weise konnten sie sich stärker auf Analyse- und Argumentationsprozesse konzentrieren. Im Zuge der Entwicklung des Beweglichen Denkens wurden die Strukturierungshilfen in den Lernumgebungen schrittweise verringert.

---

19 Bayerisches Kultusministerium (1991, S. 1201)

20 Vgl. das Zitat von Wagenschein in Abschnitt 1.

21 Trotz der vielfältigen Möglichkeiten, die die Software bietet, müssen zur Konzeption und Umsetzung von Visualisierungshilfen Erfahrung im Umgang mit der Software sowie eine ganze Reihe von (neuen) didaktischen Ideen eingebracht werden.

Ziel dieses Prozesses ist es, dass Schülerinnen und Schüler die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens selbstständig an geeigneten Stellen einsetzen. Es geht also nicht darum, alle Probleme mit Hilfe des Beweglichen Denkens zu lösen, sondern die Möglichkeit der Herangehensweise an Fragestellungen im Sinne des Beweglichen Denkens im Methodenrepertoire der Schülerinnen und Schüler zu verankern. Falls notwendig, erstellen sie dazu selbst die zu untersuchenden Konfigurationen mit Hilfe von DGS, planen selbstständig Fokussierungshilfen und setzen sie um bzw. nutzen DGS zur Kontrolle der Ergebnisse des im Kopf abgelaufenen Beweglichen Denkens.

Wie die auf dem Weg zu diesem Ziel notwendigen Fokussierungshilfen in Lernumgebungen aussehen können, soll am Beispiel der folgenden Aufgabe verdeutlicht werden, deren Fragen jeweils einzeln für die Winkel α, β und γ zu beantworten sind.

> Der Punkt C des Dreiecks ABC wird entlang der Geraden g gleichmäßig nach rechts bis zum Punkt P bewegt (vgl. Abb. 2 oben). Wie ändert sich dabei der Winkel α?
>
> - Wird er größer oder kleiner?
> - Gibt es maximale und minimale Winkelgrößen von α und für welche Lage(n) von C treten sie gegebenenfalls auf?
> - Ändert sich der Winkel α überall gleichschnell oder gibt es Bereiche für die Lage von C, in denen er sich schneller und andere in denen er sich langsamer ändert?

Abb. 2 zeigt, wie Fokussierungshilfen aussehen und gestuft werden können. Ganz oben ist nur die zugehörige Konfiguration dargestellt, wobei wesentliche Größen (hier etwa die Winkel) verschiedenfarbig hervorgehoben wurden. Eine deutlich stärkere Fokussierung auf die Winkelgrößen und deren Änderungsverhalten erfolgt über ein dynamisches Balkendiagramm, das bei Bedarf über den Schieberegler „Hilfe 1“ (vgl. Abb. 2 Mitte) eingeblendet werden kann. Es visualisiert bei der Bewegung von C auf g die Winkelgrößen der Innenwinkel des Dreiecks über die Höhe der Balken. Auf diese Weise kann das Augenmerk auf die Extremwerte und den Vergleich der Änderungen der drei Winkel erfolgen. Sollte auch diese Fokussierungshilfe noch nicht reichen um die Fragen zu beantworten, so kann mit dem Schieberegler „Hilfe 2“ noch eine stärkere Fokussierungshilfe eingeblendet werden. Wie Abb. 2 unten zeigt, wird hier in einem Liniendiagramm über der x-Koordinate von C jeweils die Winkelgrößen der Innenwinkel aufgetragen. Für den

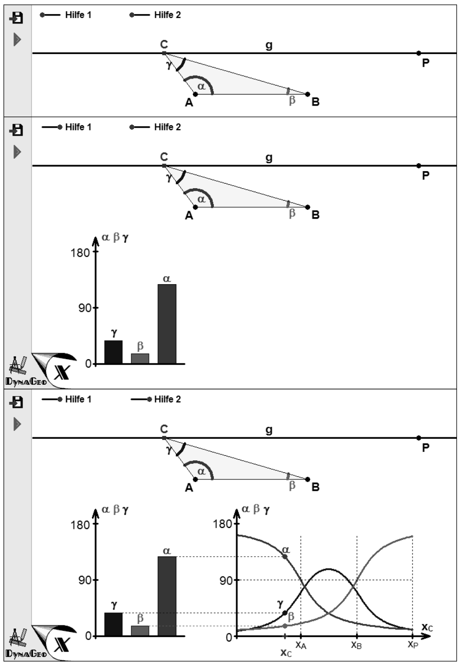


Abb. 2: Beispiel einer eingesetzten EUKLID DynaGeo-Datei mit gestuften Fokussierungshilfen

Fall, dass die Fragen ohne diese Hilfe nicht beantwortet werden konnten, lassen sich damit rückblickend die verschiedenen Darstellungsweisen gegenseitig interpretieren und so neue Erkenntnisse und insbesondere auch Begründungen erarbeiten.

5 Leistungstest

Zur Überprüfung des Erfolgs des Unterrichtskonzeptes im Hinblick auf eine mögliche (Weiter-)Entwicklung der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens der Schülerinnen und Schüler wurde ein Leistungstest eingesetzt. Ein Test, der die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens überprüft, lag bisher nicht vor und musste deshalb neu entwickelt werden.

5.1 Entwicklung des Leistungstests[22]

Für den Test mussten Probleme identifiziert werden, deren Lösung Bewegliches Denken erfordern. Die Items wurden deshalb so konstruiert, dass sie bereits durch die Art der Aufgabenstellung eine Herangehensweise über vorgestellte Veränderungen bzw. Bewegungen nahe legen. Da ein erster Test von Itementwürfen mit einer 7. Klasse eines bayerischen Gymnasiums gezeigt hat, dass die Schülerinnen und Schüler teilweise erhebliche Schwierigkeiten mit Items hatten, in denen eine (halb-)offene Beantwortung gefordert war, wurden für die Endfassung des Leistungstests nur Items mit Antwortvorgaben in Form von Auswahlantworten aufgenommen. Zur Konstruktion geeigneter Distraktoren (falscher Antwortalternativen) wurde einer 7. Klasse eines bayerischen Gymnasiums und einer Gruppe von 38 Lehramtsstudierenden[23] ein Test mit den Inhalten der intendierten Items vorgelegt, bei denen die Antworten frei formuliert werden mussten. Auf der Grundlage der zahlreichen falschen Antworten aus dieser Voruntersuchung wurden die Distraktoren ausgearbeitet. Auf diese Weise wurde versucht, die Wahrscheinlichkeit zu verringern, die korrekte Auswahlantwort im „Ausschlussverfahren“ auf Grund von unrealistischen Antwortalternativen zu finden. Weitere Maßnahmen zur Verringerung der Ratewahrscheinlichkeit waren die Vorgabe, dass jeweils mehrere Auswahlantworten richtig sein können, sowie die Angabe von möglichst vielen sinnvollen Distraktoren bei jedem Item.

