Jürgen Roth: Experimentelle Geometrie und Projektarbeit am Beispiel „Einparken“. In: Reinhard Oldenburg, Matthias Ludwig (Hrsg.): Experimentelle Geometrie. Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2007

Jürgen Roth

Experimentelle Geometrie und Projektarbeit am Beispiel „Einparken“

Parallel Einparken am Straßenrand (vgl. Abb. 1) ist nach wie vor für viele Fahranfänger eine echte Herausforderung. Wie lang muss die Parklücke für mein Fahrzeug mindestens sein? Wo sollte ich zu Beginn des Einparkvorgangs stehen? Wann muss ich gegenlenken? Zur Klärung dieser und weiterer Fragen kann man Erfahrungen aus dem Alltag (Fahrschule, Beobachtung von Einparkvorgängen, …) einbringen, mit Modellen (z. B. einem Bobby-Car) experimentieren und Daten sammeln (z. B. Abmessungen von Parklücken und Autos). Auf dieser Basis lässt sich der Einparkvorgang mathematisch modellieren. Dabei ist es hilfreich eine dynamische Geometriesoftware zur Simulation des Vorgangs einzusetzen, weil sie eine interaktiv-experimentelle Auseinandersetzung im Sinne des funktionalen Denkens ermöglicht. Durch gezielte Variation kann so z. B. der Einfluss der Daten auf das Problem erschlossen werden. Außerdem lassen sich damit die Ortslinien verschiedener Punkte des Autos in der Simulation aufzeichnen und anschließend interpretieren. Konkrete, aus der mathematischen Modellierung gewonnene Ergebnisse können sowohl mit Hilfe der dynamischen Simulation, als auch mit realen Autos überprüft werden. Das Thema ermöglicht eine gewinnbringende Verzahnung von Alltagswissen, mathematischem Fachwissen und experimentellem Arbeiten. Es eignet sich gerade auch deshalb gut für problemorientierte und arbeitsteilige Projektarbeit.

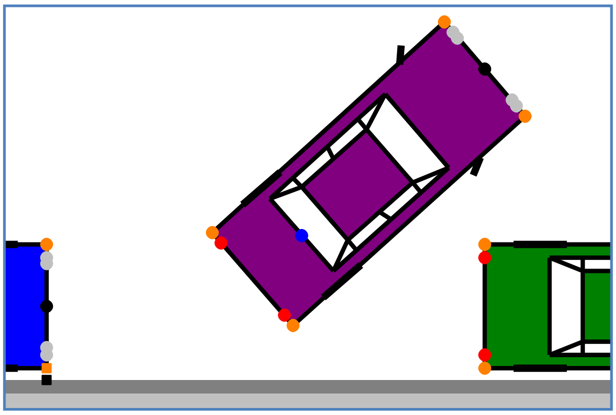

Abb. 1: Einparken am Straßenrand

Abb. 2: Ergebnisse des Brainstormings

Das Problem des Einparkens und die Mathematik

Worin besteht eigentlich das Problem beim „Einparken“? Kann die Mathematik beim Lösen dieses Problems (oder dieser Probleme) helfen? Macht man mit Schülerinnen und Schülern ein Brainstorming zu dieser Thematik, so werden sehr schnell einige Aspekte deutlich (vgl. Abb. 2). Man kann in Abhängigkeit von der Parklücke z. B. quer, senkrecht oder parallel zur Fahrtrichtung und natürlich vorwärts oder rückwärts einparken. Aus Rücksicht auf den fließenden Verkehr sollte der Einparkvorgang nicht zu lange dauern. Es darf natürlich kein anderes Auto, keine Hauswand und dergleichen berührt werden. Mit dem letztgenannten Aspekt sind die Fragen aufgeworfen, welche Mindestabstände man zu Hindernissen einhalten und wie lang (bzw. breit) die Parklücke mindestens sein muss, damit erfolgreiches Einparken überhaupt möglich ist. Den Schülerinnen und Schülern ist wichtig zu überprüfen, wie gut die Tipps sind, die man von Fahrlehrern zum Einparkvorgang erhält. Interessant kann daneben auch die Frage sein, entlang welcher Kurve man beim Einparken fährt.

Wo kommt bei all diesen Fragen aber die Mathematik ins Spiel? Zunächst wird deutlich, dass der Einparkvorgang eine geometrische Komponente hat und wohl auch geometrisch modelliert werden kann. Außerdem müssen Abstände und Parklückenlängen minimiert, also Extremwertprobleme gelöst werden. Es gibt somit inhaltliche Beziehungen zur (Schul-)Mathematik. Daneben lässt sich aber auch noch ganz anders argumentieren, dass Einparkvorgänge mit Hilfe der Mathematik beschrieben und geplant werden können: In modernen Autos werden immer häufiger sogenannte „Parkassistenten“ eingebaut. Diese sind im Prinzip in der Lage, aufgrund von Sensordaten zu entscheiden, ob eine Parklücke die notwendigen Mindestabmessungen besitzt und können ggf. vollautomatisch in solche Parklücken einparken. Dies lässt den Schluss zu, dass mit Hilfe von Methoden der Mathematik Algorithmen entwickelt worden sind, die jedes Einparkproblem lösen können.[1]

