BÄRBEL BARZEL, JÜRGEN ROTH

Bedienen – Problemlösen – Reflektieren

Strategisch arbeiten mit digitalen Werkzeugen

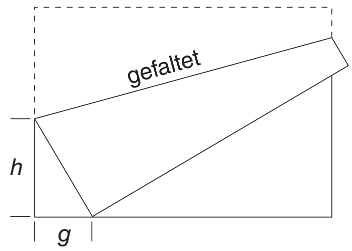
LERNGRUPPE: 5. – 13. Schuljahr

IDEE: Eine Übersicht über Strategien beim selbstständigen Arbeiten mit digitalen Werkzeugen hilft Schülerinnen und Schüler ebenso wie Lehrkräften.

Digitale Werkzeuge sind schon lange fester Bestandteil der Bildungsstandards und Lehrpläne. Für viele Lehrpersonen gehören sie selbstverständlich zum Lernen und Lehren von Mathematik. Zu den „digitalen Mathematikwerkzeugen“, wie sie in den Bildungsstandards genannt werden, zählen Tabellenkalkulationsprogramme, Funktionenplotter, dynamische Geometrie-Systeme, dynamische Stochastik-Systeme, Computer-Algebra-Systeme und – als deren Verbindung – dynamische Mathematik-Systeme (auch Multirepräsentationssysteme genannt).

Computer mit entsprechenden Programmen können das Lernen von Mathematik unterstützen und sind hilfreich beim Anwenden von Mathematik, sowohl bei inner- wie bei außermathematischen Problemen. Anhand folgender Aufgabe (vgl. Biehler u. a. 2007, Murdock u. a. 2004) können Lernende mathematische Zusammenhänge entdecken. Auch wenn die Aufgabe ohne Rechner lösbar ist, bieten digitale Werkzeuge nützliche Instrumente, um die verschiedenen Zugänge zur Lösung sinnvoll zu unterstützen.

→ *Nimm ein DIN-A4-Blatt quer und falte die linke obere Ecke auf die gegenüberliegende Rechteckseite. Wie musst du falten, damit das entstehende rechtwinklige Dreieck unten links maximalen Flächeninhalt hat?*



Zunächst wird schon deshalb am besten gefaltet, weil beim realen Falten die Länge $(21 - h)$ für die Hypotenuse als wichtiger Hinweis für die Nebenbedingung unmittelbar „erlebt“ werden kann. Zusätzlich werden die, je nach Faltung tatsächlich verschiedenen, Flächeninhalte „sichtbar“.

Auch wenn – je nach Unterrichtssituation – der eine oder andere Zugang wahrscheinlicher ist (z. B. im Rahmen eines Analysis-Kurses als Extremwert- oder in früheren Jahrgängen als Problemlöseaufgabe), sind verschiedene Zugänge denkbar:

- Beispielwerte für h systematisch erfassen und jeweils den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen.
- Das Problem geometrisch angehen: Skizze nachkonstruieren.
- Zu optimierenden Ziel-Term und Nebenbedingung suchen.

Strategieblick entwickeln

Die genannte Aufgabe eignet sich, um Lernenden Strategien zum prinzipiellen Vorgehen bei einer solchen Problemlösung und zum zielgerichteten bzw. heuristischen Einsatz digitaler Werkzeuge bewusst zu machen. Explizites Eingehen auf Strategien kann auch verhindern, dass im Unterricht zu schnell ein Weg favorisiert und damit die Entwicklung der Problemlösefähigkeit bei Lernenden – auch mithilfe von digitalen Werkzeugen – unterdrückt wird. Wenn die Lernenden die angewandten Strategien in einem Portfolio für sich selbst festhalten, wird dieses strategische Vorgehen nicht auf ein einzelnes Beispiel begrenzt bzw. bleibt nicht darauf bezogen. Sie können vielmehr bei anderen Problemlösesituationen mit digitalen Werkzeugen wieder darauf zurückgreifen. Ziel ist jedenfalls immer, die gewählten digitalen Werkzeuge bewusst einzusetzen und diese so zu nutzen, dass das Verstehen von mathematischen Inhalten vertieft werden kann.