Abb. 3 zeigt ein Testitem, zu dessen Beantwortung die Fähigkeit „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ benötigt wird. Dazu muss man sich die Bewegung des Punktes C auf der Kreislinie nach links vorstellen. Dabei wird (dies ist die erste Argumentation) der zweite Schenkel $[AC$ des Winkels α nach links geklappt, wodurch der Winkel immer größer wird. Nähert sich C dem Punkt A immer weiter an, dann hilft es, sich zu vergegenwärtigen, dass der Schenkel $[AC$ im Grenzfall zur Tangente würde und vorher immer Sekante des Kreises bleibt. Damit wird deutlich, dass der Winkel α während der gesamten Bewegung von C immer größer wird.

---

22 Die Testhefte des entwickelten Leistungstests für den Vor- und Nachtest können unter http://www.juergen-roth.de/veroeffentlichungen/ im Internet abgerufen werden.

23 Es handelte sich um eine Gruppe von Lehramtsstudierenden des 2. Semesters mit Unterrichtsfach Mathematik. Die Mehrheit strebte das Lehramt an Realschulen an, einzelne Studierende aber auch das Lehramt für Haupt- bzw. Grundschulen.

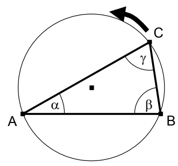
Diese Fragestellung war auch den Schülerinnen und Schülern unbekannt, die im Hinblick auf das Bewegliche Denken unterrichtet wurden. Sie sollten durch den konzipierten Unterricht allerdings in die Lage versetzt werden, sich Bewegungen vorzustellen und mit den Auswirkungen dieser Bewegung zu argumentieren. Genau das testet dieses Item.

Zur Beantwortung des Testitems in Abb. 4 muss neben der eben angesprochenen noch die Fähigkeit hinzukommen, die Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren zu können. Man muss nämlich bei der vorgestellten Bewegung von C entlang der Geraden g nach rechts das gesamte Dreieck ABC und insbesondere die auftretenden Längenänderungen der Seiten überblicken und in der Lage sein, jeweils relevante Seiten zu fokussieren. Dies stellt ein höheres Anforderungsniveau dar, als nur die Veränderung einer Größe zu antizipieren.

Das Testitem in Abb. 5 erfordert die Fähigkeiten „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ sowie „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben“.

Führt man die Kreisbewegung des Punktes R in Gedanken aus, dann wird deutlich, dass die Strecke $[PR]$ immer länger wird, je weiter R sich von P entfernt. Am weitesten ist R von P entfernt, wenn R sich genau gegenüber von P auf der abgewandten Seite des Kreises befindet, also beim entfernten Schnittpunkt, der Geraden PM mit der Kreislinie. Der zweite Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kreislinie ist die Lage von R, an der die Streckenlänge $|PR|$ gerade minimal ist. Wie *ändert* sich aber die Länge der Strecke $[PR]$ bei der gleichmäßigen Kreisbe-

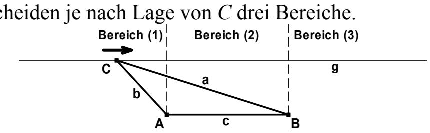
Die Eckpunkte des Dreiecks ABC liegen auf dem Kreis. Der Punkt C bewegt sich in Pfeilrichtung auf dem Kreis bis kurz vor den Punkt A.
Wie verhält sich dabei der Winkel α?



a) Er wird immer größer.
b) Er wird immer kleiner.
c) Er bleibt immer gleich.
d) Lässt sich so nicht sagen.
e) Er wird bis zu einer gewissen Stelle immer größer und dann wieder kleiner.
f) Er wird bis zu einer gewissen Stelle immer kleiner und dann wieder größer.

Abb. 3: Testitem zur Fähigkeit „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“

Es ist ein Dreieck ABC gegeben. Der Eckpunkt C wird auf der Geraden g in Pfeilrichtung bewegt. Wir unterscheiden je nach Lage von C drei Bereiche.



Es gibt im **Bereich (2)** eine Lage von C, so dass zwei Seiten des Dreiecks, nämlich
a) a und b, gleich lang sind,
b) a und c, gleich lang sind,
c) b und c, gleich lang sind.
d) Es gibt keine solche Lage für C.

Abb. 4: Testitem, zu dessen Beantwortung sowohl die Fähigkeit „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ als auch „Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren“ benötigt wird

Der Punkt R des Dreiecks PQR bewegt sich **gleichmäßig** in Pfeilrichtung auf der Kreislinie k. Dabei ändert sich die Länge der Strecke $[PR]$.
Zwischen welchen Punkten bewegt sich R, wenn sich die Länge der Strecke $[PR]$ am wenigsten ändert?

a) Zwischen 1 und 2
b) Zwischen 2 und 3
c) Zwischen 3 und 4
d) Zwischen 4 und 5
e) Zwischen 5 und 6
f) Zwischen 6 und 7
g) Zwischen 7 und 8
h) Zwischen 8 und 1

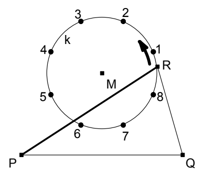


Abb. 5: Testitem, zu dessen Beantwortung die Fähigkeiten „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren“ und „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben“ benötigt wird

wegung von *R*? Betrachtet man die Strecke als Gummiband, das an einem Ende festgehalten wird und an dessen anderem Ende man zieht, so wird klar, dass sich deren Länge am stärksten ändert, wenn man in die durch die aktuelle Lage der Strecke festgelegte Richtung (die „aktuelle Streckenrichtung") weiterzieht. Zieht man dagegen senkrecht zur aktuellen Streckenrichtung, so ändert sich die Länge der Strecke gar nicht.[24] Sucht man nach den Stellen der Kreisbewegung des Punktes *R* an denen er sich gerade senkrecht zur aktuellen Streckenrichtung bewegt, so wird schnell deutlich, dass es sich um die Stellen maximalen bzw. minimalen Abstandes zu *P* handeln, die also zwischen den Stellen 1 und 2 bzw. 5 und 6 auf der Kreislinie liegen.

Durch den Unterricht sollten die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden, das Änderungsverhalten antizipieren, also bei gedachten Veränderungen vorstellen, beschreiben und qualitative Vorhersagen treffen zu können.

Abb. 6 zeigt beispielhaft eine Aufgabe aus dem Bereich der Algebra die zwei Testitems enthält.

Die konstruierten Items wurden von einer 7. Klasse eines bayerischen Gymnasiums und der oben erwähnten Gruppe von 38 Lehramtsstudierenden bearbeitet. Rückmeldungen der beiden Gruppen wurden genutzt, um die Sprache der Itemtexte zu vereinfachen bzw. die Aufgabenstellung zu präzisieren. Der daraus resultierende Test mit 18 Items wurde 244 Schülerinnen und Schülern aus zehn 7. Klassen und 139 Schülerinnen und Schülern aus sechs 8. Klassen bayerischer Gymnasien am Ende des Schuljahres 2001/02 vorgelegt.

