StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
Am Hubland
97074 Würzburg
Telefon: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

In: Mathematik lehren, Heft 121, Dezember 2003, S. 47-49

Die Zahl i – phantastisch, praktisch, anschaulich

Die Geschichte der Zahl i war drei Jahrhunderte lang dadurch geprägt, dass sie und damit die komplexen Zahlen in Mathematikerkreisen **in Frage gestellt, ja als Phantasiegebilde des menschlichen Geistes abgetan** wurden. Dies wird immer wieder auch an den Adjektiven deutlich, die mit diesen Zahlen verbunden werden. Berühmte Mathematiker nennen sie u. a. „unmöglich", „eingebildet" und „imaginär". Carl Friedrich Gauß (1777–1855) beschreibt noch 1831 die Haltung der meisten Mathematiker den komplexen Zahlen gegenüber sehr prägnant: „… allein die den reellen Grössen gegenübergestellten imaginären – ehemals, und hin und wieder noch jetzt, obwohl unschicklich, *unmögliche* genannt – sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltsleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Grössen steuert, verschmähen zu wollen." (Gauß 1876, S. 175)

Phantastisch

Wie kommt man auf i?

Wie kam es dazu, dass man sich mit diesen „phantastischen" Zahlen auseinander gesetzt hat? Werfen wir dazu einmal einen Blick in die geschichtliche Entwicklung:
Im 16. Jahrhundert beschäftigen sich viele Mathematiker intensiv mit der Suche nach Lösungsformeln für Gleichungen. In diesem Zusammenhang stellt Hieronimo Cardano (1501–1576) in seinem 1545 in Nürnberg erschienenen Buch „Ars magna" folgende Aufgabe: Teile 10 in zwei Teile, deren Produkt 40 ist. Es geht also um die Lösung der Gleichung $x \cdot (10 - x) = 40$.


Abb. 1: Hieronimo Cardano (1501–1576)

Zwar nennt Cardano diese Aufgabe „unmöglich", berechnet aber trotzdem die Lösungen $5 - \sqrt{-15}$ und $5 + \sqrt{-15}$. Einerseits sind Wurzeln aus negativen Zahlen nicht erklärt, andererseits lösen diese Ausdrücke die Gleichung, wenn man sie formal einsetzt. Es stellt sich also die Frage, was eine Wurzel aus einer negativen Zahl sein soll. Cardano „löst" das Problem, indem er festlegt, dass in einem solchen Fall bereits die Frage selbst falsch ist.

Dass es durchaus Sinn machen kann, mit solchen „unmöglichen", „eingebildeten", „imaginären", phantastischen (d. h. der Phantasie entsprungenen) Zahlen *formal* zu rechnen, erkennt als erster Rafael Bombelli (1530–1572) an Hand von kubischen Gleichungen der Form

$$x^3 + px + q = 0 .$$

Für diesen Gleichungstyp hat bereits Cardano eine Lösungsformel angegeben, nämlich:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Sie liefert eine Lösung der gegebenen kubischen Gleichung, wenn die rechte Seite existiert, wenn also gilt:

StR Jürgen Roth | Universität Würzburg | Telefon: (0931) 888 5598
Didaktik der Mathematik | Am Hubland | E-Mail: mail@juergen-roth.de
97074 Würzburg | Homepage: http://www.juergen-roth.de

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0,\quad \text{d.h.}\quad q^2+\frac{4p^3}{27}\geq 0.$$

Für $q^2+\frac{4p^3}{27}<0$ ist $\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ nicht definiert und damit die Formel scheinbar unbrauchbar. Dieser Fall ging als „casus irreducibilis" in die Geschichte der Mathematik ein. Bombelli stellt in seiner 1572 veröffentlichen „L'algebra" fest, dass man auch in diesem Fall *durch formales Weiterrechnen mit der Formel wie im Reellen* zu sinnvollen, d. h. reellen Ergebnissen kommen kann. So ergibt sich z. B. für die Gleichung $x^3-6x+4=0$ zwar $4^2+\frac{4(-6)^3}{27}=-16<0$, aber, unter Benutzung von $i^2=-1$, auch

