Vernetzende Lernumgebungen nutzen – Das Beispiel Gleichdicks

Jürgen Roth

Zusammenfassung. Dieser Artikel basiert auf der Überzeugung des Autors, dass die Nutzung von vernetzenden Lernumgebungen zu einem effektiveren Lernprozess bei mathematischen Inhalten beitragen kann. Dazu wird zunächst diskutiert, was eine vernetzende Lernumgebung ausmacht. Darauf aufbauend wird das Konzept des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ der Universität Landau umrissen, das aus solchen vernetzenden Lernumgebungen besteht und am Beispiel der Laborstation „Gleichdicks“ konkretisiert.

Vernetzende Lernumgebungen!?

Vor der Nutzung von vernetzenden Lernumgebungen ist zunächst die Frage zu klären, was unter diesem Etikett verstanden werden soll. Dies ist schon deshalb nicht ganz leicht, weil sowohl der Begriff „Lernumgebung“ als auch der Begriff „Vernetzung“ in der neueren didaktischen Literatur zwar häufig verwendet, aber nur sehr selten definiert werden. Versuchen wir uns also diesen Begriffen etwas anzunähern.

Lernumgebung

In der Regel wird die Bezeichnung „Lernumgebung“ verwendet, wenn ein zur Unterstützung von Lernprozessen planvoll gestaltetes Gesamtarrangement gemeint ist. Reinmann und Mandl (2006) geben folgende Definition an:

> *„Eine durch Unterricht hergestellte Lernumgebung besteht aus einem Arrangement von Unterrichtsmethoden, Unterrichtstechniken, Lernmaterialien, Medien. Dieses Arrangement ist durch die besondere Qualität der aktuellen Lernsituation in zeitlicher, räumlicher und sozialer Hinsicht charakterisiert und schließt letztlich auch den jeweiligen kulturellen Kontext mit ein.“ (Reinmann und Mandl 2006, S. 615f)*

Eine erfahrene Lehrkraft wird sich nach dieser sehr allgemein gehaltenen Definition fragen, welcher Unterricht nicht als Lernumgebung zu bezeichnen wäre. Aus der Perspektive der Mathematikdidaktik müssen Lernumgebungen, nicht nur aus diesem Grund, einer Reihe von weiteren Aspekten genügen. Wittmann (1998), für den Design und Erforschung von Lernumgebungen den Kern der Mathematikdidaktik darstellen, fordert etwa:

> *„Lernumgebungen bester Qualität, sogenannte substantielle Lernumgebungen, müssen folgenden Kriterien genügen:*

1. Sie müssen zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts repräsentieren.

2. Sie müssen reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten von Schüler/-innen bieten.

3. Sie müssen flexibel sein und leicht an die speziellen Gegebenheiten einer bestimmten Klasse angepasst werden können.

4. Sie müssen mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise integrieren und daher ein weites Potential für empirische Forschungen bieten.“ *(Wittmann 1998, S. 338f)*

Wollring (2009) charakterisiert Lernumgebungen u. a. wie folgt:

„Eine Lernumgebung ist im gewissen Sinne eine natürliche Erweiterung dessen, was man im Mathematikunterricht traditionell eine ‚gute Aufgabe‘ nennt. Eine Lernumgebung ist gewissermaßen eine flexible Aufgabe *oder besser, eine* flexible große Aufgabe. *Sie besteht aus einem* Netzwerk kleinerer Aufgaben, die durch bestimmte Leitgedanken zusammen gebunden werden.“

(Wollring 2009, S. 13, Hervorhebungen im Original)

Es gibt offensichtlich eine ganze Reihe von Perspektiven auf und Anforderungen an Lernumgebungen für den Mathematikunterricht. Entscheidend ist dabei, dass die Lernumgebungen mathematisch fundiert und reichhaltig genug sind, um damit wesentliche Entdeckungen machen und Erkenntnisse gewinnen oder vertiefen zu können. Gute Lernumgebungen regen Schülerinnen und Schüler dazu an, ihr eigenes Handeln zu reflektieren. Dies kann durch das Einfordern von Erklärungen und Beschreibungen des eigenen Tuns (in der Partnerarbeit und im Plenum) und durch geeignete Methoden der Ergebnissicherung unterstützt werden. Daneben müssen Lernumgebungen eine Binnendifferenzierung ermöglichen und logistisch leicht im Unterricht eingesetzt werden können. Nach Wollring (2009) dürfen sie außerdem nicht isoliert stehen, sondern müssen bewusst mit anderen Lernumgebungen vernetzt sein.