Die Daten der 8. Klassen wurden genutzt, um zu schwierige und zu leichte Items auszusortieren. Die verbliebenen 15 Items wurden mit Hilfe der Daten der 7. Klassen einer Itemanalyse unterzogen. Dabei ging es u. a. um die Frage, ob die auf theoretischen Überlegungen bzgl. der Anforderungsniveaus der Kompetenzen des Beweglichen Denkens basierende Einschätzung des Schwierigkeitsgrades der Items sich auch in den Rangplätzen der Items widerspiegelt. Zur Bestimmung der Rangplätze wurden die Itemschwierigkeiten *p* als relative Anteile der Probanden bestimmt, die das jeweilige Item richtig gelöst haben. Das leichteste Item, das also von den meisten Probanden richtig gelöst wurde, erhält den Rangplatz 1, das Item mit dem zweitgrößten Anteil richtiger Lösungen den Rangplatz 2 usw.

Wir betrachten den Term **3 –** $\boldsymbol{x}$.
Stelle dir vor, dass du den **x-Wert, bei – 4 beginnend, gleichmäßig immer größer werden lässt, bis er + 4 erreicht.** Wie verhält sich dabei der Termwert?

Der **Termwert wird**, bei gleichmäßig zunehmendem x-Wert,

a)	immer kleiner.	c)	manchmal kleiner und manchmal größer
b)	immer größer.		

Der **Termwert ändert sich**, bei gleichmäßig zunehmendem x-Wert,

a)	langsamer als der x-Wert.	d)	gleichmäßig.
b)	schneller als der x-Wert.	e)	manchmal schneller und manchmal langsamer.
c)	genauso schnell wie der x-Wert.		

Abb. 6: Testaufgabe zur Algebra: Für das Item „Termwert wird" wird die Fähigkeit „Bewegung hineinsehen und damit argumentieren" benötigt, für das Item „Termwert ändert sich" zusätzlich die Fähigkeit „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben"

[24] Führt man diese Zugweise konsequent fort, so bewegt sich das eine Ende der Strecke auf einer Kreislinie um das andere Ende und die Streckenlänge bleibt (als Kreisradius) konstant.

Der Korrelationskoeffizient r der Produkt-Moment-Korrelation zwischen den Merkmalen „Rangplatz" und „Kompetenzstufe des Beweglichen Denkens" der Testitems hat den Wert $r = 0{,}71$. Dieser deutlich positive Zusammenhang ist ein Indiz für die *interne Validität* des Tests. Aus der Beantwortung des Tests lassen sich also Rückschlüsse auf den Entwicklungsstand des Beweglichen Denkens eines Probanden anstellen.

Zur Einschätzung der *Reliabilität* des Tests wurde dessen interne Konsistenz mit Hilfe des Testhalbierungskoeffizenten r_{tt} von Guttman geschätzt. Er ergab sich zu $r_{tt} = 0{,}70$. Dies ist ein relativ niedriger Wert, der aber wegen der aus Gründen der Praktikabilität kurzen Testlänge und der Tatsache, dass hier drei verschiedene Kernfähigkeiten des Beweglichen Denkens abgeprüft werden, noch akzeptabel ist.

Zur Herstellung der *Durchführungsobjektivität* erhielten alle Testleiter die gleichen Anweisungen und durften weder darüber hinausgehenden Erklärungen abgeben noch Fragen beantworten. Die *Auswertungsobjektivität* ist dadurch gewährleistet, dass hier Auswahlantworten einzukreisen sind und für die Auswertung nur überprüft werden muss, ob *alle* richtigen Antwortalternativen markiert sind.

5.2 Methoden zur Auswertung des Leistungstests

Die Items wurden dichotom ausgewertet, d. h. bei Items mit mehr als einer richtigen Auswahlantwort mussten *alle* korrekten Auswahlantworten (und nur diese) markiert sein, damit das Item als richtig beantwortet gewertet wurde.

Parallelisierung durch Bildung von „Matched Samples"
Mit dem Leistungstest sollten verschiedene Unterschiedshypothesen überprüft werden. Eine erhebliche Störvariable ist dabei die Ungewissheit, in welcher Weise sich die bereits vorhandenen Fähigkeiten des Beweglichen Denkens auf die Weiterentwicklung durch einen entsprechenden Unterricht auswirken. Um diese Störvariable zu kontrollieren wurden die Schülerinnen und Schüler der Unterrichtsklassen und der Kontrollklassen auf Grund ihrer Leistung[25] im Vortest paarweise einander zugeordnet. Konkret wurde also eine Schülerin bzw. ein Schüler aus der Kontrollgruppe nur dann in die Untersuchungspopulation aufgenommen, wenn sich ein Proband der Unterrichtsgruppe fand, der gleich viele Items des Vortests richtig gelöst hatte und umgekehrt. Dieses Vorgehen nennt man Parallelisierung durch Bildung von „Matched Samples".[26]

Bildung von Untergruppen nach Leistung im Vortest
Um der Frage nachgehen zu können, wie sich die Ausprägung der Kompetenzen des Beweglichen Denkens zu Beginn des Untersuchungszeitraumes auf die mögliche Leistungssteigerung in diesem Bereich innerhalb des Untersuchungszeitraums auswirkt, wurden nach der Parallelisierung Untergruppen gebildet. Dazu wurden die Probanden auf Grund ihrer Leistung im Vortest einer der drei Gruppen „+: stärkere Leistung", „0: mittlere Leistung" und „–: schwächere Leistung" zugeteilt. Diese Zuteilung erfolgte so, dass zahlenmäßig etwa gleich starke Gruppen entstanden.

Überprüfung der Unterschiedshypothese (t-Test)

---

25 Die Leistung wird hier durch die Anzahl der richtig gelösten Items des Vortests gemessen.
26 vgl. etwa Bortz/Döring (2002, S. 527)

In dieser Untersuchung interessierte die Frage, ob die Leistungssteigerung[27] λ bzgl. des Beweglichen Denkens zwischen Vor- und Nachtest für die Unterrichtsklassen (UK) größer war als für die Kontrollklassen (KK). Dazu wurde für jedes Messwertpaar v die Differenz $d_v = \lambda_{vUK} - \lambda_{vKK}$ und daraus das arithmetisches Mittel dieser Größe über alle n parallelisierten Schülerpaare der Stichprobe untersucht. Obige Forschungsfrage lässt sich durch die Nullhypothese $H_0 : \mu_d \leq 0$ über den wahren Mittelwert μ_d der Differenzen der Leistungssteigerungen präzisieren und mit Hilfe des t-Tests für abhängige Stichproben[28] gegen die Alternative $H_1 : \mu_d > 0$ als einseitige Fragestellung[29] testen. Als einseitige Testschranke wurde jeweils $t^*_{99\%}$ gewählt.

Darstellung der Leistungssteigerung in Einheiten der Standardabweichung des Vortestergebnisses

Um einen leichteren Vergleich der erreichten Leistungssteigerungen (d. h. die Zunahme der mittleren Fähigkeit einer Gruppe) in den verschiedenen betrachteten Gruppen (Gesamtgruppe, +, 0, –) und mit anderen längsschnittlichen Untersuchungen zu ermöglichen, wurde die Leistungssteigerung, jeweils in Einheiten der Standardabweichung der Leistung dieser Gruppe im Vortest angegeben. Für Tests, deren Testziel die „Mathematikleistung“ ist, liegen Erfahrungswerte für in dieser Einheit angegebene Leistungssteigerungen vor, die innerhalb eines Schuljahres erreichbar sind. So geben etwa vom Hofe et al. (2002, S. 92f) Leistungssteigerungen von 0,56 bis 0,63 an.