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{-\frac{4}{2}+\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{4}{2}-\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3}}\\
&= \sqrt[3]{-2+\sqrt{4-8}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{4-8}}=\sqrt[3]{-2+2\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{-2-2\sqrt{-1}}\\
&= \sqrt[3]{-2+2\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{-2-2\sqrt{-1}}=\sqrt[3]{-2+2i}+\sqrt[3]{-2-2i}\\
&= \sqrt[3]{1+3i-3-i}+\sqrt[3]{1-3i-3+i}=\sqrt[3]{1+3i+3i^2+i^3}+\sqrt[3]{1-3i+3i^2-i^3}\\
&= \sqrt[3]{(1+i)^3}+\sqrt[3]{(1-i)^3}=(1+i)+(1-i)=2.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen verifiziert man leicht, dass 2 tatsächlich eine Lösung der Gleichung $x^3-6x+4=0$ ist. Es ist also offensichtlich möglich über Rechnungen mit komplexen Zahlen zu reellen Lösungen zu kommen. Damit kann die Aufgabe selbst nicht als unmöglich charakterisiert werden (vgl. die „Lösung" von Cardano) und es zeigt sich zum ersten Mal ein echter Nutzwert der Anwendung dieser „imaginären" Zahlen.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1642–1716) entdeckt $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ und rechnet sehr geschickt mit komplexen Zahlen. Trotzdem nennt er 1702 imaginäre Wurzeln „feine und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein (inter Ens et non Ens Amphibio)." (zitiert nach Remmert, S. 48).

Abb. 2:
Leonhard Euler
(1707–1783)

Leonhard Euler (1707–1783) führt das Symbol i für $\sqrt{-1}$ ein und rechnet, „wie wenn $i^2=-1$ sei". Er hat auf dieser „Grundlage" jahrzehntelang intensiv mit imaginären Zahlen gearbeitet, kennt bereits 1728 die Beziehung

$$i\cdot\log i=-\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{bzw.} \quad i^i=e^{-\frac{1}{2}\pi}$$

und leitet 1748 die „Euler'schen Formeln" her:

$$\cos x=\tfrac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) \quad \text{und} \quad \sin x=\tfrac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right).$$

Trotzdem schreibt er in seinem Lehrbuch „Vollständige Anleitung zur Algebra" aus dem Jahr 1770: „Weil nun alle möglichen Zahlen, die man sich immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner als 0 oder aber 0 selbst sind, ist klar, dass die Quadratwurzeln von Negativzahlen nicht einmal zu den möglichen Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, dass sie unmögliche Zahlen sind. Dieser Umstand führt uns zum Begriff solcher Zahlen, die ihrer Natur nach

unmöglich sind und gewöhnlich *imaginäre* oder *eingebildete* Zahlen genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung vorhanden sind.
(…) Dennoch bieten sie sich unserem Verstande dar und finden in unserer Einbildung Platz; deshalb werden sie auch bloß eingebildete Zahlen genannt. Obwohl aber diese Zahlen, wie z. B. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, haben wir von ihnen doch einen hinlänglichen Begriff, da wir wissen, dass durch sie eine Zahl angedeutet wird, die mit sich selbst multipliziert als Produkt -4 hervorbringt; und dieser Begriff ist ausreichend, um diese Zahlen den Rechenverfahren zu unterwerfen.“ (Euler 1959, S. 86)


Abb. 3:
Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Carl Friedrich Gauß (1777–1855) ist es zu verdanken, dass die komplexen Zahlen (diese Bezeichnung stammt von Gauß) ihren Nimbus des Esoterischen und Phantastischen (im Sinne von nicht real) verloren haben und als echte Zahlen anerkannt werden. Sein entscheidender Verdienst ist die Veröffentlichung einer geometrischen Interpretation für die komplexen Zahlen. Damit macht er die komplexen Zahlen der Anschauung zugänglich. Eine besonders knappe und deutliche Beschreibung seiner später „Gauß’sche Zahlenebene“ genannten Veranschaulichung gelingt ihm in einem Brief an Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) aus dem Jahr 1811: „… so wie man sich das ganze Reich aller reellen Grössen durch eine unendliche gerade Linie denken kann, so kann man das ganze Reich aller Grössen, reeller und imaginärer Grössen sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punct, durch Abscisse $= a$ Ordinate $= b$ bestimmt, die Grösse a + bi gleichsam repräsentirt.“ (Gauß 1975, S. 156f.)
Obwohl er bereits 1799 in seiner Dissertation den Fundamentalsatz der Algebra beweist, veröffentlicht Carl Friedrich Gauß erst 1831 seine geometrische Deutung der Komplexen Zahlen allgemein zugänglich (Gauß 1876, S. 169 – 178).

Die formale Definition der komplexen Zahlen als geordnete reelle Zahlenpaare, die nach der Gauß’schen geometrischen Deutung scheinbar auf der Hand liegt, bleibt aber Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) vorbehalten, der sie 1835 veröffentlicht.

