

Jürgen Roth

Vernetzen als durchgängiges Prinzip – Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Vernetzung spielt im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle, wenn es etwa darum geht Beziehungen zwischen Inhaltsbereichen zu erfassen oder herzustellen und gelerntes Wissen sowie erarbeitete Fähigkeiten anzuwenden. Im Mathematik-Labor der Universität Koblenz-Landau (www.mathe-labor.de) können Schulklassen an anhand von enaktiv nutzbaren Materialien, Videos und Computersimulationen die mathematischen Strukturen von Phänomenen erforschen. Dabei werden Vernetzungen auf verschiedensten Ebenen (Medien, Lernorte, Nutzergruppen, Zugangsweisen, Lehre-Forschung-Praxis u.a.) umgesetzt bzw. angestoßen.

Schlüsselwörter: Vernetzung, Schülerlabore Mathematik, forschendes Lernen, Lernumgebungen

1 Vernetzen – Beziehungen bewusst herstellen oder suchen

Für die Mathematik als die Wissenschaft von Mustern (vgl. Devlin 1998, S. 3-4) und Strukturen ist es charakteristisch, dass sie nach Beziehungen zwischen Phänomenen sucht oder diese bewusst herstellt. Wenn der Mathematikunterricht ein authentisches Bild von Mathematik vermitteln will (vgl. Vollrath und Roth, 2012, S. 24ff), muss er folglich in allen Schulstufen und Schulformen in diesem Sinn vernetzen. Daneben ist es für den Lernerfolg wesentlich, Beziehungen zwischen den verschiedenen Inhaltsbereichen zu erfassen oder herzustellen und gelerntes Wissen sowie erarbeitete Fähigkeiten anzuwenden. Darüber hinaus ist es beim Verständnisaufbau vorteilhaft, wenn Beziehungen zwischen Phänomenen, Darstellungen, Begriffen, Konzepten, Kontexten u.a. hergestellt oder zumindest gezielt gesucht werden. Ein geeigneter, vernetzter Medieneinsatz von enaktiv nutzbaren Materialien, Simulationen auf der Basis von dynamischen Mathematiksystemen und ggf. Videos kann die Entwicklung des Verständnisses der mathematischen Grundlagen von Phänomenen unterstützen. Wenn Schüler/innen an Lernumgebungen, die diese Aspekte berücksichtigen, in Gruppen forschend lernen, fördert dies – auch durch die Vernetzung der individuellen Perspektiven und Fähigkeiten – den Erkenntnisgewinn nachhaltig. Es ist zum Teil mit einigem Aufwand verbunden solche Vernetzungen im Unterricht umzusetzen. Dazu sind geeignete Unterrichtskonzepte, die Verfügbarkeit adäquater Medien und Materialien sowie strukturelle Rahmenbedingungen notwendig. Dies kann Lehrkräfte vor große Herausforderungen stellen. Im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ am Institut für Mathematik der Universität Koblenz-Landau, das als Schülerlabor Mathematik konzipiert ist, wird dieses Vernetzen in vielfältiger Weise angeregt und umgesetzt. Zur Einordnung des Begriffs „Schülerlabor Mathematik“ sei auf eine von Baum, Roth & Oechsler (2013, S. 9) angegebene Definition verwiesen:

„Schülerlabore Mathematik (SLM) sind außerschulische Lernstandorte mit vorstrukturierten, regelmäßig einsetzbaren Lernumgebungen in festen Räumen, in denen Schüler/innen unter expliziter Zielsetzung selbstständig, handlungsorientiert und experimentell mathematische Grundlagen und Zusammenhänge an Phänomenen in einem begrenzten Zeitrahmen entdecken, erarbeiten und durchdringen können, ohne dabei dem für den Lernort Schule typischen Leistungsdruck zu unterliegen.“ (Baum et al., 2013, S. 9)

Um die Arbeit im Schülerlabor sinnvoll mit dem schulischen Unterricht zu vernetzen, arbeiten die Schüler/innen in den Labor-Lernumgebungen an Lehrplanthemen. Lehrkräfte werden durch Anregungen und Materialien dabei unterstützt, die Laborarbeit über geeignete Vor- und Nachbereitung organisch in den Unterricht zu integrieren. Während ihren Klassen im Mathematik-Labor arbeiten, können Lehrkräfte ihre Schüler/innen bei der Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen beobachten. Dies ermöglicht es ihnen sich einerseits mit vernetzenden Lernumgebungen vertraut zu machen und eröffnet ihnen andererseits den Freiraum, sich diagnostisch mit den Arbeits- und Denkweisen ihrer Schüler/innen auseinandersetzen. In analoger Weise wird das Mathematik-Labor in Landau auch genutzt um in speziellen Pflichtseminaren für Lehramtsstudierende im Master of Education Mathematik fachmathematische, fachdidaktische und bildungswissenschaftliche Ausbildungsanteile der Studierenden praxisbezogen zu vernetzen. Lehramtsstudierende entwickeln hier praxisrelevante Lernumgebungen für das Mathematik-Labor, vertiefen ihre diagnostischen Fähigkeiten bei der Durchführung der Laborstationen mit Schüler/innen und erhalten darüber hinaus Einblicke in qualitative und