6 Versuchsdurchführung und Auswertung

6.1 Versuchspopulation

Am empirischen Unterrichtsversuch im Schuljahr 2002/03 haben fünf 7. Klassen aus drei bayerischen Gymnasien als Versuchsklassen und drei 7. Klassen eines bayerischen Gymnasiums als Kontrollklassen teilgenommen.

Die Klassen wurden nach pragmatischen Gesichtspunkten ausgewählt.[30] Einen Überblick über die beteiligten Unterrichts- und Kontrollklassen gibt Tab. 2. Um die Anonymität der beteiligten Personen zu gewährleisten, wurden die Schulen mit Großbuchstaben und die Lehrkräfte mit natürlichen Zahlen kodiert. Drei Gymnasien stellten Unterrichtsklassen, die Kontrollklassen stammten aus einem Gymnasium. Eine der Unterrichtsklassen, nämlich die in der ersten Zeile der Tab. 2 aufgeführte Klasse C_5/6_7a wurde im Untersuchungszeitraum zum Halbjahr von einer Referendarin im dritten Ausbildungsabschnitt (6) übernommen und in enger Zusammenarbeit mit dem in der Klasse eingesetzten Lehrer (5) als Betreuungslehrer weitergeführt.

[27] Die Leistungssteigerung bezieht sich auf die Fähigkeiten des Beweglichen Denkens, die durch die in Vor- und Nachtest identischen Items des Tests gemessenen werden.

[28] Es handelt sich um abhängige Stichproben, weil die Unterrichtsklassen und die Kontrollklassen, wie oben ausgeführt, parallelisiert wurden.

[29] Auf Grund der Anlage der Untersuchung kann H_1 hier gerichtet formuliert werden.

[30] Auswahlkriterien waren unter anderem die Lage der Schule und insbesondere die Bereitschaft von Schulleitung und Lehrkräften zur Mitarbeit.

Unterrichtsklassen					
Schuljahr	Bayerisches Gymnasium	Lehr-kraft	Klasse	Anzahl der Schüler	Gesamtzahl Schüler
2002/03	C	5/6	7a	29	
2002/03	D	4	7b	26	
2002/03	D	4	7c	22	
2002/03	D	7	7e	22	
2002/03	L	8	7a	28	$N = 127$
Kontrollklassen					
Schuljahr	Bayerisches Gymnasium	Lehr-kraft	Klasse	Anzahl der Schüler	Gesamtzahl Schüler
2002/03	M	9	7a	29	
2002/03	M	10	7b	27	
2002/03	M	11	7c	23	$N = 79$

Tab. 2: Beteiligte Unterrichts- und Kontrollklassen

Auswahlkriterium für die Lehrkräfte der drei Kontrollklassen war, dass sie noch *nicht* mit dynamischer Geometriesoftware gearbeitet haben und diese insbesondere auch *nicht* im Untersuchungszeitraum im Mathematikunterricht einsetzten. Sie wurden bewusst nicht über die inhaltlichen Ziele der Untersuchung informiert um evtl. Auswirkungen auf ihren Unterricht zu vermeiden.

6.2 Auswertung der Leistungstests

Die fünf Unterrichts- (Anzahl der Schülerinnen und Schüler: $N_{\mathrm{UK}} = 127$) und drei Kontrollklassen ($N_{\mathrm{KK}} = 79$) wurden nach dem Prozentsatz k der richtig beantworteten Items im Vortest parallelisiert. Dabei konnte zu 78 der 79 Schülerinnen und Schüler der Kontrollklassen jeweils ein Proband aus den Unterrichtsklassen zugeordnet werden, der denselben Prozentsatz richtig beantworteter Items im Vortest erreicht hat. Damit lagen $N = N_{\mathrm{pUK}} = N_{\mathrm{pKK}} = 78$ so genannte „Matched Samples" vor, die der Auswertung zu Grunde gelegt wurden. Diese „Matched Samples" wurden auf Grund ihrer Leistung in drei Kategorien eingeteilt, die so gewählt wurden, dass in etwa gleich starke Teilgruppen entstanden. In Tab. 3 sind die Einteilungskriterien und die Gruppengrößen zusammengestellt.

6.2.1 Auswertung der in Vor- und Nachtest identischen Items[31]

Wirkt sich ein Unterricht, der auf dem Unterrichtskonzept dieser Arbeit basiert, positiv auf die Entwicklung der Fähigkeiten des Beweglichen Denkens aus? Zur Klärung dieser Forschungsfrage wurden die in Vor- und Nachtest identischen Items betrachtet. Nur für sie ist es möglich die Leistungssteigerung im Laufe des betrachteten Schuljahres 2002/03 direkt zu messen, da hier keine Verfälschung der Ergebnisse durch (evtl. auch nur leicht) veränderte Aufgabenstellungen eintritt.

31 Der Vortest umfasste 15 Items. Da im Nachtest einige Items ergänzt wurden (darunter zwei Items zum Änderungsverhalten), mussten – aus Gründen der Testdauer – vier Items des Vortests aus dem Endtest gestrichen werden. Damit gibt es elf Items, die im Vor- und Nachtest identisch gestellt wurden und im Folgenden „identische Items" genannt werden.

Charakterisierung der Leistung (L.)	Kodierung	Prozentsatz k richtig gelöster Items im Vortest	Anzahl der „Matched Samples“	Gesamtzahl der „Matched Samples“
stärkere L.	+	$k > 50\,\%$	$N_+ = 28$	
mittlere L.	0	$50\,\% \geq k \geq 35\,\%$	$N_0 = 27$	
schwächere L.	–	$k < 35\,\%$	$N_- = 23$	$N = 78$

Tab. 3: Einteilung der „Matched Samples“ bzgl. der Vortestergebnisse in drei Leistungsgruppen

Die Testleistung der Kontrollklassen (KK) insgesamt blieb innerhalb des Untersuchungszeitraums (Schuljahr 2002/03) gleich, während die Unterrichtsklassen (UK) einen deutlich erkennbaren Leistungszuwachs zu verzeichnen hatten. Im Vortest lösten die Schülerinnen und Schüler der UK im Durchschnitt 47 % der identischen Items richtig, während sie im Nachtest durchschnittlich 58 % dieser Items richtig lösten. Die Mittelwertdifferenz zwischen Vortest und Nachtest war bei den UK signifikant größer als bei den KK ($t_{ges} = 3{,}54 > 2{,}38$; $df_{ges} = 77$; $p = 0{,}01$).

Betrachtet man die Ergebnisse genauer, so stellt man fest, dass dieses deutlich bessere Ergebnis auf die im Vergleich zu den KK signifikant höhere Leistungssteigerung der mittleren Leistungsgruppe innerhalb der UK zurückzuführen ist ($t_0 = 4{,}18 > 2{,}48$; $df_0 = 26$; $p = 0{,}01$). Die Leistungssteigerung der unteren Leistungsgruppe der UK fiel ebenfalls deutlich aus, wich aber nicht signifikant von der ebenfalls beachtlichen Leistungssteigerung der unteren Leistungsgruppe der KK ab. Dagegen veränderte sich die Leistung der oberen Leistungsgruppe der UK nicht, die Leistung der entsprechenden Gruppe der KK nahm sogar merklich ab (vgl. Abb. 7).