Experimentelle Geometrie

Eigene Erfahrungen erleichtern die Entwicklung eines Grundverständnisses für Sachverhalte und Problemstellungen. Walther Lietzmann (1959) plädiert in seinem Buch „Experimentelle Geometrie“ dafür, diese Erfahrungen an (realen) Modellen sammeln zu lassen, mit denen die Schülerinnen und Schüler selbstständig arbeiten. An anderer Stelle unterstreicht er zu diesem Zweck die Bedeutung von „Anschauung und Experiment“ (Lietzmann, 1985, S. III) und von einem „propädeutische[n] Unterricht an höheren Schulen“ (ebd.). Eines seiner Ziele ist dabei auch „die Erziehung zum anschaulichen, Größen beurteilenden, sagen wir technisch-wissenschaftlichen Denken. Solche Erziehung gibt eben am besten die Mathematik, wenn man ihren Geltungsbereich weit genug faßt.“ (Lietzmann, 1955, S. 4) Dabei kann, wie er betont, im Sinne einer „lebendigen Mathematik“, den Schülerinnen und Schülern auch deutlich werden, wie viel man mit der Mathematik im Alltag anfangen kann. Genau an dieser Stelle setzt die hier vorgeschlagene Problemstellung an. Parallel Einparken am Straßenrand ist für viele Fahranfänger eine Herausforderung, obwohl viele Fahrlehrer ihren Fahrschülern eine Art „Einparkalgorithmus“ vermitteln, der in etwa wie folgt formuliert wird: Eine geeignete Startposition wählen, das Lenkrad voll nach rechts einschlagen, bis zu einem bestimmten Punkt rückwärts fahren, stehen bleiben, im Stand vollständig gegenlenken und dann weiter fahren, bis man in der Parklücke steht. Versucht man diesen „Einparkalgorithmus“ abzuarbeiten, dann stellen sich eine ganze Reihe von Anschlussfragen:

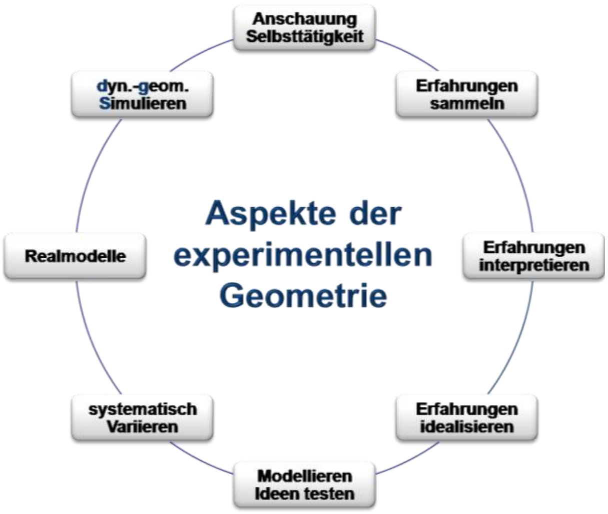

Abb. 3: Aspekte der experimentellen Geometrie

[1] Leider ist – auch auf Nachfrage – kein Automobilhersteller bereit, „etwas“ (und sei es auch nur prinzipiell) über die verwendeten Algorithmen auszusagen.

Wie lang muss die Parklücke für mein Fahrzeug mindestens sein? Wo genau sollte ich zu Beginn des Einparkvorgangs stehen? Wann bzw. wo muss ich gegenlenken? Diese Fragen kommen aus dem Alltag und mögliche Problemlösungen müssen wieder auf ihre Alltagstauglichkeit überprüft werden. Die Schülerinnen und Schüler stehen hier einem offenen Problem gegenüber und müssen zunächst einen Zugang dazu finden, das Problemfeld ausloten. Da dieses Problem insbesondere auch geometrischer Natur ist, bietet sich hier ein Zugang im Sinne der ***experimentellen Geometrie*** (vgl. Abb. 3) an, die von der Überzeugung getragen wird, dass ***Anschauung und Selbsttätigkeit*** ganz wesentlich zur Entwicklung von Verständnis und damit zum Erkenntnisgewinn beitragen. Dazu müssen Schülerinnen und Schüler zunächst ***Erfahrungen*** im Umgang mit der Situation – hier dem Einparken – ***sammeln***. Dies können sie auf vielfältige Weise tun. Es lassen sich z. B. die Abmessungen von realen Parkplätzen und Autos durch Messung bestimmen (vgl. Abb. 4) oder im Internet, in Kraftfahrzeugscheinen u. ä. recherchieren. Manche evtl. relevanten Größen, wie etwa der Wendekreisradius eines Autos, lassen sich nur schwer in Erfahrung bringen, aber experimentell bestimmen. Der Wendekreis ist der Kreis mit dem kleinsten Radius, den ein Fahrzeug noch fahren kann. Fährt man bei voll eingeschlagenem Lenkrad einen Linkskreis, dann ist der Wendekreisradius der Radius des Kreises, den die vordere rechte Ecke des Autos beschreibt (vgl. Abb. 5). Dieser Kreis lässt sich über Kreidemarkierungen auf einem Asphaltplatz experimentell gut bestimmen und vermessen. An einem ***Realmodell***, wie etwa einem Bobby-Car, kann der Einparkvorgang experimentell untersucht werden. Dabei bietet es sich an, mit Hilfe von angeklebten Stiften Ortslinien verschiedener Punkte des Modells beim Einparkvorgang aufzuzeichnen (vgl. Abb. 6 und Abb. 7). An diesem Beispiel wird deutlich, dass es mit dem Sammeln von Erfahrung nicht getan ist. Man muss die gemachten ***Erfahrungen*** vielmehr ***interpretieren*** und analysieren sowie ggf. auch ***idealisieren***. Betrachtet man die Ortslinien verschiedener Punkte des Bobby-Cars (vgl. Abb. 8), so stellt man fest, dass sich für Punkte am Heck des Bobby-Cars „glatte", also stetige und differenzierbare Kurven ergeben, während die Ortslinien für Punkte an der Front des Bobby-Cars „Knicke" haben, sie also an diesen Stellen lokal nicht differenzierbar sind (vgl. Abb. 9). Woran kann das liegen? Durch ***systematisches Variieren*** der Einflussgrößen (wie etwa der Fahrzeugabmessungen, der Startposition oder dem „Zeitpunkt" des Gegenlenkens) können wesentliche Ideen gewonnen werden, die zu einer geometrischen Modellierung des Vorgangs führen. Schlägt man z. B. nur voll in eine Richtung ein und fährt rückwärts ohne gegenzulenken, so fährt das Bobby-Car im Kreis. Eine der vorderen Ecken des Autos durchläuft dabei gerade den Wendekreis.