Die Zusammenstellung im folgenden Kasten stellt den Versuch dar, wesentliche Aspekte explizit zu benennen, die bei der Entwicklung und Beurteilung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht von Bedeutung sind. Gerade auch mit Blick auf die Definition von Lernumgebungen bei Reinmann und Mandl (2006, S. 615f) sind die ersten beiden Punkte als einschränkende Spezifizierung zu sehen. Im Folgenden wird ausschließlich von Lernumgebungen gesprochen, wenn sie auf das selbständige Arbeiten von Schülerinnen und Schülern abgestellt sind und entdeckendes Lernen ermöglichen. Darüber hinaus sind aber auch die weiteren Punkte sehr wesentlich für eine gelungene mathematische Lernumgebung.

Lernumgebungen für den Mathematikunterricht

- Bilden den Rahmen für das selbstständige Arbeiten von Lerngruppen oder individuell Lernenden,
- sollen entdeckendes Lernen ermöglichen,
- umfassen geeignete Medien, Materialien sowie Aufgabenstellungen, die hinreichend offen sind, um differenzierend zu wirken,
- sind inhaltlich sinnvoll strukturiert und fachlich korrekt,
- bieten vielfältige Zugänge zu einem mathematischen Phänomen,
- setzen einen methodischen und sozialen Rahmen,
- fordern zur Kommunikation und Reflexion über das Erarbeitete heraus,
- enthalten Aufforderungen zur Dokumentation der Ergebnisse
- und bieten bei Bedarf individuell abrufbare Hilfestellungen an.

(vgl. Vollrath und Roth, 2011, S. 150ff)

Vernetzung

In der aktuellen mathematikdidaktischen Diskussion ist das Thema „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ in aller Munde. Im Jahr 2007 hat Astrid Brinkmann ihre Dissertation zu diesem Thema veröffentlicht, vor kurzem hat Horst Hischer (2010) ein ganzes Buch darüber verfasst und im Jahr 2009 wurde ein GDM-Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ ins Leben gerufen, der 2011 seinen ersten Tagungsband (Brinkmann 2011) herausgegeben hat. Durch welche Aspekte Vernetzungen im Mathematikunterricht charakterisiert sind, ist zwischen den Autoren durchaus strittig und wird häufig sehr weit gefasst. Der genannte GDM-Arbeitskreis beschäftigt sich nach eigener Darstellung auf seiner Internetseite (Brinkmann 2009) unter anderem mit der Verbindung von mathematischen Fachinhalten, der Beziehungen zwischen Mathematik und ihrer Anwendung, der Nutzung der Tätigkeiten des Modellierens und des Problemlösens als Vehikel zur Vernetzung, sowie der Thematisierung von Methoden zur Vernetzung wie etwa Mind Mapping.

Vor diesem Hintergrund wird deutlich, wie wichtig es ist, für die hier propagierten „vernetzenden Lernumgebungen“ anzugeben, was denn nun eigentlich vernetzt wird. Konkret sind hier vier Aspekte wesentlich, die Vernetzung von

- Lehrplaninhalten,
- individuellen Perspektiven,
- Medien und
- Lernorten.

Vernetzen von Lehrplaninhalten

Bei den hier vorgestellten vernetzenden Lernumgebungen steht immer ein Phänomen im Mittelpunkt. Um es zu verstehen ist in der Regel eine ganze Reihe von Inhalten der Mathematiklehrpläne verschiedener Jahrgangsstufen zu (re-) aktivieren und miteinander zu vernetzen. So können Beziehungen zwischen Lehrplanthemen hergestellt, beziehungsweise erkannt werden, die Schülerinnen und Schüler sonst möglicherweise als unverbunden nebeneinander stehend wahrnehmen. Diese Art der Vernetzung beruht auf der *Anwendung* von Fähigkeiten und Kenntnissen aus verschiedensten mathematischen Inhaltsbereichen und hat das Verstehen, also das mathematische Durchdringen von Phänomenen zum Ziel.