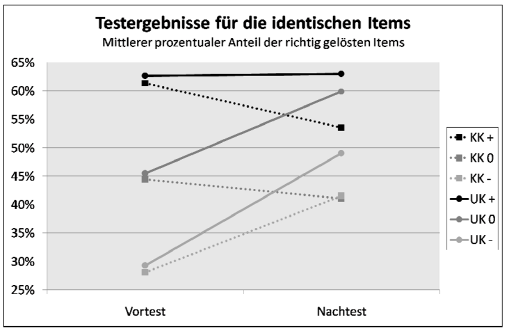


Abb. 7: Mittlerer prozentualer Anteil der von den stärkeren (+), mittleren (0) und schwächeren (-) Teilgruppen der Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK) richtig gelösten identischen Items[31]

Die Unterschiede zwischen den Leistungssteigerungen der einzelnen Gruppen werden besonders deutlich, wenn man die Leistungssteigerung in Einheiten der Standardabweichung des jeweiligen Vortestergebnisses angibt. Wie Abb. 8 zu entnehmen ist, beträgt die Leistungssteigerung in den UK 0,67 in Einheiten der Standardabweichung des Vortestergebnisses. Ein Vergleich mit den Ergebnissen von vom Hofe et al. (2002), die Leistungssteigerungen von Schülergesamtgruppen in dieser Einheit von

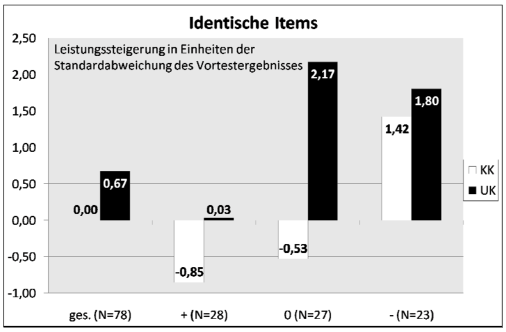


Abb. 8: Leistungssteigerung der parallelisierten Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK) bzgl. der in Vor- und Nachtest identischen Items, dargestellt in Einheiten der Standardabweichung des jeweiligen Vortestergebnisses

0,56 bis 0,63 innerhalb eines Schuljahres angeben, zeigt, dass hier eine Leistungssteigerung erreicht wurde, die am oberen Rand dessen liegt, was auf Grund von Unterrichtsmaßnahmen innerhalb eines Schuljahres realistischerweise möglich ist.

Bemerkenswert sind aber auch die anderen in Abb. 8 wiedergegebenen Resultate. Zunächst lässt sich die sehr deutliche Verbesserung der schwächeren Gruppe (–) sowohl bei den UK wie auch bei den KK wohl nur so deuten, dass diese Schülerinnen und Schüler im Vortest, aus welchen Gründen auch immer, erheblich unter ihren Möglichkeiten geblieben sind. Vergleicht man dies nämlich mit den beiden anderen Leistungsgruppen (+, 0), so fällt auf, dass dort bei den KK eine nicht unerhebliche Verschlechterung der Leistung innerhalb des Untersuchungszeitraumes eingetreten ist.[32] Auf Grund dieser Tatsache könnte man vermuten, dass ein Unterricht, der eher auf statische Argumentationen setzt, die latent vorhanden Fähigkeiten im Bereich des Beweglichen Denkens nicht nur nicht fördert, sondern evtl. sogar verschüttet. Festzuhalten ist aber auch, dass das hier eingesetzte Unterrichtskonzept ganz offensichtlich nicht dazu führt, dass Schülerinnen und Schüler mit guten Eingangsvoraussetzungen im Beweglichen Denken sich noch weiter verbessern. Die stärkere Leistungsgruppe (+) stagniert vielmehr auf relativ hohem Niveau.[33] Die schwächere Leistungsgruppe (–) der UK verbessert sich tendenziell (wenn auch nicht signifikant) stärker als die entsprechende Teilgruppe der KK.

Ganz offensichtlich am stärksten profitieren die Schülerinnen und Schüler der mittleren Leistungsgruppe (0) vom hier vorgeschlagenen Unterrichtskonzept. Mit einer Leistungssteigerung von 2,17 in Einheiten der Standardabweichung des Vortestergebnisses gelang hier eine erhebliche Verbesserung. Im Ergebnis wurde die mittlere Gruppe (0) in den UK praktisch auf dasselbe Leistungsniveau gebracht wie die stärkere Gruppe (+).

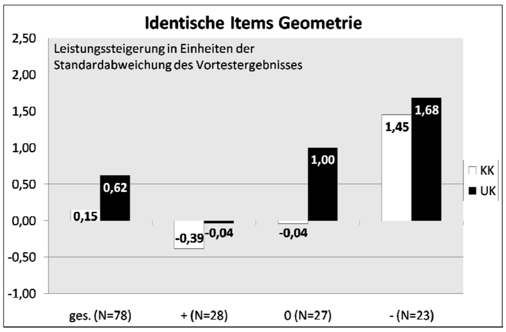


Abb. 9: Leistungssteigerung der parallelisierten Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK) bzgl. der in Vor- und Nachtest identischen Geometrie-Items, dargestellt in Einheiten der Standardabweichung des jeweiligen Vortestergebnisses

Das Unterrichtskonzept im Rahmen dieser Arbeit war nur im Inhaltsbereich Geometrie auf die Entwicklung des Beweglichen Denkens ausgerichtet. Um der Frage nachzugehen, ob und ggf. wie der entsprechende Unterricht sich auch auf die Lösungswahrscheinlichkeit von Aufgaben im Inhaltsbereich Algebra auswirkt, wurden die Items im Folgenden noch einmal getrennt nach Inhaltsbereichen ausgewertet. Wie Abb. 9 zu ent-

32 Der statistische Effekt der Regression zur Mitte kann einen Teil der Veränderung der Ergebnisse an den Leistungsrändern der Kontrollklassen bewirkt haben.

33 Eine mögliche Erklärung für dieses Phänomen ist die Tatsache, dass die Unterrichtsklassen im Untersuchungszeitraum zum ersten Mal im Hinblick auf das Bewegliche Denken geschult wurden. Der Schwerpunkt lag deshalb auf den ersten beiden Kompetenzen des Beweglichen Denkens. Zur Förderung der obersten Leistungsgruppe hätte wohl das Änderungsverhalten und die damit verbundene Kompetenz im Mittelpunkt des Unterrichts stehen müssen.

nehmen ist, ergeben sich für die Items aus dem Inhaltsbereich Geometrie im Wesentlichen die gleichen Ergebnisse wie für alle in Vor- und Nachtest identischen Items gemeinsam.