Praktisch

Warum komplexe Zahlen im Unterricht?

Die Frage, ob die komplexen Zahlen, die in den meisten Lehrplänen zur Zeit nicht (mehr) vorkommen, im Unterricht thematisiert werden sollten, lässt sich angesichts der Stoffüberfrachtung sicher nur von jeder Lehrkraft individuell beantworten. Allerdings tauchen beim Lösen von Gleichungen mit Computer-Algebra-Systemen komplexe Zahlen auf – hierfür sollte man den Schülerinnen und Schülern eine befriedigende Erklärung anbieten. Auch die nach dem Spiralprinzip angelegte Vermittlung der Idee der Zahlbereichserweiterung beim Erreichen einer Grenze des aktuellen Zahlbereichs wird unterstützt, wenn man beim Gleichungslösen und Wurzelziehen an Grenzen stößt und sich Gedanken über eine mögliche Zahlbereichserweiterung macht.

Ein entscheidendes Argument, das für eine Einführung in die komplexen Zahlen spricht, ist folgendes: **Komplexe Zahlen sind praktisch**, weil sie die mathematische Aufarbeitung von vielen inner- und außermathematischen Problemen deutlich vereinfachen oder überhaupt erst möglich machen.

Anschaulich

Wie kann ein geometrisch ausgerichteter Zugang aussehen?

Historisch gesehen haben sich die komplexen Zahlen erst wirklich durchgesetzt, als mit der Gauß'schen Zahlenebene eine geometrische Interpretation vorlag. Für eine anschauliche Einführung in die komplexen Zahlen für Schülerinnen und Schüler einer 10. Klasse bietet sich ein geometrisch ausgerichteter Zugang an.
Ausgangspunkt ist die Fragestellung ob es einen über die reellen Zahlen hinausgehenden Zahlbereich gibt, in dem z. B. die Gleichung $x^2 = -1$ gelöst werden kann, der den Zahlbereich der reellen Zahlen enthält und in dem die bekannten Rechenregeln weiterhin gültig sind (Permanenzprinzip). Mathematisch gesehen geht es um die Frage, ob die Körperaxiome erfüllt sind und der Körper der reellen Zahlen ein Teilkörper dieses neuen Körpers ist.
Die hier verfolgte Idee besteht darin, den anschaulichen, zum Körper der reellen Zahlen isomorphen Körper der „reellen Zeiger" zu betrachten und ihn auf der anschaulichen Ebene geeignet zu erweitern. Im Folgenden soll grob skizziert werden, wie ein entsprechender Unterricht durchgeführt werden kann. (Dieser Vorschlag orientiert sich an dem Konzept von Niederdrenk-Felgner 1985.)

Komplexe Zahlen als Zeiger

Die bekannte Deutung von Punkten der „Zahlengeraden" als reelle Zahlen wird geometrisch erweitert auf die Punkte der Ebene, die als „komplexe Zahlen" gedeutet werden sollen. Komplexe Zahlen werden dabei durch Zeiger repräsentiert, die im Koordinatenursprung beginnen. Alle Zeiger $z = (r_z, \varphi_z)$ werden eindeutig festgelegt durch ihre Länge r_z und den Winkel φ_z, den sie mit der positiven reellen Achse einschließen (**Abb. 4**). Dabei ist r_z eine positive reelle Zahl und für φ_z gilt $0° \le \varphi_z < 360°$. Der Nullzeiger wird mit 0 bezeichnet. Damit werden z. B. die reellen Zahlen als Zeiger aufgefasst, die im Ursprung beginnen und beim entsprechenden Punkt auf der reellen Zahlengeraden enden. Insbesondere lassen sich z. B. die reellen Zahlen 3 und -2 schreiben als $3 = (3, 0°)$ und $-2 = (2, 180°)$ (**Abb. 5**). Im Vordergrund steht die Untersuchung von geeigneten Verknüpfungen, die die aus dem Bereich der reellen Zahlen bekannten enthalten sollen.

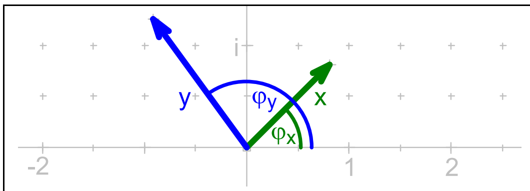

Abb. 4: Zahlen der Zahlenebene werden als Zeiger repräsentiert.