Daneben bieten solche vernetzenden Lernumgebungen aber auch noch eine weitere Möglichkeit zur Vernetzung von Lehrplaninhalten. Hier geht es, ausgehend von einem Phänomen, um die *Erarbeitung* spezifischer Lehrplaninhalte. Auch hierzu müssen Vorkenntnisse (re-)aktiviert werden. Dahinter steht das genetische Prinzip, dessen Vorgehensweise Wagenschein (1968, S. 35) wie folgt beschreibt:

> *„Wir steigen also beim ‚Einstieg‘ von dem Problem aus hinab ins Elementare, wir suchen das, wonach es zu einer Erklärung verlangt. Eine Auswahl ist damit gegeben:* wir häufen nicht mehr auf Vorrat*, sondern suchen, was wir brauchen, wir verfahren also wie in der ursprünglichen Forschung.* Das Seltsame fordert uns heraus, und wir fordern ihm das Einfache ab.*“*
>
> *(Wagenschein 1968, S. 35, Hervorhebungen im Original)*

Vernetzt wird hier also durch die Erarbeitung von neuen Inhalten, aus dem Bedürfnis heraus, ein Phänomen zu verstehen. Dadurch werden wieder Beziehungen hergestellt. Der Anwendungsbezug wird nicht nachträglich, zum Erarbeiteten passend, konstruiert, sondern ist Ausgangspunkt der Überlegungen.

Vernetzen von individuellen Perspektiven

Die hier vorgestellten vernetzenden Lernumgebungen sind grundsätzlich für die gemeinsame Arbeit mehrerer Lernender an einem Phänomen ausgelegt. Daran entwickelt sich fast zwangsläufig eine intensive Kommunikation über mathematische Inhalte. Dadurch werden individuelle Sichtweisen der Schülerinnen und Schüler auf die Mathematik offengelegt und in der gemeinsamen Auseinandersetzung mit dem Phänomen entweder ausgeschärft oder ggf. auch hinterfragt. Das gemeinsame Arbeiten von Lernenden kann insbesondere bei komplexeren Phänomenen auch deshalb sinnvoll sein, weil diese einzelnen Lernenden alleine oft gar nicht erfolgreich bearbeitet werden können. Erst im Zusammenspiel der verschiedenen Fähigkeiten der Beteiligten, ihrer unterschiedlichen Vorerfahrungen, Sicht-, Denk- und Herangehensweisen lassen sich solche Phänomene mathematisch durchdringen und Probleme erfolgreich lösen.

Vernetzen von Medien

Im Zusammenhang mit Vernetzungen im Mathematikunterricht wird ein Aspekt, nämlich das sinnvolle Zusammenwirken verschiedenster Medien häufig nicht ausreichend beachtet. Dadurch gehen wesentliche Impulse für eine schülerzentrierte, eigenständige Erarbeitung von mathematischen Inhalten verloren, denn „ein geeigneter und individuell verantworteter Einsatz verschiedenster Medien [kann] eine entscheidende Komponente bei Problemlöseprozessen sein“ (Roth 2009, S. 167). Bei den im Folgenden dargestellten vernetzenden Lernumgebungen werden im Wesentlichen auf der Basis von dynamischen Mathematiksystemen erzeugte Simulationen, gegenständliche Modelle, „Papier und Bleistift“, sowie vereinzelt Videos als Medien eingesetzt. Dabei haben sich gegenständliche Modelle insbesondere für den guten Einstieg und den leichteren inhaltlichen Zugang zu Aspekten des betrachteten Phänomens als fruchtbar erwiesen, während die Simulationen ihre Stärken immer dann ausspielen, wenn die Beziehung zwischen dem Phänomen und dem mathematischen Gehalt herausgearbeitet wird. Dazu kann gerade das Ansteuern von Spezial- oder Grenzfällen beitragen, die so mit gegenständlichen Modellen in der Regel gar nicht umgesetzt werden können. Häufig ist es aber auch erst die Simulation, die Unzulänglichkeiten und Fehlinterpretation, die im Zusammenhang mit dem Arbeiten am gegenständlichen Modell aufgetreten sind, aufdecken und beheben hilft. Dazu ist es u. a. hilfreich, dass in Simulationen auch Fokussierungshilfen (z. B. farbliche oder gestalterische Hervorhebungen wesentlicher Aspekte) realisierbar sind, die ein und wieder ausgeblendet werden können.