Betrachtet man Abb. 10, so ergibt sich für die Items zu algebraischen Inhalten tendenziell wieder dasselbe Bild wie bereits bei den Items zur Geometrie. Auch hier ist insgesamt im Unterrichtszeitraum eine signifikant größere Leistungssteigerung der UK gegenüber den KK zu verzeichnen ($t_{ges} = 2{,}75 \quad > 2{,}38$; $df_{ges} = 77$; $p =$ 0,01). Auch in den Teilgruppen geht die Leistungsentwicklung in dieselbe Richtung wie für die Items zur Geometrie. Allerdings ist die größere Leistungssteigerung der mittleren Leistungsgruppe (0) nicht mehr signifikant. Der Grund dafür lässt sich an Tab. 4 ablesen. Dort sind neben den empirischen Mittelwerten auch die empirischen Standardabweichungen der relativen Lösungshäufigkeiten notiert.

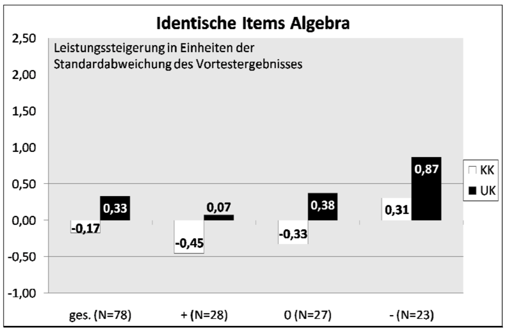


Abb. 10: Leistungssteigerung der parallelisierten Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK) bzgl. der in Vor- und Nachtest identischen Algebra-Items, dargestellt in Einheiten der Standardabweichung des jeweiligen Vortestergebnisses

Es fällt auf, dass die Standardabweichungen bzgl. der Items zur Algebra durchweg und teilweise deutlich größer ausfallen als die bei den Items zur Geometrie. Im Bereich Algebra streuen die Leistungen also auch innerhalb einzelner Leistungsgruppen erheblich. In der Tendenz scheint eine Schulung des Beweglichen Denkens im Bereich Geometrie auch positive Auswirkungen auf das Bewegliche Denken im durch die vier Testitems abgedeckten Inhaltsbereich der Algebra zu haben. Allerdings fallen diese Auswirkungen, wohl auf Grund des notwendigen stärkeren Transfers, individuell sehr unterschiedlich aus.

6.2.2 Auswertung der Items zum Änderungsverhalten

Der intellektuell anspruchsvollste Aspekt des Beweglichen Denkens ist die Fähigkeit, die Art und Weise einer Veränderung, also das Änderungsverhalten qualitativ erfassen und beschreiben zu können. Dieser Aspekt wurde im Unterrichtskonzept dieser Arbeit erst am Ende des Schuljahres in einer dreistündigen Unterrichtssequenz explizit thematisiert. Diese Unterrichtssequenz hat aber nur in zwei der fünf Unterrichtsklassen wirklich stattgefunden.[34] In den drei anderen Klassen fiel sie, wie dies gegen Ende des Schuljahres häufig geschieht, außerunterrichtlichen Aktivitäten zum Opfer.

Mit Hilfe der vier Items zum Änderungsverhalten im Testheft des Nachtests sollte untersucht werden, ob und ggf. wie sich ein Unterricht, der den Schwerpunkt darauf setzt, mit Bewegungen bzw. Veränderungen zu argumentieren, auf die Fähigkeit auswirkt, das Änderungsverhalten erfassen und beschreiben zu können. Die Auswertung

[34] Es handelt sich um die Klassen C_5/6_7a und L_8_7a (vgl. Tab. 2).

weist im Vergleich zu denen des letzten Abschnittes zwei Besonderheiten auf: Zwei der vier Items zum Änderungsverhalten waren nur im Nachtest aber nicht im Vortest enthalten. Deshalb wurden die durch Parallelisierung auf Grund der Vortestergebnisse gebildeten „Matched Samples“ jeweils nur bzgl. des Nachtests miteinander verglichen.

Identische Items	Teilgruppe		Vortest Mittelwert	Vortest Standardabw.	Nachtest Mittelwert	Nachtest Standardabw.
Alle	KK	**ges**	**0,46**	**0,16**	**0,46**	**0,23**
		+	0,61	0,09	0,54	0,28
		0	**0,44**	**0,06**	**0,41**	**0,21**
		–	0,28	0,09	0,42	0,16
	UK	**ges**	**0,47**	**0,16**	**0,58**	**0,16**
		+	0,63	0,09	0,63	0,16
		0	**0,45**	**0,07**	**0,60**	**0,13**
		–	0,29	0,11	0,49	0,17
Geometrie-items	KK	**ges**	**0,40**	**0,19**	**0,42**	**0,27**
		+	0,54	0,16	0,47	0,33
		0	**0,40**	**0,13**	**0,39**	**0,23**
		–	0,23	0,12	0,40	0,21
	UK	**ges**	**0,44**	**0,19**	**0,56**	**0,17**
		+	0,59	0,13	0,59	0,17
		0	**0,41**	**0,17**	**0,58**	**0,16**
		–	0,29	0,12	0,49	0,18
Algebra-items	KK	**ges**	**0,56**	**0,28**	**0,51**	**0,29**
		+	0,75	0,24	0,64	0,31
		0	**0,53**	**0,25**	**0,44**	**0,29**
		–	0,37	0,21	0,43	0,22
	UK	**ges**	**0,52**	**0,29**	**0,62**	**0,29**
		+	0,69	0,24	0,71	0,28
		0	**0,53**	**0,27**	**0,63**	**0,27**
		–	0,30	0,21	0,49	0,28

Tab. 4: Empirische Mittelwerte und empirische Standardabweichungen der relativen Lösungshäufigkeiten bzgl. bestimmter Itemgruppen des Tests

Da in nur zwei der fünf Klassen die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten durchgeführt wurde, erfolgte die Auswertung der „Matched Samples“ entsprechend in zwei Untergruppen. Das waren einerseits die „Matched Samples“, bei denen in den Unterrichtsklassen die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten durchgeführt worden war (vgl. Abb. 11), und andererseits jene, bei denen die entsprechende Sequenz in den Unterrichtsklassen nicht stattgefunden hatte (vgl. Abb. 12).

Die Schülerinnen und Schüler aus den Unterrichtsklassen ohne Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten erreichten bei den Items zum Änderungsverhalten etwa dieselbe Lösungshäufigkeit wie ihre „Partner“ aus den Kontrollklassen. Dagegen schnitten die Probanden aus den Klassen mit der Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten bei den entsprechenden Items etwas, aber nicht signifikant, besser ab als ihre „Partner“ in den Kontrollklassen.

Insgesamt darf man wohl auf Grund der hier dargestellten Ergebnisse vorsichtig optimistisch sein und kann erwarten, dass ein auf dieses Schuljahr aufbauendes Jahr mit weiteren Unterrichtseinheiten zum Änderungsverhalten eine Steigerung der entsprechenden Leistung bringen dürfte. Die Frage, ob ein Unterricht, in dem „nur“ mit Bewegungen argumentiert, aber das Änderungsverhalten nicht thematisiert wird, dazu führt, dass auch das Änderungsverhalten erfasst und beschrieben werden kann, ist nach den hier vorliegenden Ergebnissen eher skeptisch zu beurteilen.