Es lassen sich beim problemlösenden Einsatz digitaler Werkzeuge drei Ebenen relevanter, verallgemeinerbarer Strategien unterscheiden:

(1) In den Strategien zum Nutzen der technischen Möglichkeiten *(Nutzungsstrategien)* steckt einerseits die Herausforderung, die Technik sinnvoll und nicht „automatisch in jedem Fall“ zu nutzen (auch um eigene mentale Fähigkeiten nicht zu verlieren bzw. bewusst dafür die Verantwortung zu übernehmen). Andererseits gilt es, technische Bedienkompetenzen zu erwerben und die Menü-Strukturen zu verstehen. Ziel ist es, nicht nur einzelne Befehle zu lernen, sondern auch Meta-Wissen zu gewinnen, das den Transfer auf andere Bedienelemente erleichtert.

(2) Mediengestützte Arbeitsschritte hängen oft mit allgemeinen *Problemlösestrategien* zusammen. So können Zahlenbeispiele, Terme oder geometrische Konfigurationen schnell generiert, Darstellungen gewechselt und verknüpft sowie Rechnungen leicht modifiziert und angepasst werden.

(3) *Reflexionsstrategien* sind beim Arbeiten mit digitalen Werkzeugen besonders relevant, weil mathematische

Objekte, die eingegeben bzw. verarbeitet werden, in verschiedenen Rollen und Abhängigkeiten auftreten. So muss beispielsweise die fokussierte Variable beim Lösen von Gleichungen oder beim Ableiten in der Computeralgebra spezifiziert oder auch die Rolle von geometrischen Punkten als frei, gebunden oder abhängig wahrgenommen bzw. umgesetzt werden. Darüber hinaus gehört der geeignete Umgang mit Ungenauigkeiten (rationale Näherungen, sinnvolle Berücksichtigung von Nachkommastellen, Rundungsfehler) und Näherungslösungen hierzu.

Nutzungsstrategien

Gerade zu Beginn der Arbeit mit einem digitalen Werkzeug können folgende Strategien hilfreich sein:

Menü-Struktur vertraut machen
Es ist empfehlenswert, sich zu Beginn mit der jeweiligen Menü-Struktur vertraut zu machen. Das bedeutet, alle Menüs einmal zu öffnen und sich die vorhandenen Befehle anzusehen.

Hilfe vertraut machen und suchen
Digitale Werkzeuge besitzen eine Hilfe – entweder innerhalb des Werkzeugs oder es wird auf externe Hilfeseiten im Internet verlinkt. Wer sich die Struktur dieser Hilfen angesehen hat, findet gewünschte Befehle oder Vorgehensweisen leichter. Die Hilfen ermöglichen auch die Suche nach Themen bzw. im Befehlskatalog.

Eingabehilfen bewusst nutzen
Die meisten aktuellen digitalen Werkzeuge stellen eine Autovervollständigung von Befehlen, einschließlich wesentlicher Hinweise zu notwendigen Variablen, zur Verfügung, aus denen man während der Eingabe auswählen kann. In diesem Zuge sollte man auch auf Eingabespezifika der verwendeten Software achten, etwa den häufig verwendeten (angloamerikanischen) Punkt an Stelle des Kommas als Dezimaltrennzeichen. Häufig ist es hilfreich, sich klar zu machen, wofür der jeweilige Befehl steht, wie etwa bei englischen Bezeichnern, wie „solve“ also „lösen“.

Vorhandene Dateien analysieren
Es kann hilfreich sein, fertige Dateien zu analysieren, die mit dem digitalen Werkzeug erstellt wurden und gewünschte Elemente enthalten (ggf. Internet-Recherche bzw. vorbereitete Dateien der Lehrkraft oder Hinweise auf geeignete Dateien im Netz). Auf diese Weise lassen sich benötigte Befehle und Parameter identifizieren und an eigene Bedarfe anpassen.

Erklär-Videos ansehen
Zu den meisten digitalen Werkzeugen gibt es Erklär-Videos (sogenannte Screencasts) zu Eingabemöglichkeiten und Vorgehensweisen zum Erreichen spezifischer Ziele mit dem jeweiligen Werkzeug. Die kurzen Erklär-Videos, bei denen man bei der Nutzung des digitalen Werkzeugs zusehen kann, findet man in strukturierten Sammlungen[1], über Suchmaschinen oder auf Videoplattformen.

Fehlermeldungen erfassen
Oft werden Fehlermeldungen des digitalen Werkzeugs schnell „weggeklickt“. Ein produktiver Umgang damit bedeutet, diese zu erfassen, sie zu interpretieren und zur Planung einer veränderten Vorgehensweise zu nutzen.