Vernetzen von Lernorten

Im Zusammenhang mit außerschulischen Lernorten, wie dem Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“, ist darüber hinaus die Vernetzung der verschiedenen Lernorte der Schülerinnen und Schüler (Schule, außerschulischer Lernort und „Kinderzimmer“) ganz wesentlich. Inhalte werden im Unterricht im Klassenverband der Schule erarbeitet. Darauf aufbauend arbeiten die Schülerinnen und Schüler selbsttätig im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“, anschließend werden die gemachten Erfahrungen im Unterricht wieder aufgegriffen und vertieft. Bei Bedarf können die Schülerinnen und Schüler jederzeit über die begleitenden Internetseiten, die unter der Adresse *www.mathe-labor.de* abrufbar sind, auf die nichtgegenständlichen Materialien der jeweiligen Laborstation zugreifen und so, je nach eigenem Interesse, ihre Arbeit am Thema auch von Zuhause aus noch vertiefen.

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

An der Universität Koblenz-Landau wird am Campus Landau von der Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen) das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ betrieben. Es ist als außerschulischer Lernort und Schülerlabor konzipiert, das aus vernetzten Lernumgebungen besteht. Diese unterstützen Schülerinnen und Schüler dabei, Phänomene mathematisch zu durchdringen. In das Mathematik-Labor werden ganze Schulklassen der Sekundarstufen eingeladen, die in Kleingruppen ca. drei Stunden lang an jeweils einem Thema arbeiten.

Durch *experimentellen* Umgang mit *gegenständlichen Modellen* und *systematische Variation in Computersimulationen* sollen sowohl das Verständnis technischer Vorgänge, als auch das mathematische Grundlagenwissen verbessert werden. Die Schülerinnen und Schüler erkennen durch eigenständiges (mathematisches) Experimentieren und Modellieren die zugrunde liegenden Prinzipien, setzen diese in Beziehung zu ihrem mathematischen Wissen und vernetzen beides durch das Arbeiten mit Simulationen. Erfahrungen mit den gegenständlichen Modellen und Simulationen werden *mathematisiert*, also aufbereitet, systematisiert und darauf aufbauend mathematische Darstellungen sowie analytische Beschreibungen entwickelt. Es geht dabei um das Auffinden und Darstellen mathematischer Zusammenhänge, die Klärung notwendiger mathematischer Grundlagen und evtl. die Überprüfung von Hypothesen. Dazu werden in den Laborlernumgebungen schriftliche gestufte Hilfen angeboten, die individuell nach Bedarf und abhängig vom gewählten Zugangsweg abgerufen werden können.

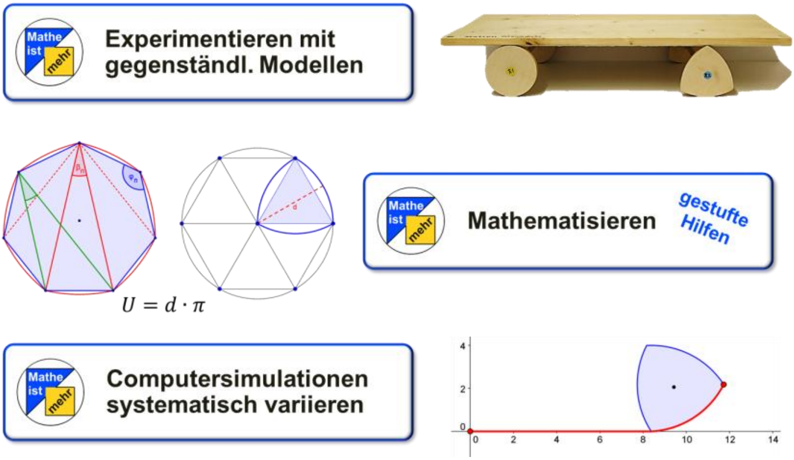

Abb. 1: Drei Komponenten des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“