7 Diskussion und Ausblick

Ausgangspunkt der vorliegenden Studie war die Überzeugung, dass Bewegliches Denken ein wichtiges Prozessziel des Mathematikunterrichts darstellt und dass die zugehörigen Fähigkeiten zum Methodenrepertoire jeder Schülerin und jedes Schülers gehören sollten. Das intendierte Fernziel im Hinblick auf die Entwicklung des Beweglichen Denkens im Mathematikunterricht besteht darin, die Schülerinnen und Schüler zu befähigen, adäquates Bewegliches Denken an geeigneten Stellen selbstständig und flexibel einzusetzen. Das hier umgesetzte Unterrichtskonzept wollte die entsprechenden Fähigkeiten dadurch anbahnen und weiterentwickeln, dass die Schülerinnen und Schüler zunächst die Möglichkeiten und das Potential dieser Denkweise an vielen Beispielen erfahren und selbst anwenden konnten.

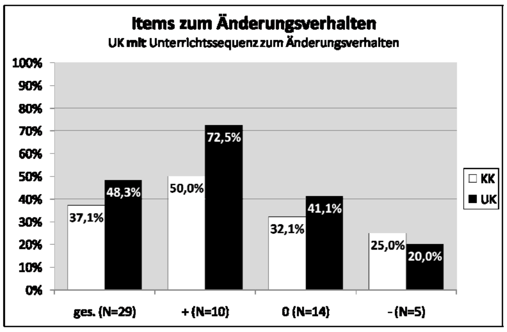


Abb. 11: Prozentsatz der richtig gelösten Items zum Änderungsverhalten in den „Matched Samples" aus Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK), bei denen in den UK die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten stattgefunden hat

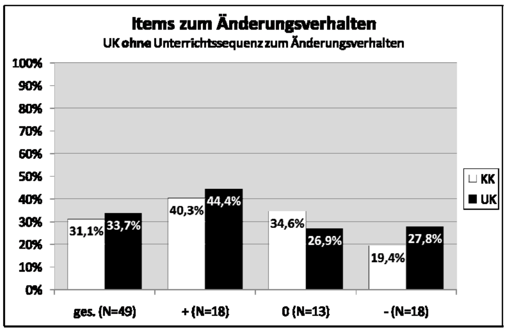


Abb. 12: Prozentsatz der richtig gelösten Items zum Änderungsverhalten in den „Matched Samples" aus Unterrichts- (UK) und Kontrollklassen (KK), bei denen in den UK die Unterrichtssequenz zum Änderungsverhalten ***nicht*** *stattgefunden hat*

Eine zentrale Forschungsfrage der vorliegenden Längsschnittuntersuchung war, ob mit diesem Konzept Bewegliches Denken langfristig gefördert und entwickelt werden kann. Da die Unterrichtsklassen im Nachtest der Studie bzgl. der Items zum Beweglichen Denken signifikant besser abschneiden als die Kontrollklassen, ist diese Frage eindeutig positiv zu beantworten. Dazu müssen Lehrkräfte aber, wie hier geschehen, den Schülerinnen und Schülern bewusst die Möglichkeit geben, Erfahrungen mit Argumentationen im Sinne des Beweglichen Denkens zu sammeln.

Auch Lehrkräfte müssen sich zunächst an diese Ausrichtung des Unterrichts gewöhnen. Dies zeigt eine Nachuntersuchung, bei der zwei Lehrkräfte, die bereits ein Schuljahr nach dem Konzept dieser Studie unterrichtet hatten, noch einmal je eine siebte Klasse unterrichteten. Die Ergebnisse dieser beiden Klassen fielen deutlich besser aus als die Ergebnisse des vorhergehenden Unterrichtsversuchs mit den genannten fünf 7. Klassen.

Auch die Frage nach der Leistungssteigerung in Abhängigkeit von den bereits im Vortest nachgewiesenen Fähigkeiten des Beweglichen Denkens lässt sich beantworten. Die Schülerinnen und Schüler der Unterrichtsklassen, die auf Grund der Vortestergebnisse in die mittlere Leistungsgruppe eingeordnet wurden, haben im Nachtest signifikant bessere Ergebnisse als die entsprechende Gruppe der Kontrollklassen und erreichen sogar das Leistungsniveau der leistungsstärksten Gruppe. Die im Vortest leistungsstärkste Teilgruppe der Unterrichtsklassen stagniert dagegen auf hohem Niveau, während die entsprechende Teilgruppe der Kontrollklassen in ihren Leistungen sogar abfällt.[35] Eine mögliche inhaltliche Erklärung für dieses Phänomen könnte sein, dass zur Entwicklung des Beweglichen Denkens eine Förderung entsprechend der bereits vorhandenen Fähigkeiten erfolgen muss. Dies ist für die mittlere Leistungsgruppe offensichtlich geschehen, während eine adäquate Förderung der oberen Leistungsgruppe bedeutet hätte, das Änderungsverhalten und die damit verbundene Kompetenz in den Mittelpunkt des Unterrichts zu stellen. Der deutliche Leistungsabfall der Kontrollklassen legt schließlich die Vermutung nahe, dass bereits vorhandene Fähigkeiten des Beweglichen Denkens sogar verkümmern, wenn sie nicht explizit im Unterricht angewendet werden können.

Die genannten Ergebnisse ermutigen zu weiteren Unterrichtsversuchen, die stärker die dritte Fähigkeit des Beweglichen Denkens, nämlich „Änderungsverhalten erfassen und analysieren“ schulen. Dies ist notwendig, weil die vorliegenden Ergebnisse zeigen, dass sich diese Fähigkeit des Beweglichen Denkens nur tendenziell aber nicht signifikant verbessert, wenn die beiden anderen Fähigkeiten geschult werden. Da das Änderungsverhalten – nicht nur im Hinblick auf die Analysis der Oberstufe – zentral für den Mathematikunterricht ist, wäre eine deutliche Steigerung der entsprechenden Fähigkeit wünschenswert. Gerade hier werden aber immer wieder Defizite selbst noch bei Abiturienten aufgezeigt (vgl. etwa Ossimitz 2000). Eine konsequente Schulung des Beweglichen Denkens in allen Schuljahren könnte in diesem Bereich Fortschritte bringen.

Ein weiteres interessantes Ergebnis der vorliegenden Studie ist, dass sich Bewegliches Denken in den Unterrichtsklassen nicht nur im Bereich der Geometrie verbessert hat, in dem im Sinne des Beweglichen Denkens unterrichtet wurde, sondern auch in dem durch die entsprechenden Testitems abgedeckten Bereich der Algebra. Offenbar schaffen Schülerinnen und Schüler in gewissen Grenzen einen Transfer dieser Denkweisen in andere Inhalte. Sicherlich müssen hier weitere Unterrichtsversuche zum Beweglichen Denken – gerade auch im Bereich der Algebra – erfolgen, um auszuloten, inwieweit dadurch die Ergebnisse weiter verbessert werden können.