Abb. 4: Parkplätze vermessen

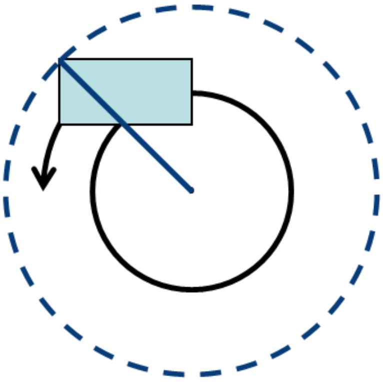

Abb. 5: Wendekreisradius

Abb. 6: Ortslinien aufzeichnen (1)

Abb. 7: Ortslinien aufzeichnen (2)

Abb. 8: Ortslinien interpretieren

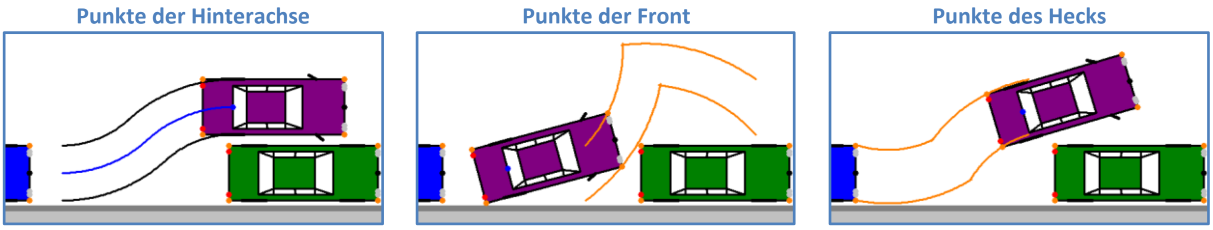

Abb. 9: Ortslinien für verschiedene Punkte des Autos beim parallel Einparken nach Fahrschulregel

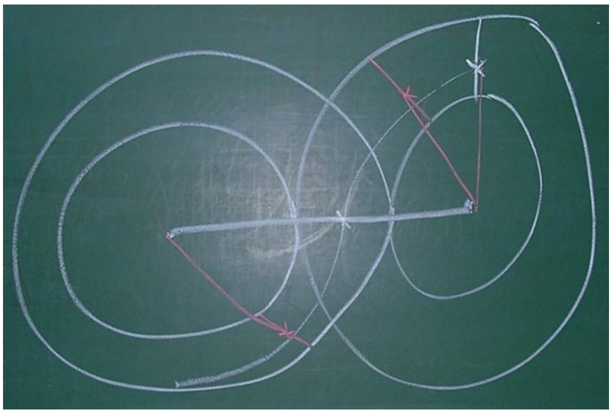

Abb. 10: Idealsierung der gewonnenen Erfahrungen

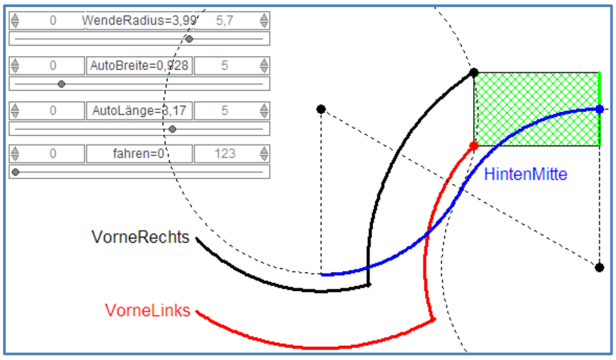

Abb. 11: DGS-Modell von Schülerinnen mit Ortslinien

Interpretiert und analysiert man dieses Ergebnis, so kann das zur Erkenntnis führen, dass es sich beim Einparkvorgang nach der Fahrschulregel um eine aus zwei Kreisbogenstücken zusammengesetzte Bewegung handeln könnte. Dieser Denkvorgang erfordert eine Idealisierung der gesammelten Erfahrungen. Die mit dem Bobby-Car als Realmodell aufgezeichneten Ortslinien sind nicht sofort als Kreisbogenstücke erkennbar (vgl. Abb. 8). Auf der Grundlage der Idealisierung wird eine geometrische ***Modellierung*** des Vorgangs möglich, an der man die entwickelten ***Ideen testen*** kann. In Abb. 10 wurde das Auto auf seine Hinterachse reduziert und damit eine weitere Idealisierung vorgenommen wurde. Daran lässt sich wiederum ablesen, dass für das parallele Einparken, bei dem die Anfangs- und Endposition des Autos parallel zueinander sind, die beiden durchfahrenen Kreisbogenstücke gleich lang sein müssen, also den gleichen Mittelpunktswinkel besitzen müssen. Darüber hinaus muss sich der Mittelpunkt der jeweils konzentrischen Kreise auf der Verlängerung der (nicht lenkbaren) Hinterachse befinden. Diese Erkenntnisse reichen aus, um mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware das Problem (bzw. dessen Modellierung) ***dynamisch-geometrisch*** zu ***simulieren***. Abb. 11 zeigt eine derartige Simulation, die von zwei Schülerinnen erstellt wurde. Der große Vorteil einer solchen dynamisch-geometrischen Simulation ist, dass man damit noch besser als mit Realmodellen experimentelle Geometrie in der eben beschriebenen Form betreiben kann. Die systematische Variation ist damit erheblich einfacher zu bewerkstelligen als mit dem Realmodell und auch die Ergebnisse der Variation sind – etwa in Form von Ortslinien – leichter zu überblicken. Auf diese Weise wird eine noch genauere Analyse des Einparkvorgangs möglich. Die Bildserie in Abb. 12 zeigt etwa die Auswirkung der Variation des Abstandes der Front des Autos von der Hinterachse auf die Ortslinien. Dabei wird deutlich, dass nur Punkte auf der Hinterachse eine differenzierbare Ortslinie besitzen, also „knickfrei" sind. Den Hintergrund dieser Tatsache kann man erschließen, wenn man, wie in Abb. 13 geschehen, Hilfslinien einzeichnet. Nur für Punkte auf der Hinterachse berühren sich die beiden an der Ortslinie beteiligten Kreise um M_1 bzw. M_2. Für alle anderen Punkte schneiden sie sich.