Es gibt bereits bestehende und noch in der Entwicklung befindliche Laborstationen zu unterschiedlichen Themen, die sich grob in drei Kategorien einteilen lassen:

- Innermathematische Themen
  (Unendlich, figurierte Zahlen, Kryptologie, Rollkurven, historische Instrumente, Gleichdicks, Strahlensätze, Schaltalgebra, Graphentheorie, bedingte Wahrscheinlichkeit)
- Themen mit Bezug zu den Naturwissenschaften
  (Linsen, Brechung, Lochkamera, Schatten, Spiegel, schiefer Wurf)
- Themen mit Alltagsbezug
  (Einparken, Baggerarmsteuerung, Lotto, Vermessung, Fußball, GPS, Roulette)

Im Folgenden werden anhand der Laborstation „Gleichdicks“ (einem innermathematischen Thema) einige Aspekte von vernetzenden Lernumgebungen im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ konkretisiert.

„Gleichdicks“ – ein Beispiel für eine vernetzende Lernumgebung

Die Station „Gleichdicks“ geht vom Phänomen der Unterlegrollen aus. Diese wurden bereits im Altertum benutzt, um schwere Lasten, etwa Steinquader für den Bau von Pyramiden, zu transportieren. Dazu hat man, wie in Abbildung 2 dargestellt, runde Hölzer unter den Quader gelegt und ihn so rollend bewegt. Wenn der kreisförmige Querschnitt der Hölzer jeweils denselben Durchmesser hat, dann lässt sich der Quader auf diese Weise ohne zu wackeln transportieren.

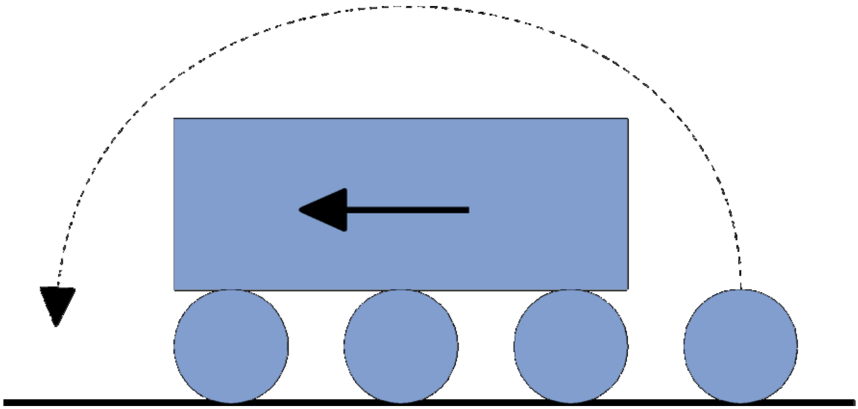

Abb. 2: Unterlegrollen

Aus der innermathematischen Perspektive stellt sich hier die Frage, ob das auch mit anderen Querschnitten der Unterleghölzer funktionieren würde, wie etwa mit denen in Abbildung 3.

Abb. 3: Lassen sich diese Hölzer als Unterlegrollen verwenden?

Vor dem Weiterlesen lohnt sich eine kurze Reflexion, welche der Figuren wohl als Querschnitte für Unterleghölzer geeignet sind.[1] Diese Frage lässt sich gut mit Hilfe von gegenständlichen Modellen klären (vgl. Abbildung 4). Legt man nämlich, bei ebener Unterlage, ein Brett auf entsprechende Rollen, stützt sich von oben auf das Brett und bewegt es hin und her, so kann man sehr eindrücklich die Erfahrung machen, ob hier etwas „wackelt“, ob also eine Auf- und Abbewegung vorliegt oder das Brett immer denselben Abstand zur Unterlage behält. Dabei wird schnell deutlich, dass es einige sehr unterschiedliche Querschnitte gibt, die sich für Unterlegrollen eignen.