Darüber hinaus bleibt es zukünftigen Forschungsarbeiten überlassen, empirisch zu untersuchen, wo eine Herangehensweise im Sinne des Beweglichen Denkens im Mathematikunterricht besonders Gewinn bringend ist und in welchen Gebieten Bewegliches Denken möglicherweise nicht zum Verständnisgewinn beiträgt.

[35] Teilweise ist dies wohl auch mit dem statistischen Effekt der Regression zur Mitte erklärbar.

8 Literatur

Aebli, Hans [1989]: Zwölf Grundformen des Lehrens. Stuttgart: Klett-Cotta, 11. Auflage.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst (Hrsg.) [1991]: Lehrplan für das bayerische Gymnasium. Fachlehrplan für Mathematik. In: Amtsblatt des Bayerischen Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst, Sondernummer 8, Jahrgang 1991, München, 1189-1254.

Bender, Peter [1989]: Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen. In: Kautschitsch, Metzler (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. 7. und 8. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik“ in Klagenfurt im Juli 1987 und 1988, Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky, B. G. Teubner, 95-145.

Bender, Peter & Schreiber, Alfred [1985]: Operative Genese der Geometrie. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Bortz, Jürgen [2004]: Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler. Heidelberg: Springer Medizin Verlag.

Bortz, Jürgen & Döring, Nicola [2002]: Forschungsmethoden und Evaluation für Sozialwissenschaftler. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Elschenbroich, Hans-Jürgen [1999]: Anschaulich(er) Beweisen mit dem Computer – Neue Möglichkeiten für visuelle Beweise. In: Kadunz et al. (Hrsg.): Mathematische Bildung und neue Technologien: Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt, 28.9.-2.10.1998, Stuttgart: Teubner, 61-68.

Elschenbroich, Hans-Jürgen [2000]: Neue Ansätze im Geometrieunterricht des S I durch elektronische Arbeitsblätter. In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, Hildesheim: Franzbecker, 165-168.

Führer, Lutz [1985]: „Funktionales Denken“: Bewegtes fassen – das Gefaßte bewegen. In: *Mathematik lehren*, Heft 11, August 1985, 12-13.

Hölzl, Reinhard [1994]: Im Zugmodus der Cabri-Geometrie – Interaktionsstudien und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Hölzl, Reinhard [1999]: Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software. Augsburg: Wißner-Verlag.

vom Hofe, Rudolf [1996]: Überlegungen zur Ausprägung funktionalen Denkens beim Einsatz interaktiver Analysissoftware – dargestellt an drei Beispielen zur Behandlung von Exponentialfunktionen mit dem CAS Theorist/MathPlus. In: Horst Hischer & Michael Weiß (Hrsg.): Rechenfertigkeit und Begriffsbildung, Bericht über die 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ vom 22. bis 25. September 1995 in Wolfenbüttel, Hildesheim: Franzbecker.

vom Hofe, Rudolf [1996]: Neue Beweglichkeit beim Umgang mit Funktionen. In: *Mathematik lehren*, Heft 78, Oktober 1996, 50-54.

vom Hofe, Rudolf & Pekrun, Reinhard & Kleine, Michael & Götz, Thomas [2002]: Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA): Konstruktion des Regensburger Mathematikleistungstests für 5. bis 10. Klassen. In: *Zeitschrift für Pädagogik*, 45. Beiheft, November 2002, 83-100.

Hole, Volker [1998]: Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer. Donauwörth: Auer Verlag.

Maier, Peter Herbert [1999]: Räumliches Vorstellungsvermögen. Donauwörth: Auer Verlag.

Monk, Steve [1992]: Students’ Understanding of a Function Given by a Physical Model. In: Dubinsky, Ed & Harel, Guershon (Eds.): The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA Notes, 25 (1992), 175-193.

Ossimitz, Günther [2000]: Entwicklung systemischen Denkens. Theoretische Konzepte und empirische Untersuchungen. München: Profil Verlag.

Proklus Diadochus [1945]: Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen“. Halle (Saale): Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinisch Deutsche Akademie der Naturforscher.
Roth, Jürgen [2005]: Bewegliches Denken im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.
Roth, Jürgen [2006]: Dreiecksgrundformen – Horizonterweiterung durch operatives, entdeckendes Üben. In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, Heft 12, Dezember 2006, 48. Jg., 21-25.
Roth, Jürgen [2008]: Systematische Variation – Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. In: *Mathematik lehren*, Heft 146, Februar 2008, 17-21.
Schumann, Heinz [1991]: Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer – Beiträge zur Didaktik des interaktiven Konstruierens. Stuttgart: J. B. Metzler und B. G. Teubner.
Schumann, Heinz [2000]: Computerunterstützte Behandlung geometrischer Extremwertaufgaben. Hildesheim: Franzbecker.
Schwank, Inge [1996]: Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendungen. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 28 (1996) 6, 168-183.
Sternberg, Robert J. [1987]: Questions and Answers about the Nature and Teaching of Thinking Skills. In: Baron, Joan Boykoff & Sternberg, Robert J. (Eds.): Teaching Thinking Skills: Theory and Practice. New York: Freeman, 251-259.
Thies, Silke [2001]: Diskrete Mathematik – Neue Impulse für den Mathematikunterricht. In: *Der Mathematikunterricht*, 47 (2991) 3, 4-15.
Thies, Silke [2002]: Zur Bedeutung diskreter Arbeitsweisen im Mathematikunterricht. Dissertation, Universität Gießen – http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2002/854/.
Ulm, Volker [2003]: Wechselspiele zwischen Figur und Zahl mit dynamischer Mathematik erleben. In: *Der Mathematikunterricht*, 49 (2003) 6, 38-49.
Wagenschein, Martin [1969]: Das Exemplarische Lehren als fächerverbindendes Prinzip. In: Meyer, E. (Hrsg.): Exemplarisches Lehren – Exemplarisches Lernen, Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 20-37.
Weigand, Hans-Georg [1988]: Zur Bedeutung von Zeitfunktionen für den Mathematikunterricht. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 9 (1988) 1, 55-86.
Weigand, Hans-Georg [2001]: Tabellenkalkulation – ein schrittweise erweiterbares didaktisches Werkzeug. In: *Der Mathematikunterricht*, 47 (2001) 3, 16-27.
Weigand, Hans-Georg & Weller, Hubert [2001]: Changes of Working Styles in a Computer Algebra Environment – The Case of Functions. In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (2001), 87-111.
Wittmann, Erich Christian [1985]: Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: *Mathematik lehren*, Heft 11, August 1985, 7-11.
Ziegler, Theodor [1991]: Was kann ein computerunterstützter Mathematikunterricht leisten? In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 44 (1991) 5, 300-302.

9 Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei den Kolleginnen und Kollegen und deren Schülerinnen und Schülern an bayerischen Gymnasien bedanken, die meine Tests bearbeitet, Unterrichtszeit zur Verfügung gestellt und sich auf meine Unterrichtskonzepte eingelassen haben. Mein Dank gilt auch den Gutachtern und Herausgebern für ihre konstruktiven Hinweise.

Adresse des Autors

Jürgen Roth
Universität Würzburg
Didaktik der Mathematik
Am Hubland
97074 Würzburg
E-Mail: mail@juergen-roth.de