quantitative Methoden der fachdidaktischen Forschung. Am Beispiel der Laborstation „Mathematik und Kunst“ des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ wird exemplarisch ein fächerverbindender Aspekten und damit eine weitere Vernetzungsmöglichkeit aufgezeigt. Wesentlich an Schülerlaboren ist auch, dass sie ideale Forschungsrahmenbedingungen ermöglichen. Hier kann es gelingen Didaktiker/innen, Bildungswissenschaftler/innen, Lehrer/innen, Fachleiter/innen, Studierende und Schüler/innen zusammenzubringen – also zu vernetzen – um die empirische Unterrichtsentwicklungsforschung gemeinsam voranzutreiben. Im klar umrissenen Rahmen der Laborarbeit an fachdidaktisch gestalteten Lernarrangements bietet sich die Möglichkeit die vielfältigen Beziehungen zwischen verschiedenen Aspekten von Lernprozessen zueinander in Beziehung zu setzen und gezielt zu erforschen. Diese Vernetzungen auf ganz verschiedenen Ebenen im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ werden im Folgenden anhand von Beispielen exemplarisch erläutert.

2 Das Konzept des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ – Vernetzende Lernumgebungen zum forschenden Lernen

Im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ sollen Schüler/inne/n authentische Erfahrungen mit der Mathematik ermöglicht werden, indem sie sich anhand von Arbeitsaufträgen selbständig forschend mit enaktiv nutzbaren Materialien und Simulationen auseinandersetzen. Sie arbeiten also im Sinne des forschenden Lernens.

2.1 Forschendes Lernen

Roth und Weigand 2014 erläutern ein Modell des forschenden Lernens (vgl. Abbildung 1). In diesem Modell lässt sich der Prozess des forschenden Lernens durch drei untereinander vernetzte Phasen beschreiben, die durch die Konfrontation von Lernenden mit einem für sie subjektiv neuen mathematischen Phänomen angestoßen werden.

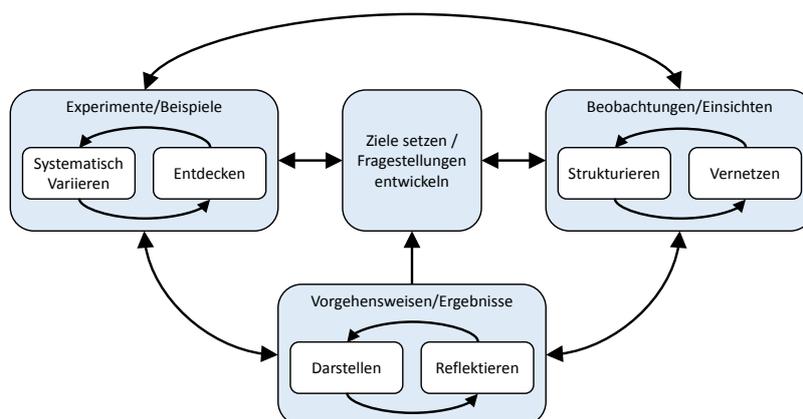


Abbildung 1: Modell des forschenden Lernens (vgl. Roth & Weigand 2014)

Voraussetzung dafür ist, dass sich Lernende bzgl. der Durchdringung dieses Phänomens *Ziele setzen und Fragestellungen entwickeln* oder sich zumindest auf von außen gesetzte Ziele und Fragestellungen einlassen. Diese Fragestellungen lassen sich anhand von Experimenten bzw. Beispielen untersuchen. Dazu werden die *Experimente bzw. Beispiele systematisch variiert* und die dabei auftretenden Phänomene genau beobachtet. Dies kann dazu führen, dass die Schüler/innen für sie *subjektiv Neues entdecken*. Zur genaueren Untersuchung dieser entdeckten Phänomene können weitere systematische Variationen im Experiment bzw. Beispiel hilfreich sein. Diese Phase ist eng verknüpft mit der Phase in der gewonnenen *Beobachtungen bzw. Einsichten* im Sinne der Mathematik als der Wissenschaft von Mustern und Strukturen bewusst *strukturiert* werden. Dabei werden Beziehungen zwischen den Beobachtungen untersucht und zugrunde liegende Muster herausgearbeitet. Dieses Strukturieren innerhalb der Beobachtungen und Einsichten kann dazu führen, dass die hier gemachten Erfahrungen *mit dem Vorwissen* in Beziehung gesetzt, also *vernetzt* werden. Diese Vernetzung ist wesentlich für den Lernprozess und kann wieder dazu führen, die gemachten Beobachtungen und gewonnenen Einsichten noch einmal neu aus der Perspektive der Vorerfahrungen und des Vorwissens zu strukturieren. Forschendes Lernen kann nur dann gewinnbringend sein, wenn diese beiden Phasen übergehen in die Phase, in der die *Vorgehensweisen und Ergebnisse dargestellt* werden. Erst auf der Basis von mit adäquaten externen Repräsentationen festgehaltenen Ergebnissen ist eine fundierte Reflexion möglich, die ggf. zu einer verbesserten