Mit anderen Nutzern kooperieren
Die Fähigkeit zur kompetenten Nutzung eines digitalen Werkzeugs entwickelt sich nicht bei allen Lernenden gleich schnell. Insofern ist das Nachfragen bei Mitschülerinnen und Mitschülern (bzw. im Fachkollegium) eine sehr effiziente Strategie. Man kann auch entsprechende Nutzerforen danach durchsuchen, ob eine analoge Frage bereits beantwortet wurde.

Bei größeren Problemen oder solchen, die durch Peer-Unterstützung nicht gelöst werden können, kann die Frage an die Lehr- bzw. Fachperson gestellt werden (z. B. mittels Posten von Fragen in Nutzerforen).

Spezifische Grundideen erfassen
Hier seien nur einzelne Beispiele genannt: Bei dynamischen Geometrie-Systemen wesentlich ist die Unterscheidung in freie, gebundene (etwa an eine Linie) und abhängige Punkte (z. B. Schnittpunkte). Darüber hinaus sollten bei jeder Konstruktion alle neuen Objekte aus den bisher vorhandenen konstruierbar sein und keine neuen freien Punkte erzeugt werden.

Bei Tabellenkalkulationsprogrammen ist es zentral, zwischen absoluten (es wird immer dieselbe Zelle adressiert) und relativen Zellbezügen (es wird die Zelle adressiert, die relativ zur aktuellen Zelle die gleiche Position hat) zu unterscheiden.

Bei Computer-Algebra-Systemen ist zu klären, welche Rolle die genutzte Variable (Unbekannte, Veränderliche, allgemeine Zahl) spielt.

Es kann hilfreich sein, Lernende darauf hinzuweisen, dass Strategien, die sie im Alltag bei digitalen Werkzeugen zur Erarbeitung von Bedienfähigkeiten anwenden, auch im Mathematikunterricht genutzt werden können.

Problemlösestrategien

Der erste Schritt eines jeden Problemlöseweges, ist das Verstehen des Problems. Dies sollte, auch wenn digitale Werkzeuge verfügbar sind, für Lernende an erster Stelle stehen. Im weiteren Lösungsweg können digitale Werkzeuge einzelne mathematische, kognitive Problemlösestrategien (vgl. u. a. den Basisartikel in diesem Heft) gezielt unterstützen.

Problem erfassen und verstehen
Das Verstehen des Problems sollte zunächst im Kopf, gegebenenfalls mit Papier und Bleistift oder – wie im Beispiel des optimalen Papierfaltens – mit einer realen Handlung verbunden, erfolgen. Zum Verstehen kann eine erste, auch intuitive Einschätzung für die Lösung oder eine Vorhersage gehören, das Hineinsehen von Veränderungen in die Situation, bei dem man ein Bild im Kopf dynamisiert und so „beweglich“ denkt, um die Situation zu erfassen. Geht man dann über zum digitalen Werkzeug, können die vorherigen Überlegungen mithilfe des digitalen Werkzeugs getestet werden.

Informative Figur anfertigen
Nachkonstruieren einer bestimmten Situation basiert stets auf der Analyse der

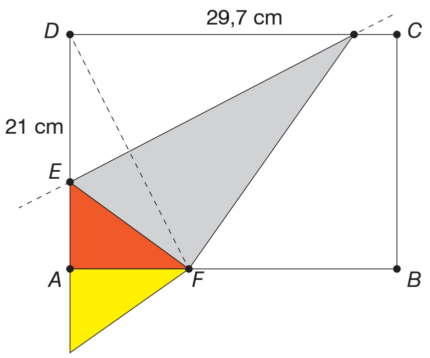


Abb. 1: Lösung als Suche des flächengrößten Dreiecks bei gegebenem Umfang

gegebenen Zusammenhänge und Abhängigkeiten. Wenn dies korrekt geschieht, bietet die mit dem digitalen Werkzeug realisierte Konfiguration den Vorteil der Dynamisierung, also den Zugriff auf viele Beispiele.

Im Beispiel kann die Dynamisierung helfen, eine geometrische Lösung zu „sehen“ und den Spezialfall des „halben gleichseitigen Dreiecks“ als Lösung zu erkennen (**Abb. 1**). Die Begründung kann lauten, dass bei Spiegelung des (roten) Dreiecks an der unteren Blattkante ein Dreieck mit Umfang 42 cm entsteht (gelbes und rotes Dreieck zusammen). Das neue Dreieck hat im Fall der Gleichseitigkeit maximalen Flächeninhalt.

Die Dynamik der Visualisierung bietet den Vorteil, dass Ideen und Vermutungen schneller kontrolliert werden können. Der Fokus bleibt stärker auf Strategien, da man das konkrete Ausführen von Rechnungen und Zeichnungen auslagern kann.