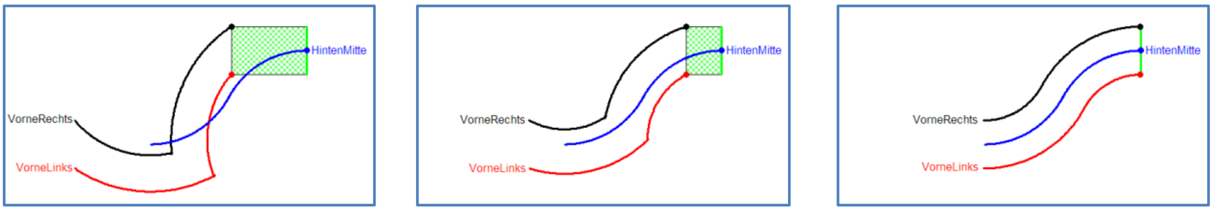

Abb. 12: Variation des Abstandes „Front↔Hinterachse“ – Analoges ergibt sich für den Abstand „Hinterachse↔Heck“

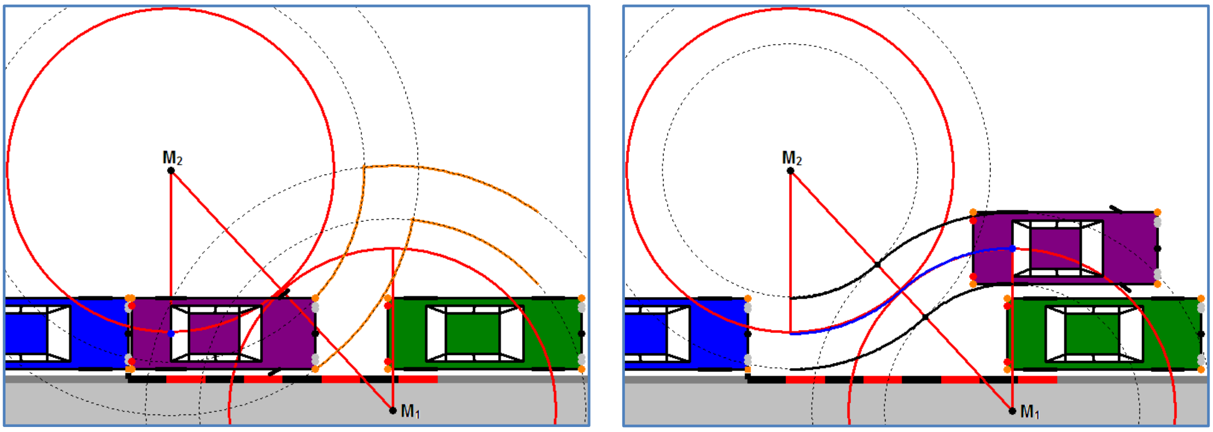

Abb. 13: Hilfslinien zur Verdeutlichung der Entstehung der „Knicke“ in den Ortslinien

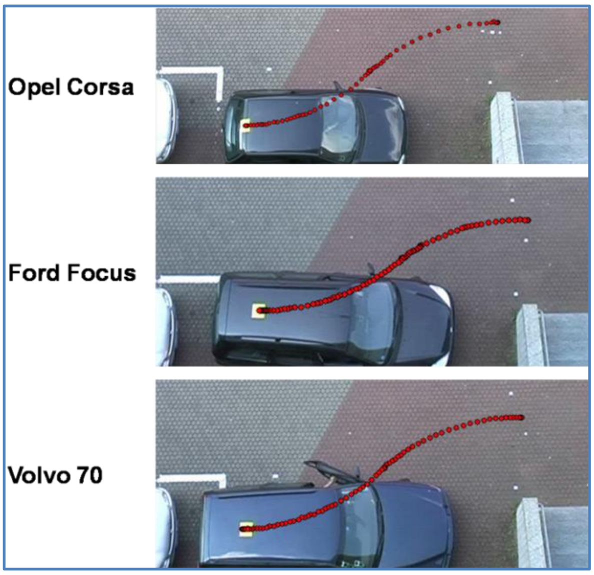

Abb. 14: Videoanalyse von Einparkvorgängen

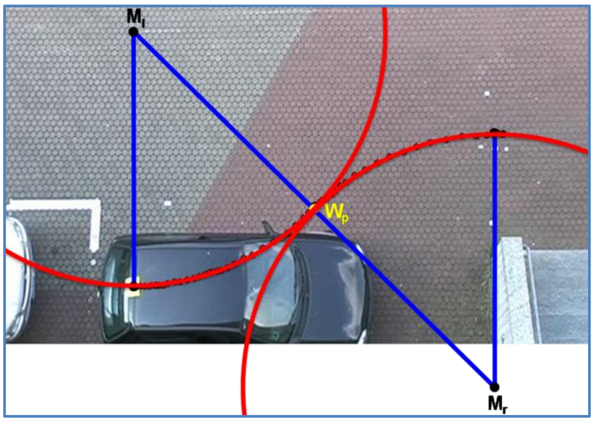

Abb. 15: Vergleich der Videoanalyse mit dem Modell

Die Tragfähigkeit des Modells kann durch Videoaufzeichnungen[2] eines realen Einparkvorgangs getestet werden (vgl. Abb. 14 und Abb. 15). Mit einer geeigneten Videoanalysesoftware (Suleder, 2003) lassen sich Bewegungsbahnen in Videoclips automatisch markieren, analysieren, die gemessenen Punktkoordinaten bei Bedarf im Excel-Format exportieren und dort weiterverarbeiten.[3] Den Schülerinnen und Schülern hat es gereicht, die per Videoanalyse erhaltenen Ortslinien visuell (vgl. Abb. 15) mit dem Modell zu vergleichen.