bzw. veränderten Darstellung führt. Für das Weiterarbeiten mit dem Gelernten ist es notwendig, dass in dieser Phase nicht nur Ergebnisse sondern auch Vorgehensweisen festgehalten werden. Nur so kann das forschend Erarbeitete verständnisbasiert weiterverwendet werden und bleibt zugänglich. Ohne dieses *Darstellen und Reflektieren der Ergebnisse und Vorgehensweisen* werden die oben genannten Tätigkeiten im Rahmen des forschenden Lernens oft ohne Lernwirkung bleiben. Darüber hinaus stößt es ggf. die anderen Phasen des forschenden Lernens neu und vertieft an. Alle Phasen des forschenden Lernens können direkt dazu führen, dass sich die Schüler/innen neue Ziele oder zumindest leicht variierte Zwischenziele setzen. Auf diese Weise wird der Prozess des forschenden Lernens im Sinne eines Regelkreises von den Lernenden selbstbestimmt vorangetrieben.

2.2 Vernetzende Lernumgebungen zum forschenden Lernen

Wie aus der Beschreibung im Abschnitt 2.1 deutlich wird, muss die Fähigkeit zum forschenden Lernen bei Schüler/innen zunächst entwickelt werden. Dazu benötigen sie Unterstützung, die im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ durch die Gestaltung der Labor-Lernumgebungen erfolgt, die nach festen Prinzipien gestaltet sind (vgl. Roth, 2013). Die Schüler/innen arbeiten grundsätzlich in Vierergruppen selbständig an schriftlichen Arbeitsaufträgen. Sie setzen sich dabei mit Materialien, gegenständlichen Modellen, Simulationen und ggf. Videos auseinander, rufen bei Bedarf die zur Verfügung gestellten Hilfestellungen ab, kommunizieren in der Gruppe über ihre Beobachtungen, strukturieren und dokumentieren ihre Arbeitsprozesse sowie -ergebnisse und reflektieren diese.

Die Schüler/innen arbeiten in anhand von Arbeitsheften, die Aufgabenstellungen umfassen und gleichzeitig als individuelle Laborprotokolle dienen, in die Ergebnisse und Vorgehensweisen eingetragen werden (vgl. Abbildung 2). Deren Darstellung und die notwendigen Reflexionen werden im Arbeitsheft explizit eingefordert.



Abbildung 2: Schülergruppe im Mathematik-Labor "Mathe ist mehr"

Im Projekt „ProLab – Protokollieren im Labor“, an dem das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ und die Nawi-Werkstatt in Landau beteiligt sind, konnten Engl et al. (2014) nachweisen, dass bereits diese Vorgehensweise zu einer Verbesserung der Darstellungskompetenz führt. Wenn Schüler/innen zunächst an einer Station des Mathematik-Labors arbeiten und anschließend in der Nawi-Werkstatt chemische Experimente durchführen, sind sie dort signifikant besser in der Lage ihre Ergebnisse zu protokollieren als Schülerinnen, die vorher das Mathematik-Labor nicht besucht haben.

2.2.1 Selbständig arbeiten – Zugangsweisen vernetzen

Die Schüler/innen arbeiten im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ selbständig anhand von schriftlichen Arbeitsaufträgen. Für eine authentische Erfahrung mit der Mathematik und die Entwicklung einer forschenden Arbeitshaltung ist es wesentlich, dass die Anleitungen nicht durch Lehrpersonen erfolgen. Nur wenn Schüler/innen auf sich selbst gestellt sind, besteht wirklich die Möglichkeit, dass sie sich den Gegenständen selbständig-forschend nähern und sie explorieren. Andernfalls stellt sich schnell die Haltung ein, auf Inputs von Lehrkräften zu warten. Die von Schüler/innen gewünschte Unterstützung durch Betreuer im Mathematik-Labor

muss sich insofern auf Motivations-, Rückmelde- sowie ggf. allgemeinstrategische Hilfen beschränken und sollte keine inhaltlichen Hilfen umfassen. So können die Schüler/innen Eigenverantwortung und Selbstregulation aufbauen und sich in der Gruppe gegenseitig beim Forschen unterstützen. Auf diese Weise haben die Schüler/innen die Chance ihre jeweils eigenen Vorstellungen einzubringen. Dies kann dazu führen, dass die individuellen Zugangsweisen von den anderen Schüler/innen wahrgenommen, diskutiert, untersucht und so produktiv vernetzt werden. Um diese selbständige Arbeit der Schüler/innen zielführend zu gestalten, wird eine Reihe von Maßnahmen umgesetzt.