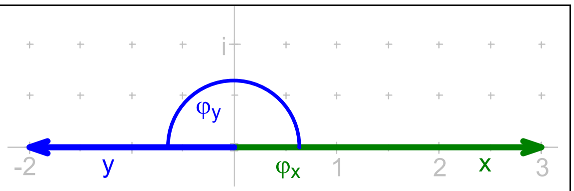

Abb. 5: Die reellen Zahlen -2 und 3 in der Zeigerdarstellung.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
Am Hubland
97074 Würzburg
Telefon: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

Multiplikation als Drehstreckung

Die Zeigermultiplikation wird operativ durch eine Drehstreckung definiert: Der Zeiger des zweiten Faktors wird mit der Länge des ersten Faktors gestreckt (Streckungszentrum: Koordinatenursprung) und anschließend um den Winkel in mathematisch positivem Umlaufsinn gedreht, den der Zeiger des ersten Faktors mit der positiven reellen Achse einschließt (**Abb. 6**). Für die Zeiger $x = (r_x, \varphi_x)$ und $y = (r_y, \varphi_y)$ ergibt sich der Produktzeiger $z = x \otimes y = (r_x \cdot r_y, \varphi_x + \varphi_y)$. Ergibt sich bei der Addition der Winkelmaßzahlen $\varphi_x + \varphi_y \geq 360°$, so wird die Winkelmaßzahl des Summenzeigers gleich $\varphi_x + \varphi_y - 360°$ gesetzt. (Wir betrachten also Winkel modulo 360°.) Die Multiplikation mit dem Nullzeiger ergibt immer den Nullzeiger. Offensichtlich ist diese Operation kommutativ und, wie man leicht zeigt, auch assoziativ. Durchführung mit reellen Zeigern zeigt, dass diese Verknüpfung die reelle Multiplikation beinhaltet.

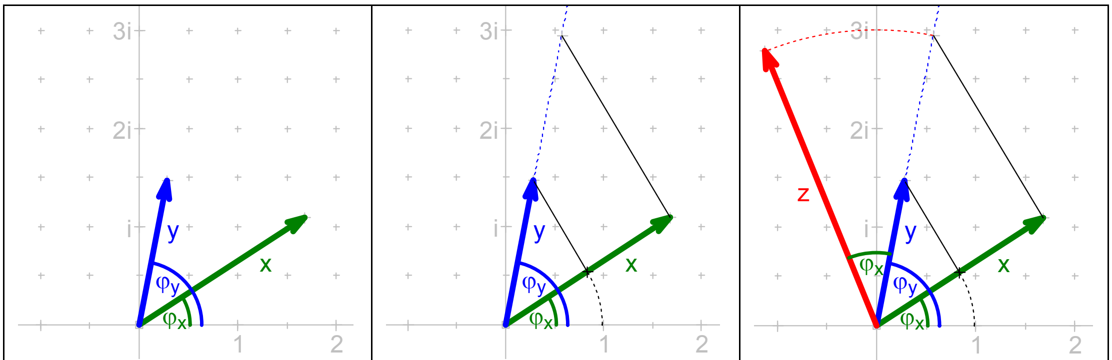

Abb. 6a: Die Zeiger x und y werden multipliziert:

Abb. 6b: y wird um die Länge von x gestreckt,

Abb. 6c: $y_{gestreckt}$ wird um φ_x um den Ursprung gedreht.

Die Zahl i

Die Richtung der zweiten Koordinatenachse wird durch den Zeiger $(1, 90°)$ festgelegt. Da er offensichtlich eine herausragende Bedeutung in unserem Zahlenbereich hat, geben wir ihm einen eigenen Namen, nämlich i. (In den bisherigen Abbildungen der Koordinatensysteme wird dem bereits durch die Achsenbeschriftung Rechnung getragen.) Wenn man i mit sich selbst multipliziert, dann ergibt sich

$$i \otimes i = (1, 90°) \otimes (1, 90°) = (1 \cdot 1, 90° + 90°) = (1, 180°).$$

Dies ist ein Zeiger auf der reellen Achse, nämlich die reelle Zahl –1. In diesem „Zahlensystem“ ist die Gleichung $x^2 = -1$ also lösbar!

Addition als Aneinanderhängen von Zeigern

Es wird eine Zeigeraddition operativ definiert als „Aneinanderhängen“ von Zeigern. Dabei wird der Zeiger für den zweiten Summanden so parallel verschoben, dass sein Fuß mit der Spitze des Zeigers für den ersten Summanden zusammenfällt. Der Summenzeiger verläuft dann vom Koordinatenursprung bis zur Spitze des verschobenen zweiten Summanden (**Abb. 7**). (Dies entspricht für reelle Zeiger der bekannten Zeigeraddition.)