---

[2] Es empfiehlt sich, den Einparkvorgang möglichst senkrecht von oben aufzuzeichnen. Dies gelingt, wenn man aus einem dritten oder höheren Stockwerk eines Hauses ein möglichst nahe an der Hausmauer einparkendes Auto filmt.

[3] Mittlerweile liegt vom selben Autor eine ausgereifte Version dieser Software zur automatischen Videoanalyse von Bewegungen unter dem Namen „measure Dynamics“ vor, die noch mehr Möglichkeiten bietet. Informationen dazu findet man im Internet unter http://www.phywe.de/ (Abgerufen am 12.07.2007).

Es wird deutlich, dass zur Erarbeitung des Problems Erfahrungen aus dem Alltag (Fahrschule, Beobachtung von Einparkvorgängen, …) eingebracht werden können und darüber hinaus verschiedene interaktiv-experimentelle Zugänge möglich sind. So kann man einerseits im Sinne des funktionalen Denkens durch gezielte Variation den Einfluss der Daten auf das Problem erschließen und andererseits Ortslinien verschiedener Punkte des Autos aufzeichnen und interpretieren. Eine ausgereifte von Schülerinnen und Schülern erstellte dynamisch-geometrische Simulation des Einparkvorgangs mit vielen Variationsmöglichkeiten zeigt Abb. 16.

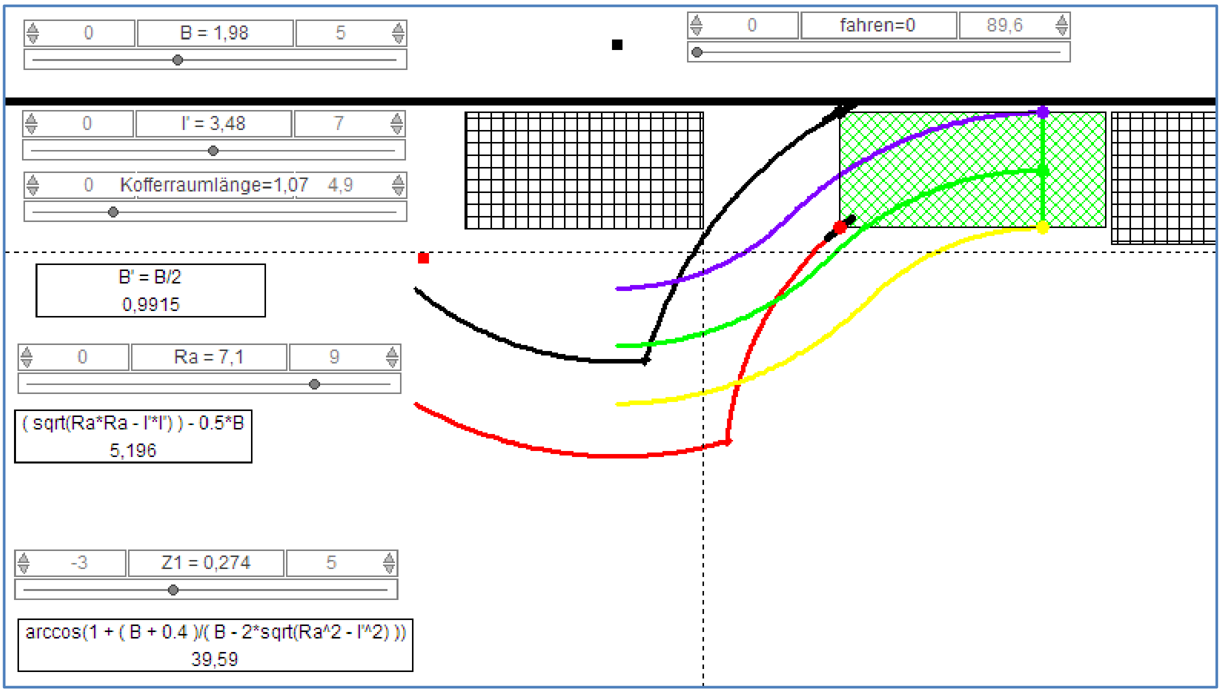

Abb. 16: Von Schülerinnen und Schülern erstellte dynamisch-geometrische Simulation des Einparkvorgangs

Projektarbeit

Beim Thema „Einparken“ finden sich alle wesentlichen Merkmale und Prozesse eines Projekts wieder (vgl. Abb. 17).[4] Ausgangspunkt sind offene Fragen, die verschiedene Lösungsansätze erlauben und von Schülerinnen und Schülern selbstständig bearbeitet werden können. Dazu ist einerseits Kreativität erforderlich und andererseits ermöglicht die Fragestellung den Schülerinnen und Schülern ihren Spieltrieb auszuleben. Schließlich mündet das Projekt in ein Produkt. Im vorliegenden Fall ist dies insbesondere ein php-Programm, das nach Eingabe der Fahrzeug- und Parklückendaten alle Parameter eines „optimalen“ Einparkvorgangs liefert.