2.2.2 Vernetzung von Medien und Materialien

Durch das Zusammenwirken und Vernetzen verschiedener Medien ergeben sich wesentliche Impulse für eine schülerzentrierte, eigenständige Erarbeitung von mathematischen Inhalten. Ein geeigneter, individuell verantworteter Einsatz verschiedener Medien kann eine entscheidende Komponente bei Problemlöse- und Forschungsprozessen sein. Im Mathematik-Labor werden auf der Basis des dynamischen Mathematiksystems GeoGebra erzeugte Simulationen, Materialien und gegenständliche Modelle sowie natürlich „Papier und Bleistift“ als Medien eingesetzt. Vereinzelt kommen Videos hinzu, die in der Regel den Einstieg in einen Phänomenbereich beim forschenden Lernen erleichtern sollen. Die Medien stehen als Angebote zur Verfügung. Die Schülerinnen können selbst entscheiden, ob und ggf. welche sie zur Problemlösung nutzen wollen. Es ist ein wesentliches Ziel, dass die Schüler/innen einer Arbeitsgruppe sich über die Phänomene die sie erforschen intensiv austauschen. Aus diesem Grund gibt es für die vier Schüler/innen einer Arbeitsgruppe jeweils nur einen Laptop. Sie müssen also gemeinsam planen und entscheiden, welche Veränderungen an einer Simulation vorgenommen werden und wie die beobachteten Konsequenzen daraus zu interpretieren sind. An der Station „Mathematik und Kunst“, in der es um den Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und das inhaltlich-an anschauliche Arbeiten mit Brüchen geht (vgl. Schumacher & Roth, 2013) wird z. B. mit geometrischen Strukturen von Kunstwerken der konkreten Kunst und Puzzles dieser Kunstwerke (vgl. Abbildung 3) gearbeitet.



Abbildung 3: Links: Max Bill „progression in 5 quadraten“ (Nachkonstruktion: Stefan Schumacher); Rechts: Puzzle des Kunstwerks „komplementär-rotation“ von Max Bill

Enaktiv nutzbare Materialien haben sich als fruchtbar für den experimentellen Zugang zu inhaltlichen Aspekten des betrachteten Phänomens erwiesen. Simulationen spielen ihre Stärken insbesondere dann aus, wenn Schüler/innen Beziehungen zwischen dem betrachteten Phänomen und dem mathematischen Gehalt herausarbeiten. Dazu kann gerade die Möglichkeit zum bewussten Ansteuern von Spezial- oder Grenzfällen beitragen, die mit gegenständlichen Modellen häufig gar nicht oder nur umständlich realisierbar wären. So lassen sich Vermutungen überprüfen, die sich aus dem Arbeiten mit dem enaktiv handhabbaren Material ergeben haben und neue Hypothesen aufstellen. Dabei ist es u. a. hilfreich, dass in Simulationen Fokussierungshilfen (z.B. farbliche oder gestalterische Hervorhebungen wesentlicher Aspekte) realisierbar sind, die ein- und wieder ausgeblendet werden können. Manchmal ist eine Simulation aber auch notwendig, wenn ein verstehensbasierter Prozess mit Materialien auf die Dauer sehr aufwändig oder nur für spezielle Fälle durchführbar ist. Hier können

Simulationen dazu beitragen, das Wesentliche eines Phänomens durch systematisches Variieren des Beispiels zu erfassen. Ein Grundverständnis zur Addition von ungleichnamigen Brüchen lässt sich etwa mit Faltquadraten erarbeiten (vgl. Abbildung 4). Das Falten für verschiedenste Zahlenwerte ist allerdings nicht praktikabel.