Beispiele systematisch erzeugen

Zahlenbeispiele und Berechnungen können mit einem Tabellenkalkulationsprogramm schnell generiert und auf strukturgleiche Fälle übertragen werden. Das hat im Beispiel den großen Vorteil, dass man nicht nur einzelne Werte für die Höhe h eingeben und den zugehörigen Flächeninhalt berechnen, sondern diese Rechnungen auch schnell auf systematisch erzeugte Werte für h übertragen kann. Danach kann die Darstellung hin zum Punkt-Plot im Graphen leicht gewechselt und am Graphen schon erste Vermutungen zur optimalen Höhe h generiert werden.

Im Sinne einer systematischen Variation (vgl. Vollrath/Roth 2012, S. 239), bei der eine Variable systematisch verändert wird, können dann auch Grenz- und Extremfälle bewusst angesteuert und untersucht werden. Im Beispiel sind es die Extremfälle für $g = 0$ und $h = 0$, die beide zu $A = 0$ führen, und zudem die Erkenntnis vertiefen, dass es offenbar zwischen diesen Nullpunkten einen maximalen Wert geben muss.

Zwischen Darstellungen wechseln

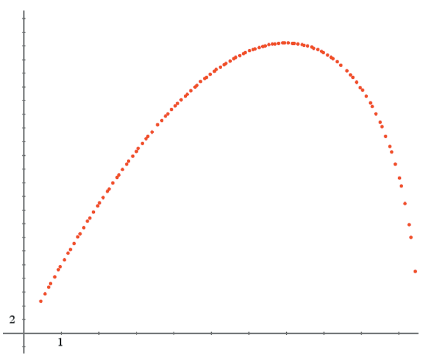
Bei den genannten Problemlösestrategien wurde gezielt die Visualisierung mit einer Skizze bzw. Konstruktion oder das Anlegen einer Tabelle angesteuert. Jedoch bieten auch die anderen Darstellungswechsel in jeglicher Richtung hilfreiche Hinweise für die Lösung und deren Begründung. Dabei ist an den beliebigen Wechsel zwischen Term, Tabelle, Graph und gegebenenfalls einem die Situation beschreibenden Text oder Bild gedacht. Das Erfassen der Wechselwirkung zwischen den Darstellungen kann eine wichtige Basis der Erkenntnis sein (**Abb. 2**). Dabei ist auch – spätestens während der abschließenden Reflexion – gerade der Vergleich der Vorteile und Grenzen der einzelnen Darstellungen wertvoll, um strategisch mit Darstellungswechseln zu operieren. Im Beispiel birgt die analytische Lösung gleichzeitig die Begründung, dass es nur genau diese eine Lösung gibt (**Abb. 2c**).

Reflexionsstrategien

Soll der Einsatz digitaler Werkzeuge zielführend sein und Erkenntnisgewinn bieten, ist es wesentlich über die Ausgaben des digitalen Werkzeugs zu reflektieren. Dabei können folgende Strategien hilfreich sein, die auch als reflexionsunterstützende Impulse durch die Lehrperson genutzt werden können.

Kann das Ergebnis stimmen?

Beim Arbeiten mit einem digitalen Werkzeug bedeutet das Prüfen des Ergebnisses, die Ausgabe des Rechners in Relation zur Situation zu setzen, die bearbeitet werden sollte. Passt das Ergebnis zu meinen Erwartungen, die Größenordnung der Lösung zur Problemstellung, der numerische Wert zur theoretischen Überlegung? Aufgaben, die allein die Beurteilung gegebener Ergebnisse zu einer Aufgabe beinhalten, können hier den kritischen Blick schulen.



a)

	A grundseite	B hoehe	C flaechenin...
=	=capture('g,1	=capture('h,1)	=capture('a,1)
1	8.27331	8.87029	36.6934
2	9.50084	8.35081	39.6699
3	9.72777	8.24692	40.1121
4	10.0586	8.09107	40.6923
5	10.2732	7.98718	41.0269
6	10.587	7.83133	41.4551
7	10.7911	7.72744	41.6937
8	11.0902	7.57159	41.9853
9	11.2852	7.46769	42.1374
10	11.5716	7.31185	42.305
11	11.7587	7.20795	42.3779
12	12.0338	7.05211	42.4317
13	12.2137	6.94821	42.4318
14	12.0338	7.05211	42.4317
15	12.2137	6.94821	42.4318

b)