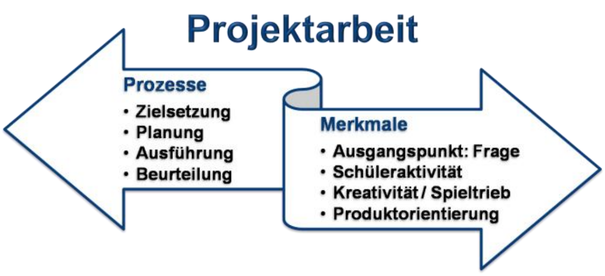

Abb. 17: Projektarbeit

[4] Eine gute Zusammenfassung relevanter Merkmale und Prozesse, die für eine gelungene Projektarbeit von Bedeutung sind, findet man bei Ludwig (2001).

Abb. 18: Projektgruppe „Einparken“ (2006)

Das Projekt lässt sich ab der 10. Jahrgangsstufe durchführen, da als mathematische Werkzeuge der Satz des Pythagoras und trigonometrische Funktionen benötigt werden. Konkret erprobt wurde es mit einer Gruppe von sieben Schülerinnen und Schülern der 11. und 12. Jahrgangsstufe aus sieben verschiedenen Gymnasien der Region Würzburg im Rahmen der Schüler-Projekttage Mathematik am Institut für Mathematik der Universität Würzburg. Hier werden seit 2001 jedes Jahr ca. 45 Schülerinnen und Schüler aus unterfränkischen Gymnasien eingeladen in einem viertägigen Seminar unter qualifizierter Anleitung und Betreuung durch Dozenten der Mathematik jeweils eine mathematische Problemstellung in Gruppenarbeit zu bearbeiten. Dazu werden die Gymnasien über den Ministerialbeauftragten von Unterfranken angeschrieben und gebeten jeweils zwei interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler zu melden. Die Schüler füllen dazu einen Fragebogen zu ihren mathematischen Fähigkeiten und Interessen aus, der von einem Mathematiklehrer ihrer Schule um eine Stellungnahme ergänzt wird. Aus diesen Meldungen, die die verfügbaren Plätze in der Regel weit übersteigen wählen die beteiligten Dozenten des Instituts für Mathematik der Universität Würzburg Schülerinnen und Schüler nach inhaltlichen Kriterien aus.[5] In Kleingruppen von je ca. sieben Schülerinnen und Schülern wird während der Projektwoche vier Tage lang an verschiedensten Themen gearbeitet.[6] Die Schülerinnen und Schüler werden hierfür vom regulären Schulunterricht befreit, um die Mathematik als eine Wissenschaft mit hoher Bedeutung für unser gegenwärtiges Leben kennen zu lernen und um einen Einblick aus erster Hand in die Tätigkeit von Mathematikern zu gewinnen. Abschluss der Projekttage ist immer eine öffentliche Präsentation der Ergebnisse durch die Schülerinnen und Schüler. Darüber hinaus verfasst jede Projektgruppe einen schriftlichen Projektbericht, in dem Prozesse und Ergebnisse der Projektarbeit festgehalten werden. Auf diese Weise ist immer ein Produkt als Ziel vor Augen. Abb. 18 zeigt die sieben Schülerinnen und Schüler der Projektgruppe „Einparken“ während der Schüler-Projekttage Mathematik 2006 bei der Arbeit. Sie haben die Prozesse der Zielsetzung und Planung im Verlauf der Projektarbeit mehrfach durchlaufen. Zunächst wurden in einem Brainstorming verschiedenste Aspekte zum Einparken zusammengetragen (vgl. Abb. 2). Die Schülerinnen und Schüler haben sich auf dieser Grundlage sehr schnell dafür entschieden, das am schwierigsten erscheinende parallele Einparken am Straßenrand und die Fahrschulmethode (siehe oben) genauer zu untersuchen.

---

[5] Dabei wird versucht ein ausgewogenes Verhältnis von Mädchen und Jungen zu erreichen.

[6] In den letzten Jahren waren darunter u. a. folgende Themen: „Schöne Kurven“, „Die Gardena-Bewässerungsanlage“, „Elliptische Kurven in der Kryptographie“, „Warteschlangenprobleme“, „Qualitätskontrolle bei Fertigungsverfahren“, „Das Mero-Glaskugeldachproblem“, „Funktionen zweier Veränderlicher“, „Goliath oder David? Sind große Ameisen die besseren Erntemaschinen?“, „Dem ‚Chaos‘ auf die Spur“, „Das Spiel ‚Schiffe versenken‘ und die Computertomographie“, „Geheimschriften und Verschlüsselungsverfahren“, „Roboter zum Laufen bringen und überlegen, wie man sie auf den Mond schießen kann“, „Wurstkatastrophe“, „Einparken“

Jürgen Roth: Experimentelle Geometrie und Projektarbeit am Beispiel „Einparken“. In: Reinhard Oldenburg, Matthias Ludwig (Hrsg.): Experimentelle Geometrie. Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2007