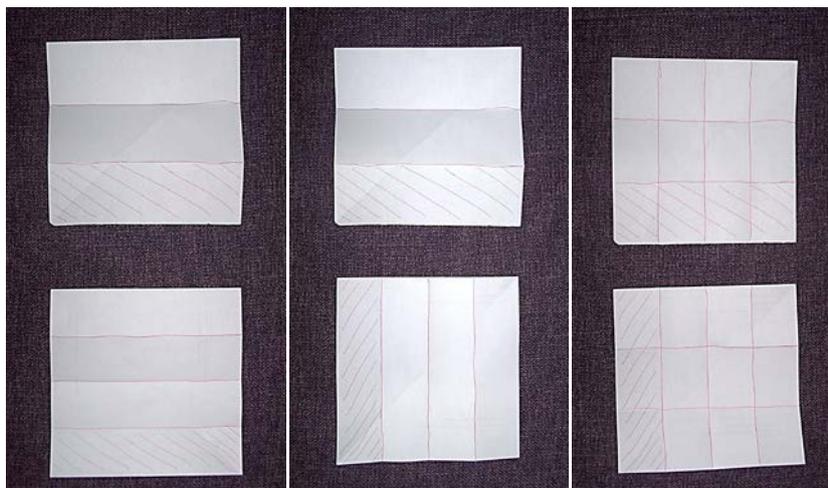


Abbildung 4: Brüche mit Hilfe von Faltquadraten addieren

Hier setzt der Nutzen der Simulation ein. Es können nahezu beliebige Brüche realisiert werden und die Grundidee des Verfeinerns der Unterteilung bis eine gemeinsame Einteilung bei beiden Brüchen vorliegt, lässt sich gut erarbeiten (vgl. Abbildung 5). Die Beziehung zwischen diesem qualitativen Grundverständnis und der „quantitativen“ Darstellung der Bruchzahlen und ihrer Erweiterungen steht hier durchgängig im Mittelpunkt. Die Grundidee muss bei jeder konkreten Bearbeitung wieder umgesetzt, auf diese Weise wiederholt und so vertieft werden. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit Rückmeldehilfen zu einzelnen Schritten der Bearbeitung direkt in der Simulation zu geben. Durch das Vernetzen des Arbeitens mit enaktiv nutzbaren Materialien und Simulationen können beide Repräsentationsformen ihren jeweiligen Nutzen voll ausspielen.

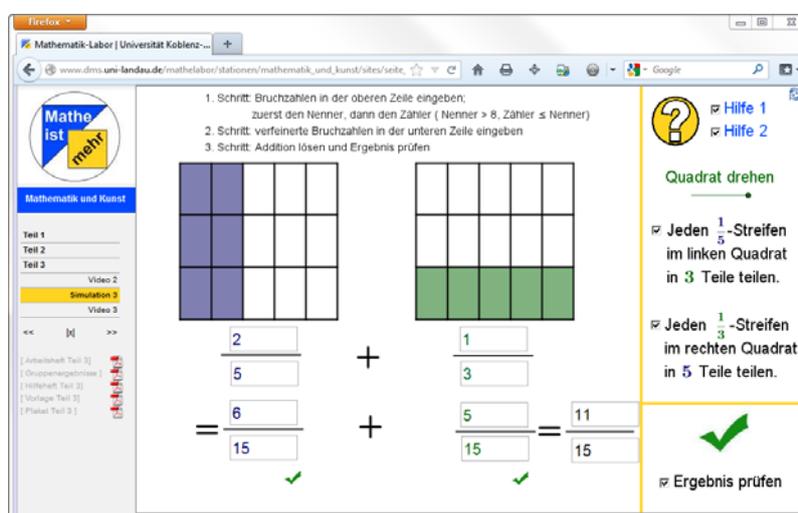


Abbildung 5: Simulation (vgl. Schumacher & Roth, 2013)

Über diese Materialien hinaus ist es notwendig den Prozess des forschenden Lernens auch außerhalb der Simulationen durch abrufbare Hilfen zu unterstützen. Dazu liegen in jeder Laborlernerumgebung Hilfehefte bereit, die bei Bedarf von den Schülerinnen und Schülern genutzt werden können. Sie bieten gestufte Hilfen bestehend aus weiterführenden Fragen, Anregungen zum Weiterfragen bzw. Informationen zu evtl. fehlendem Grundwissen. Neben der regelmäßigen Aufforderung in den individuellen Arbeitsheften, Vorhersagen zu treffen und diese Vorhersagen am Experiment zu überprüfen, gibt auch ein gemeinsames Heft „Gruppenergebnisse“. Jeweils nach erarbeiteten Sinnabschnitten werden die Schüler/innen aufgefordert, sich die Ergebnisse und Vorgehensweisen gegenseitig in der Gruppe zu erklären und gemeinsam im Heft „Gruppenergebnisse“ festzuhalten. Dieses Heft wird eingescannt und steht den Schüler/innen für das Weiterarbeiten im schulischen

Mathematikunterricht zur Verfügung. Es ist damit gleichzeitig ein Instrument um die verschiedenen Perspektiven der Schüler/innen der Gruppe auf das untersuchte Phänomen zu berücksichtigen und so zu vernetzen, dient der rückblickenden Reflexion der Vorgehensweisen in der und Ergebnisse der Laborarbeit und stellt ein erstes Element zur Vernetzung der Lernorte dar.