Man kann auch hier leicht zeigen, dass diese Operation kommutativ und assoziativ ist.

StR Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
Am Hubland
97074 Würzburg
Telefon: (0931) 888 5598
E-Mail: mail@juergen-roth.de
Homepage: http://www.juergen-roth.de

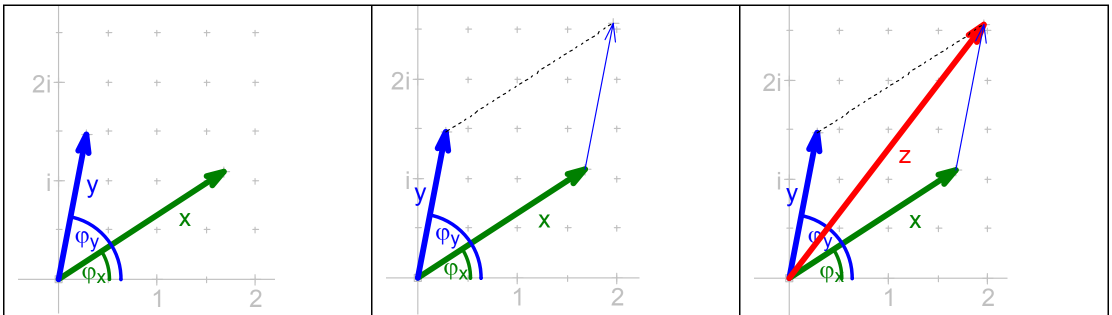

Abb. 7a: Die Zeiger x und y werden addiert: **Abb. 7b:** y wird parallel verschoben, **Abb. 7c:** z ist der Summenzeiger.

Mit der eben definierten Zeigeraddition kann jeder Zeiger z als Summe dargestellt werden aus einem auf der reellen Achse liegenden Zeiger x und einem auf der durch i festgelegten Achse (wir nennen sie i-Achse) liegenden Zeiger y. Damit ergibt sich:

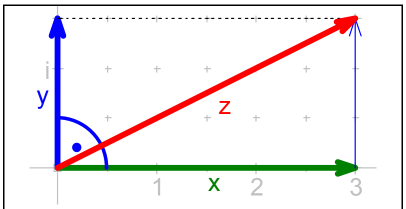

Abb. 8: Darstellung eines Zeigers als Summe eines reellen und eines i-Zeigers

$$\begin{aligned} z = x \oplus y &= \left(r_x, 0°\right) \oplus \left(r_y, 90°\right) \\ &= \left(r_x, 0°\right) \oplus \left(r_y \cdot 1, 0° + 90°\right) \\ &= \left(r_x, 0°\right) \oplus \left(r_y, 0°\right) \otimes \left(1, 90°\right) \\ &= r_x \oplus r_y \otimes i \end{aligned}$$

Dabei sind r_x und r_y reelle Zahlen. Mit Hilfe dieser Überlegung lässt sich z. B. der Zeiger z in **Abbildung 8** schreiben als $z = 3 \oplus 1{,}5\,i$. In dieser Schreibweise kann das Ergebnis einer Zeigeraddition direkt abgelesen werden.

Aus diesen Grundlagen können alle üblichen Rechenregeln für Zahlen (die Körperaxiome) relativ einfach hergeleitet werden. Damit ist der Nachweis erbracht, dass es sich bei den neuen Gebilden wirklich um Zahlen im herkömmlichen Sinn handelt. Mit Ihnen kann man nun diverse Probleme in Angriff nehmen.

Die vorgestellte Einführung gelingt noch anschaulicher, wenn die Zeiger dynamisch variiert werden können. Entsprechende Dateien für das Programm EUKLID DynaGeo können von der folgenden Seite heruntergeladen werden: http://www.juergen-roth.de

Literatur

Euler, L.: Vollständige Anleitung zur Algebra. Unter Mitwirkung von Joh. Niessner in revidierter Fassung neu herausgegeben von Jos. E. Hofmann, Reclam-Verlag, Stuttgart, 1959

Gauß, C. F.: Werke, Ergänzungsreihe, Band I, Briefwechsel C. F. Gauß – F. W. Bessel. Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York, Nachdruck 1975

Gauß, C. F.: Werke, zweiter Band. Göttingen, 1876

Niederdrenk-Felgner, C.: Themenhefte Mathematik, Komplexe Zahlen. Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, 1985

Remmert, R.: Komplexe Zahlen. In: Ebbinghaus H.-D. et al: Zahlen. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988[2]

Kurzbiographien der genannten Mathematiker findet man in englischer Sprache im Internet unter: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html