Abb. 19: Projektgruppen

Daraufhin wurden zunächst zwei Projektteilgruppen geplant, nämlich die Gruppe „Daten“, die Fahrzeugdaten beschaffen sowie Messungen an Parkplätzen bzw. Autos durchführen sollte und die Gruppe „Bobby-Car“, die mit einem Realmodell[7] Einparkvorgänge experimentell untersuchen sollte. Die (Teil-)Gruppen haben völlig unabhängig voneinander gearbeitet. Es wurde aber vereinbart, dass immer dann, wenn eine Gruppe Ergebnisse erreicht hatte oder Diskussionsbedarf bestand, ein Plenum einberufen wurde. Dies geschah zum ersten Mal, als fast zeitgleich die Gruppe „Daten“ ihre Ergebnisse präsentieren wollte und die Gruppe „Bobby-Car“ Schwierigkeiten mit der Interpretation der experimentell erhaltenen Ortslinien hatte. Nach längeren Diskussionen und ersten Ergebnissen wurde beschlossen in drei (neuen) Gruppen weiterzuarbeiten. Die Gruppe „Bobby-Car“ überprüfte die theoretischen Überlegungen experimentell, während die neu gebildete Gruppe „DGS“ den Einparkvorgang mit der dynamischen Geometriesoftware EUKLID DynaGeo auf der Grundlage des entwickelten Modells dynamisch-geometrisch simulierte. Parallel dazu hat die Gruppe „Video“ reale Einparkvorgänge von Autos aufgezeichnet und analysiert. Auf diese Weise wurden nach und nach insgesamt acht Projektteilgruppen gebildet (vgl. Abb. 19). Die Ausführung erfolgte in Kleingruppenarbeit (je zwei bis vier Schülerinnen und Schüler) teilweise gleichzeitig aber auch nacheinander. In regelmäßigen Treffen im Plenum wurden die Ergebnisse der Gruppen vorgestellt, diskutiert und bei Bedarf neue Teilprojektgruppen gebildet, andere neu besetzt, personell verstärkt, reduziert oder ganz aufgelöst.

Schülerergebnisse der Projekttage

Die Schülerinnen und Schüler haben in den vier Tagen Arbeitszeit eine ganze Reihe von interessanten Ergebnissen zum parallelen Einparken am Straßenrand erarbeitet. Aus Platzgründen kann hier nur auf einige ausgewählte Aspekte eingegangen werden. Im Internet kann aber weiteres, in der Projektgruppe entstandenes Material unter der Adresse http://www.juergen-roth.de/einparken/ abgerufen werden. Es handelt sich um den Projektbericht, eine PowerPoint-Präsentation, diverse EUKLID DynaGeo- sowie Excel-Dateien und ein Programm, das zu den Fahrzeugdaten jedes beliebigen Fahrzeugs die „optimalen“ Einparkparameter (Start-, Gegenlenkposition, minimale Parklückenlänge) ausgibt.

Einige Ergebnisse der Projektgruppe waren für die Schülerinnen und Schüler im Nachhinein so selbstverständlich, dass sie sie gar nicht mehr in ihren Projektbericht aufgenommen haben. Zunächst ist es schon überraschend, wie weit die Front des Autos beim Einparkvorgang in die Straße ragt. Abb. 1 zeigt beispielsweise eine Stellung des Autos in der Gegenlenkposition, die zu einem „optimalen“ Einparkvorgang gehört und zu keiner Berührung eines der anderen Fahrzeuge führt. Warum das so ist, wird in Abb. 9 bzw. Abb. 13 deutlich. Damit ist auch klar, warum es sinnvoll ist rückwärts

[7] Interessanterweise haben die Schülerinnen und Schüler ohne zu zögern das Bobby-Car als Realmodell gewählt, obwohl auch ein ferngesteuertes Auto und ein lenkbarer Siku-Traktor im Maßstab 1:36 zur Verfügung stand. Offenbar spielt die Größe des Modells eine nicht zu unterschätzende Rolle.

einzuparken: Beim Vorwärtseinparken muss man entweder weit über den Gehsteig fahren oder wird von Hauswänden und ähnlichem gebremst.[8]

Anhand der Tatsache, dass die mit dem Bobby-Car aufgezeichneten Ortslinien von einigen Schülerinnen und Schülern zunächst für Sinuskurven gehalten wurden (vgl. Abb. 7), werden die Probleme deutlich die bei der Modellierung des Einparkvorgangs auftreten und die aus der Perspektive der vorliegenden Ergebnisse gar nicht mehr erkennbar sind. Als ganz entscheidend bei der Erarbeitung hat sich die heuristische Strategie der Idealisierung herausgestellt. Die Reduzierung des Autos auf einen Punkt hat bei der Erkenntnis geholfen, dass es wohl nur einen Punkt gibt, bei dem sich die Ortslinie aus zwei Kreisbogenstücken zusammensetzt, die denselben Radius besitzen. Die Reduzierung des Autos auf die Hinterachse (Beobachtung einer Kreisbewegung eines Lineals und später Variation der Längenausdehnung des Autos in der dynamisch-geometrischen Simulation) hat die Einsicht ermöglicht, dass der Mittelpunkt der Wendekreise immer auf der Verlängerung der Hinterachse liegt. Auf diese Weise wurde der Mittelpunkt der Hinterachse als ausgezeichneter Punkt beim Einparkvorgang ermittelt (vgl. Abb. 13). Damit war die Grundlage gelegt, um anhand von ***bekannten bzw. messbaren Größen*** (vgl. Abb. 20), wie

- Breite ***B*** des Autos
- Länge ***L*** des Autos
- Abstand Hinterachse-Front ***l***
- Wendekreisradius ***R***
- seitlicher Sicherheitsabstand ***s*** zu Beginn des Einparkvorgangs

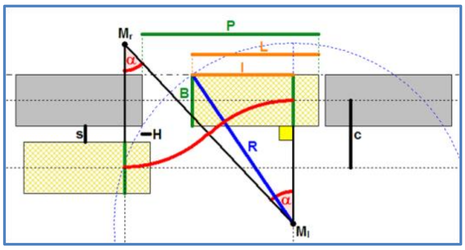

Abb. 20: Relevante Größen

für den Einparkvorgang benötigte Kenngrößen wie z. B. die folgenden zu bestimmen:

- Mindestlänge ***P*** der Parklücke
- Mittelpunktswinkel ***α***
- Abstand ***H*** zwischen dem Heck des einparkenden und dem Heck des vor der Parklücke stehenden Autos zu Beginn des Einparkvorgangs

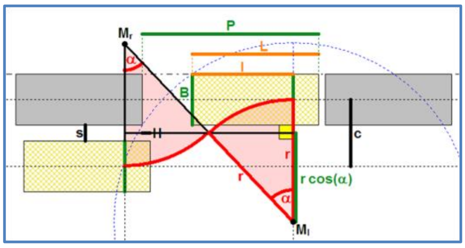

Abb. 21: Erarbeitungshilfe 1

Unter Zuhilfenahme des Satzes von Pythagoras und grundlegender Kenntnisse über trigonometrische Funktionen lassen sich anhand der Abb. 21, Abb. 22 und Abb. 23 die in Abb. 24 dargestellten exemplarischen Ergebnisse der Projektgruppe „Formalisierung" nachvollziehen.