2.2.3 Lernorte vernetzen

Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ setzt auf Breitenförderung in Mathematik. Um dies zu erreichen und im Sinne der Unterrichtsentwicklung zu wirken, werden alle Materialien zu den Laborstationen über die Internetseite des Labors über www.mathe-labor.de zur Verfügung gestellt. Dort sind nicht nur alle Arbeits- und Hilfehefte abrufbar, sondern auch die „Gruppenergebnisse“, Simulationen und Materiallisten. Auf diese Weise ist es für Lehrkräfte möglich, Ideen aus dem Mathematik-Labor auch direkt im Unterricht umzusetzen und ggf. an die Klassensituation und die eigene Unterrichtsgestaltung anzupassen. Schüler/innen können nach einem Besuch des Mathematik-Labors alle Materialien auch zuhause nutzen, etwa zum Nacharbeiten und Wiederholen. Darüber hinaus werden den Lehrkräften, die das Mathematik-Labor mit ihren Klassen besuchen, über diese Seite Informationen zum Konzept des Mathematik-Labors, zu den Zielen jeder Laborstation und zum notwendigen Vorwissen der Schüler/innen für eine gewinnbringende Nutzung der jeweiligen Laborstation zur Verfügung gestellt. Darüber hinaus gibt es bei den einzelnen Stationen Materialangebote und Hinweise zur Weiterarbeit am Thema im Unterricht und zum Teil auch Aufgaben, die im Sinne der Diagnose der im Mathematik-Labor von ihren Schüler/innen erreichten Lernergebnisse eingesetzt werden können. In Vorgesprächen werden diese Materialien jeweils vorgestellt und mit den begleitenden Lehrkräften diskutiert. Diese Vernetzung der Arbeit im Schülerlabor mit dem schulischen Mathematikunterricht ist uns besonders wichtig, weil Untersuchungen aus anderen Schülerlaboren gezeigt haben (vgl. etwa Schmidt et al., 2011), dass Schülerlaborarbeit nur so effektiv ist, wie die Vor- und Nachbereitung im Unterricht. Eher negative empirische Befunde zur Lernwirksamkeit sind gerade auch auf mangelnde Einbindung in den Unterricht zurückzuführen. Eigene Vergleichsuntersuchungen zeigen dagegen: Schüler/innen, die im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ ein Inhaltsgebiet des Lehrplans selbständig forschend bearbeitet haben, zeigen eine mindestens genauso große inhaltliche Leistungsentwicklung bei diesem Thema, wie Schüler/innen, die im schulischen Mathematikunterricht, im selben Zeitumfang und zum selben Thema eher lehrerzentriert durch die eigene Lehrkraft unterrichtet werden (Dexheimer, 2012, S. 64; Schumacher & Roth, 2013). Wenn man bedenkt, dass die Schüler/innen im Mathematik-Labor eine für sie ganz neue Lernumgebung vorfinden und hier neben dem Lernen der Fachinhalte eine ganze Reihe von Prozesskompetenzen angestoßen und (weiter-)entwickelt werden, ist dies als ermutigendes Ergebnis zu werten. Es zeigt, dass der eingeschlagene Weg in die richtige Richtung führt.

2.2.4 Vernetzen durch fächerübergreifendes Arbeiten

Im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ ist es vergleichsweise einfach fächerübergreifend zu arbeiten. Es stehen Laptops sowie sonstige Arbeitsmaterialien griffbereit zur Verfügung. Die Stationen und sämtliche zugehörigen Materialien werden in mehrstufigen Prozessen zusammen mit Lehramtsstudierenden entwickelt. Der hier realisierte hohe Aufwand lässt sich so in der Schule von einer einzelnen Lehrkraft manchmal gar nicht leisten. Auch aus diesem Grund können ausgearbeiteten Stationen des Mathematik-Labors als Vor- bzw. Grundlagen für den eigenen Unterricht von Lehrkräften genutzt und angepasst werden. Dazu werden die Arbeitsmaterialien (z. B. Arbeits- und Hilfehefte, Gruppenergebnisse) der Laborstationen als veränderbare Word-Dateien auf der Homepage des Mathematik-Labors unter www.mathe-labor.de zur Verfügung gestellt.

Inhaltlich ist fächerübergreifendes Arbeiten nur dann gerechtfertigt, wenn alle beteiligten Fächer davon profitieren. Die Auseinandersetzung mit der Station „Mathematik und Kunst“ des Mathematik-Labors (vgl. Schumacher & Roth, 2013) ist sowohl für das Fach Mathematik als auch für das Fach Kunst gewinnbringend. Dies liegt insbesondere daran, dass hier Kunstwerke der Konkreten Kunst betrachtet werden. Künstler dieser Kunstrichtung, wie etwa Max Bill, sind der Auffassung, „es sei möglich, eine Kunst weitgehend aufgrund einer mathematischen Denkweise zu entwickeln.“ (Bill 1977) In der konkreten Kunst werden also mathematische Strukturen mit künstlerischen Mitteln visualisiert und den Künstlern ist es darüber hinaus wichtig, dass der Betrachter die mathematischen Konstruktionsprinzipien wieder erschließen kann. Insofern kann hier die Mathematik einen Beitrag dazu leisten, einerseits die im Kunstunterricht angestrebte Kompetenz zur Analyse der Gestaltungselemente eines Kunstwerks zu unterstützen und andererseits selbst Kunstwerke im Stile der konkreten Kunst nach mathematischen Gestaltungsprinzipien zu entwickeln. Auch die Mathematik kann hier in vielfältiger Weise profitieren. Einerseits wird ein produktives Üben mit Hilfe von nach mathematischen