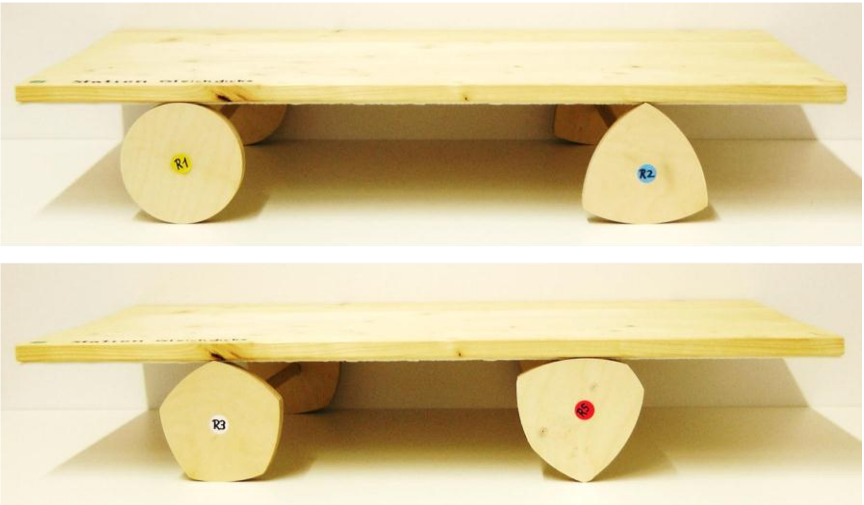

Abb. 4: Interessante Unterlegrollen

Allein aus dieser Erfahrung lässt sich auch die wesentliche Bedingung für die gewünschte Funktionalität ableiten: Das aufgelegte Brett muss immer denselben Abstand zum Boden haben. Dazu müssen die Querschnittsfiguren in alle Richtungen dieselbe Dicke aufweisen, also sogenannte Gleichdicks sein.

[1] Es geht hier nur um die innermathematische Perspektive auf diese Frage. Physikalische Aspekte wie Gleichgewichtslagen, Druckverteilungen und ähnliches werden bei den folgenden Betrachtungen unberücksichtigt gelassen.

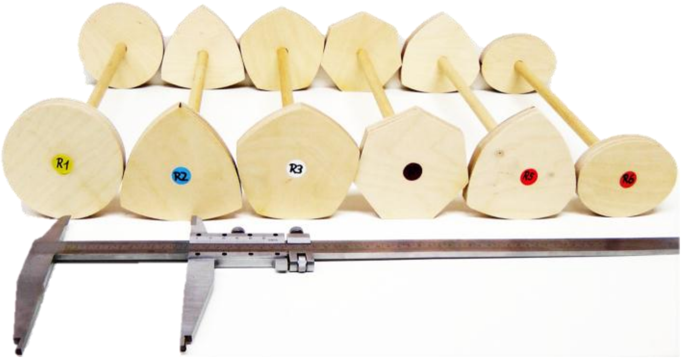

Abb. 5: Dicke messen

Mit Hilfe einer Schieblehre lässt sich dies an den gegenständlichen Modellen (vgl. Abbildung 5) überprüfen. Das Anlegen einer Schieblehre kann man sich auf Schülerniveau als Anlegen von zueinander parallelen Geraden an die Figur vorstellen. Diese Geraden „berühren“ die Figur jeweils nur am Rand, d. h. an mindestens einem Randpunkt, aber nie im Inneren der Figur. Man nennt die Geraden auch „Stützgeraden“. Abbildung 6 zeigt ein Stützgeradenpaar einer Figur bzgl. einer vorgegebenen Richtung.