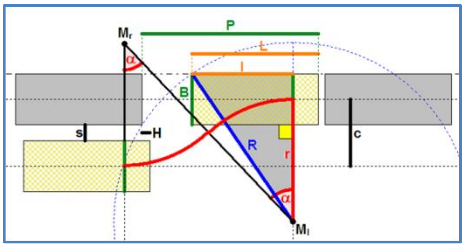

Abb. 22: Erarbeitungshilfe 2

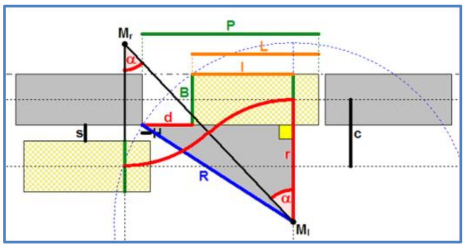

Abb. 23: Erarbeitungshilfe 3

$$r \cdot \cos\alpha = r - \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(1 - \frac{c}{2r}\right) = \arccos\left(1 + \frac{B+s}{B - 2\sqrt{R^2 - l^2}}\right)$$

$$P = d + L$$
$$= \sqrt{l^2 + 2B\sqrt{R^2 - l^2} - B^2} - l + L$$

$$c = B + s$$

$$R^2 = l^2 + \left(r + \frac{B}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - l^2} - \frac{B}{2}$$

$$(d+l)^2 = R^2 - \left(r - \frac{B}{2}\right)^2$$

Abb. 24: Exemplarische Ergebnisse der Projektgruppe „Formalisierung"

[8] Dies liefert auch eine Antwort auf die Frage, warum bei Gabelstaplern statt der Vorderachse die Hinterachse gelenkt wird.

Ausblick

Die gefundenen Lösungsideen lassen sich mit anderen Lösungsansätzen etwa von Herrmann (2006) und Hoyle (2003) vergleichen, bzgl. ihrer Praxistauglichkeit sowie der Zulässigkeit der gewählten Vereinfachungen analysieren und z. B. auch mit selbstprogrammierten Robotern (z. B. LEGO® Mindstorms®) testen. Ein interessanter Aspekt, den man im Rahmen von Facharbeiten oder Pluskursen Mathematik untersuchen könnte, wäre auch die Betrachtung von Einparkvorgängen, die eher der Realität entsprechen als das Lenken im Stand, das bei der „Fahrschulmethode" notwendig ist. Viele Autofahrer verändern ihren Lenkradeinschlag während des Einparkvorgangs kontinuierlich. Dabei ergeben sich natürlich keine Kreisbögen, sondern Kurven, die ihre Krümmung kontinuierlich verändern.[9] Es wäre sicher lohnend, dies genauer zu untersuchen. Auch die Frage in wie weit sogenannte „Korrekturzüge" die minimal notwendige Parklückenlänge verringern können wäre ein ertragreiches Untersuchungsthema. Darüber hinaus bieten sich auch Auseinandersetzungen mit Lösungsansätzen für automatische „Einparkassistenten" wie etwa bei Müller & Deutscher (2006) und Müller et al. (2007) an, die heute in vielen Fahrzeugen eingebaut sind. Das Thema bietet also reichlich Potenzial für kreatives mathematisches Arbeiten und experimentelle Geometrie und ist mit den hier vorgestellten Ergebnissen der Schülerinnen und Schüler der Projektgruppe längst nicht erschöpfend behandelt.

Literaturverzeichnis

Herrmann, N. (2006). *Mathematik ist überall* (2. Ausg.). München: R. Oldenbourg Wissenschaftsverlag.

Hoyle, R. (2003). *Requirements for a perfect s-shaped parallel parking manoeuvre in a simple mathematical model.* Abgerufen am 20. März 2007 von http://www.maths.surrey.ac.uk/personal/st/R.Hoyle/papers/parkingformula.pdf

Lietzmann, W. (1959). *Experimentelle Geometrie.* Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft.

Lietzmann, W. (1955). *Lebendige Mathematik.* Würzburg: Physica-Verlag.

Lietzmann, W. (1985). *Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland, 1912. Nachdruck mit einer Einführung von Gerhard Becker.* Paderborn: Ferdinand Schöningh.

Ludwig, M. (2001). Die Struktur von Projekten. In M. Ludwig (Hrsg.), *Projekte im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht* (S. 11-30). Hildesheim: Franzbecker.

Müller, B., & Deutscher, J. (2006). Zweistufige Trajektorienplanung für das automatische Einparken. *Steuerung und Regelung von Fahrzeugen und Motoren AUTOREG 2006*, *VDI-Berichte Nr. 1931.* Wiesloch, 7./8.3.2006.

Müller, B., Grodde, S., Giesen, F., Deutscher, J., & Roppenecker, G. (2007). Universelle Bahnplanung für das automatische Einparken. *Automobiltechnische Zeitschrift , 01* (109. Jahrgang), S. 66-71.

Suleder, M. (2003). *AVA - Automatische Videoanalyse.* Abgerufen am 21. März 2007 von http://didaktik.physik.uni-wuerzburg.de/~suleder/software/ava/

[9] Ich verdanke dem Kollegen Lutz Führer den Hinweis, dass derartige Kurven z. B. auch in der Architektur bei den Korbbögen vorkommen.