Gestaltungsregeln selbst gestalteten Kunstwerken möglich, andererseits lassen sich anhand von Kunstwerken der „konkreten Kunst“ u. a. folgende Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff und der Bruchrechnung selbstständig durch Schüler/innen im Flächenmodell erarbeiten: Teil eines Ganzen; Teil mehrerer Ganzer; Quasikardinalzahlaspekt; Anschauliche Größenvergleiche; Verfeinern von Brüchen; inhaltlich-anschauliche Addition von Brüchen. Beide genannten Aspekte werden im Folgenden an zwei Beispielen aus der Station skizziert.

Das Kunstwerk „progression in fünf quadraten“ von Max Bill (vgl. Abbildung 3, links) besteht z. B. aus fünf übereinander angeordneten Quadrate, die nach unten hin immer feiner unterteilt werden. Anhand dieser Struktur des Kunstwerks sammeln Schüler/innen im Rahmen der Laborarbeit erste Erfahrungen zu Bruchzahlen. Diese wird durch „Kunstwerk-Puzzles“ unterstützt, die zu jedem eingesetzten Kunstwerk zur Verfügung stehen. So kann z. B. die Grundvorstellung „Teil eines Ganzen“ durch das gleichmäßige Zerlegen in bzw. Auslegen mit entsprechenden Puzzleteilen an konkreten Beispielen handelnd erschlossen und die dabei gemachten Beobachtungen strukturiert werden.

Zum Abschluss der Laborarbeit, können die Schüler/innen ihr bisher erworbenes Wissen über Bruchzahlen und die Bruchrechnung produktiv einsetzen um eigene Kunstwerke nach mathematischen Gestaltungsprinzipien zu entwerfen. Dabei wird indirekt neues Wissen über Bruchzahlen generiert, sowie vorhandenes Wissen gefestigt. Als Ideenlieferant dient hier eine „Kunstwerkreihe“ von Max Bill mit dem Titel „ $8 \left(2 \frac{4}{4}\right) = 8$ “ (vgl. Abbildung 8).

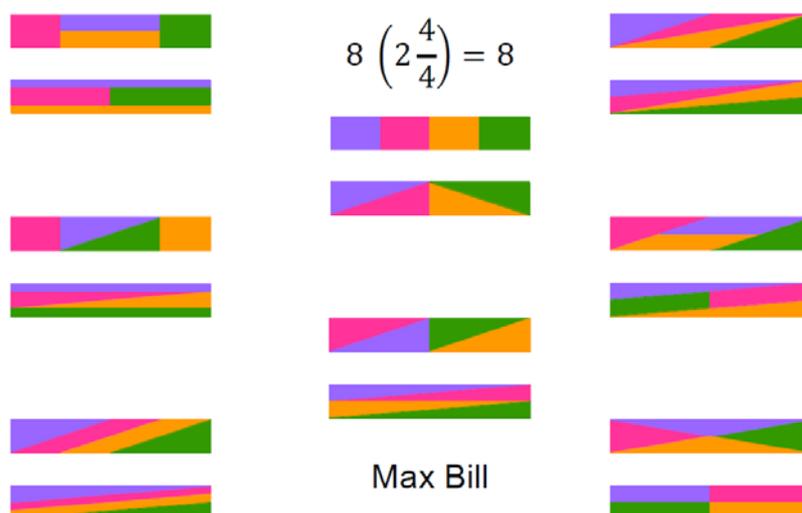


Abbildung 6: Kunstwerkreihe von Max Bill mit dem Titel „ $8 \left(2 \frac{4}{4}\right) = 8$ “
(Nachkonstruktion von Stefan Schumacher)

Diese Reihe besteht aus acht Kunstwerken, die jeweils aus zwei deckungsgleichen Rechtecken bestehen. Auf die beiden Rechtecke hat Max Bill je vier Farben gleichmäßig verteilt. Dieses Prinzip soll von den Schüler/innen durch das Verteilen von drei Farben auf zwei deckungsgleiche, regelmäßige Sechsecke übertragen werden (vgl. Abbildung 7).

Gestaltungsprinzip

- Als Grundform der Bilder dienen regelmäßige Sechsecke.
- Verteilt drei Farben auf zwei Sechsecke.
- Verwendet dabei von jeder Farbe dieselbe Menge.