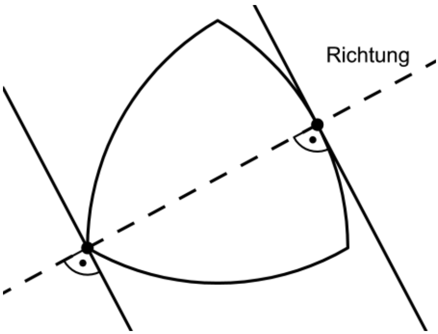

Abb. 6: Figur mit zueinander parallelen Stützgeraden in einer vorgegebenen Richtung.

Interessanterweise erkennen die Schülerinnen und Schüler beim Messen nicht immer, ob es sich um ein „Gleichdick“ handelt oder nicht. So wird etwa ein reguläres Siebeneck von vielen Schülern nach dem Messen mit einer Schieblehre für ein Gleichdick gehalten, also eine Figur, die in alle Richtungen dieselbe Dicke besitzt. Es werden nämlich in der Regel nur Richtungen ausgewählt, in denen sich die Schieblehre gut anlegen lässt. Die Diagonallängen werden häufig gar nicht gemessen. Hier zeigt sich zum ersten Mal, dass eine Vernetzung verschiedener Medien von großem Vorteil für das Verständnis sein kann. Eine im Anschluss an das Arbeiten mit den gegenständlichen Modellen eingesetzte Simulation (vgl. Abbildung 7), bei der die Schülerinnen und Schüler ein zueinander paralleles Stützgeradenpaar der Figur „stetig“ um die Figur rotieren lassen können, wird aufgrund der Erfahrungen mit den gegenständlichen Modellen ohne Erläuterung verstanden.

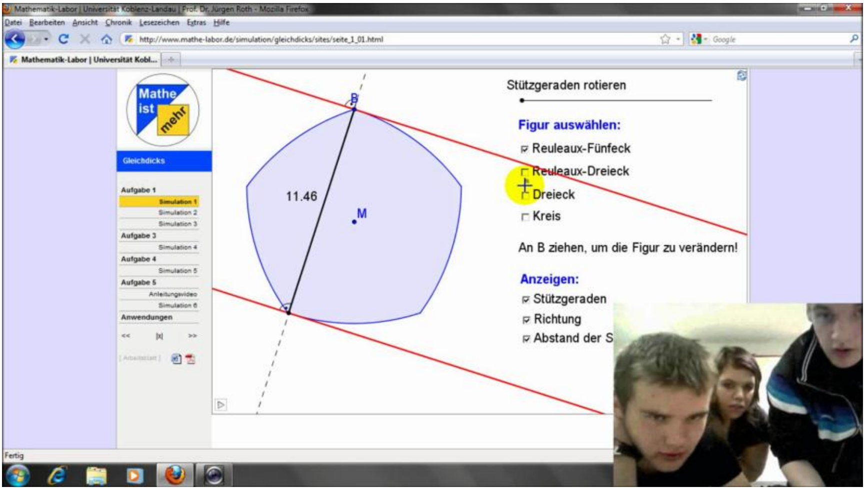

Abb. 7: Simulation mit zueinander parallelen Stützgeraden,
die um die Figur gedreht werden können

Das Arbeiten mit gegenständlichen Modellen vor der systematischen Variation von Simulationen scheint also das Verständnis des Phänomens und damit den Zugang zum Arbeiten mit Simulationen zu erleichtern. Andererseits unterstützt die Simulation sehr deutlich die Fokussierung auf das Wesentliche und erleichtert die Erkenntnisgewinnung. Dies zeigt sich etwa daran, dass alle Schülerinnen und Schüler anhand der Simulation korrekt entscheiden, bei welcher Figur es sich um ein Gleichdick handelt und bei welcher nicht. Interessanterweise gelingt dies oft sogar schon, bevor die Schülerinnen und Schüler die Stützgeraden rotieren lassen und deren gegenseitiger Abstand beobachtet werden konnte. Dieser Blick auf das Wesentliche führt auch dazu, dass die Schülerinnen und Schüler zum Teil ganz bewusst Grenzfälle ansteuern und untersuchen. So werden unter anderem auch gezielt die Situationen angesteuert, bei denen die Stützgeraden an

Diagonalen anliegen. Dieses Vorgehen spielt beim realen Messvorgang mit der Schieblehre dagegen praktisch gar keine Rolle.[2]

Gleichdicks sind offensichtlich als Unterlegrollen geeignet. Lassen sie sich aber auch als Räder an Achsen verwenden? Ein Experiment, bei dem man ein Brett auf die Achsen der Rollen aus Abbildung 5 legt, zeigt, dass das, abgesehen vom Kreis, bei keinem Gleichdick funktioniert (vgl. Abbildung 8).