$h+l=21$	$h+l=21$
$l=21-h$	$l=21-h$
$(21-h)^2-h^2=g^2$	$441-42\cdot h=g^2$
$\sqrt{441-42\cdot h} \rightarrow g(h)$	*Fertig*
$\frac{g(h)\cdot h}{2} \rightarrow a(h)$	*Fertig*
$\frac{d}{dh}(a(h))$	$\frac{\sqrt{-21\cdot(2\cdot h-21)}}{2}-\frac{h\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{21-2\cdot h}}$
$\frac{d}{dh}(a(h)) \rightarrow a1(h)$	*Fertig*
$\text{solve}(a1(h)=0,h)$	$h=7$

c)

Abb. 2: In jeder Darstellung ist die Lösung erkennbar

Gleichzeitig rundet die Kontrolle den Lösungsprozess ab. Im Beispiel kann es das Verifizieren der Lösung am realen Blatt Papier sein.

Passt die Ausgabe zur Eingabe?

Die mit einer bestimmten Intention (z. B. in einer Gleichung einen Summanden 2 „auf die andere Seite bringen“) durchgeführten Eingaben (z. B. die Gleichung auf beiden Seiten durch 2 teilen) müssen nicht zwingend mathematisch zielführend gewesen sein. Wenn die Ausgabe nicht erwartungskonform ist, dann liegt das oft an der falschen (bzw. nicht zielführenden) Eingabe.

Repräsentationen verknüpfen

Bietet das digitale Werkzeug verschiedene Repräsentationen an, sollte man sich die Situation in verschiedenen Darstellungen ausgeben lassen und diese vergleichend analysieren. So kann man einerseits die Situation besser durchschauen, und andererseits die verschiedenen Repräsentationen durch Rückgriff auf bereits vertraute in ihrer Aussage verstehen.

Fokussierungshilfen nutzen

Fokussierungshilfen lassen sich zum Beispiel durch Farbgebung, Linienstärken, Mitführen von Messwerten, unterstützende Hilfslinien und Ähnliches geben. Sie lenken die Aufmerksamkeit und helfen so, die wesentlichen mathematischen Aspekte und Zusammenhänge bei der Verknüpfung verschiedener Darstellungsformen im Blick zu behalten und wechselseitig interpretieren zu können. Dadurch ist es einfacher, sich auf Analyse- und Argumentationsprozesse zu konzentrieren.

Mit Modulen arbeiten

Module fassen mehrere Rechen- oder Konstruktionsschritte in einem Befehl zusammen. Um Problemlöseprozesse besser durchschauen und ggf. strukturiert anwenden zu können, kann es sinnvoll sein, mehrere Lösungs- bzw. Prozessschritte zu Modulen zu bündeln (im Beispiel etwa: „Spiegeln“ des kleinen Dreiecks mit einem Klick). Man kann solche Module aus eigenen Lösungsschritten selbst zusammensetzen, und so die im digitalen Werkzeug eingebaute Module besser durchschauen.

Schlussgedanke

Das Vorhandensein digitaler Werkzeuge allein verändert den Unterricht nicht. Der Einsatz muss bewusst an eine adäquate Gestaltung von Aufgaben und des Unterrichts durch die Lehrperson gekoppelt sein. Ebenso bedeutsam ist aber auch die Nutzung digitaler Werkzeuge durch die Lernenden, die alle in die Pflicht genommen werden sollten, sinnvoll und strategisch mit digitalen Werkzeugen umzugehen. So lassen sich Selbstwirksamkeit und -verantwortung der Lernenden stärken. Indem mögliche Strategien beim Umgang mit digitalen Werkzeugen bewusst gemacht und von den Lernenden in Portfolios selbstständig festgehalten werden, kann das Lernen intensiver und weniger oberflächlich werden.

Anmerkung

1 Solche Sammlungen findet man z. B. unter http://geogebra-rlp.zum.de/wiki/Lehr-_und_Lernvideos und https://youtube.com/results?search_query=Excel

Literatur

KMK (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.12.2012. Bonn: KMK, S. 12f.

Biehler, R./Prömmel, A./Hofmann, T. (2007): Optimales Papierfalten – Ein Beispiel zum Thema „Funktionen und Daten“. – In: Der Mathematikunterricht, Heft 3. Friedrich Verlag, Seelze S. 23–32.

Murdock, J./Kaminski, E./Kaminske, E. (2004): Discovering Advanced Algebra. An Investigative Approach. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Vollrath, H.-J./Roth, J. (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.