Abbildung 7: Offener Arbeitsauftrag zur Gestaltung eines Kunstwerks.

Zu jedem Kunstwerk, fertigen die Schüler/innen ein Poster an, auf dem neben dem Kunstwerk auch das zugrundeliegende mathematische Konzept dargestellt wird. Die so entstandenen Kunstwerke können im Anschluss an den Laborbesuch im Rahmen einer Klassenzimmerversammlung präsentiert werden.

2.3 Forschung, Lehre und Unterrichtspraxis vernetzen

Neben den bereits herausgearbeiteten Vernetzungen wird im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ noch eine weitere Vernetzung realisiert. Als Lehr-Lern-Labor dient es der praxisnahen Ausbildung von Studierenden, der Weiterbildung von Lehrkräften und der Unterrichtsentwicklung im Fach Mathematik. Nicht zuletzt ist das Mathematik-Labor aber auch eine Einrichtung, in der fachdidaktische Entwicklungsforschung vorangetrieben wird. Es ist damit ein Katalysator für Vernetzungen zwischen den im mathematischen Bildungsprozess der Region handelnden Personen. Die Laborstationen werden von Studierenden im Rahmen ihrer Ausbildung konzipiert, umgesetzt mit Schulklassen erprobt und evaluiert. Bei der Erprobung können sie Erfahrungen in der Diagnose von Schülerleistungen und im Umgang mit Schülerfragen sowie Schülerschwierigkeiten gewinnen. Sie kommen ins Gespräch mit den begleitenden Lehrkräften und tauschen sich mit ihnen über Konzeptionen und Praxiserfahrungen aus. Die Kolleg/inn/en aus den Schulen bringen ihre Ideen in die (Weiter-)Entwicklung der Laborstationen ein und bildungswissenschaftliche sowie fachdidaktische Forscher/innen finden ein ideales Forschungsumfeld für empirisch gestützte Unterrichtsentwicklungs- und Lehr-Lern-Prozessforschung. Auf diese Weise profitieren alle Beteiligten jeweils voneinander und lernen sich ganz nebenbei gegenseitig besser kennen. Dies kann dazu beitragen, dass sich alle Akteure mit ihren jeweiligen spezifischen Beiträgen zur Weiterentwicklung von Mathematikunterricht schätzen lernen.

Literatur

- Bill, M. (1977). die mathematische denkweise in der kunst unserer zeit. In E. Hüttinger, *M. Bill*. Zürich. S. 105-116
- Baum, S., Roth, J., & Oechsler, R. (2013). Schülerlabore Mathematik: Außerschulische Lernstandorte zum intentionalen mathematischen Lernen. *MU*, 59(5), 4–11.
- Devlin, K. J. (1998). *Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*. Heidelberg, Berlin: Spektrum, Akad. Verl.
- Dexheimer, M. (2012). *Empirische Untersuchung zur Wirksamkeit einer optimierten Station des Mathematik-Labors* (Masterarbeit). Universität Koblenz-Landau, Landau. Online verfügbar unter http://www.dms.uni-landau.de/roth/za/mathelabor/Dexheimer_Empirische_Untersuchung_zur_Wirksamkeit_einer_optimierten_Station_des_Mathematik_Labors.pdf
- Engl, A., Engl, L., Roth, J., & Risch, B. (2014). Einflüsse auf das Protokollverhalten im Schülerlabor: Eine empirische Vergleichsstudie mit Schülerinnen und Schülern der Orientierungsstufe. Erscheint in *CHEMKON*, 21.
- Roth, J. (2013). Mathematik-Labor "Mathe ist mehr": Forschendes Lernen im Schülerlabor mit dem Mathematikunterricht vernetzen. *MU*, 59(5), 12–20.
- Roth, J., & Oechsler, R. (2013). Forschend Lernen - Lernprozesse fördern. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik ; Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 4.3.2013 bis 8.3.2013 in Münster* (S. 846–849). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.
- Roth, J., & Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht: Eine Annäherung. Erscheint in *mathematik lehren*, (184).
- Schmidt, I., Di Fuccia, D. S., & Ralle, B. (2011). Außerschulische Lernstandorte: Erwartungen, Erfahrungen und Wirkungen aus der Sicht von Lehrkräften und Schulleitungen. *MNU*, 64(6), 362–369.
- Schumacher, S., & Roth, J. (2013). Bruchzahlbegriff und Bruchrechnung - Grundvorstellungen im Schülerlabor erarbeiten. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik ; Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 4.3.2013 bis 8.3.2013 in Münster* (pp. 926–929). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.
- Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Kontakt Daten des Autors

Prof. Dr. Jürgen Roth

Institut für Mathematik

Universität Koblenz-Landau

Fortstraße 7

76829 Landau

E-Mail: roth@uni-landau.de

.tel: [roth.tel](tel:roth.tel)

URL: www.dms.uni-landau.de