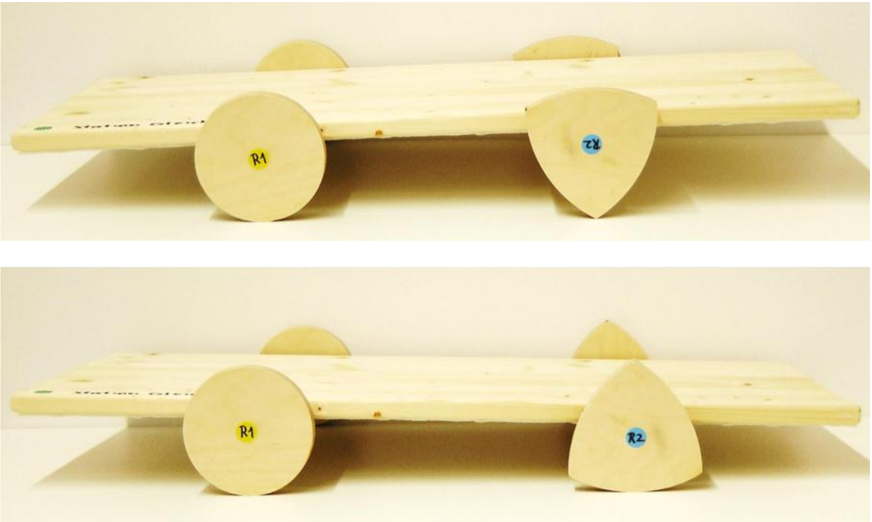

Abb. 8: Lassen sich Gleichdicks als Räder an Achsen verwenden?

Ein einfaches weiteres Experiment (vgl. Abbildung 9) macht deutlich, woran das liegt. Dazu durchbohrt man ein Gleichdick im Mittelpunkt[3] (der Radnabe),

---

[2] Die Analyse der Schülerarbeit an den Simulationen und gegenständlichen Modellen der Laborstation wurde durch die lückenlose Aufzeichnung (vgl. Abbildung 7) und Kommentierung mit Hilfe der Software Morae (TechSmith 2011) deutlich erleichtert. Dabei wurde die im Laptop integrierte Webcam nicht nur für die Aufnahme der Schülerinnen und Schüler beim Arbeiten an den Simulationen verwendet. Durch geschickte Platzierung des Laptops und des Gruppentisches konnte so auch die gesamte Gruppenarbeitsphase ohne sichtbare und dadurch potentiell störende Kamera aufgezeichnet werden.

[3] Im Allgemeinen ist nicht sofort klar, was der Mittelpunkt eines Gleichdicks ist. Für Reuleaux-Polygone, also Gleichdicks, die ein reguläres Vieleck als Stützfigur besitzen, ist aber sofort einsichtig, dass der Mittelpunkt des Umkreises des Stützpolygons auch der Mittelpunkt des Reuleaux-Polygons ist.

steckt einen Stift hindurch und rollt es auf einer Schiene ab. Im Gegensatz zum kreisförmigen Rad, dessen Mittelpunkt (Radnabe) eine Parallele zur Unterlage durchläuft, ergeben sich bei allen anderen Gleichdicks wellenförmige Kurven. Der Abstand der Radnabe von der Unterlage variiert hier also. Dies lässt sich verstehen, wenn man sich Speichen in das „Rad“ hineindenkt. Anhand einer Simulation mit rotierender Speiche erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass bei allen Gleichdicks außer dem Kreis diese Speichen unterschiedlich lang sind. Aus diesem Grund muss eine Bewegung auf ebener Grundfläche zu einer Auf- und Abbewegung der Achse führen.

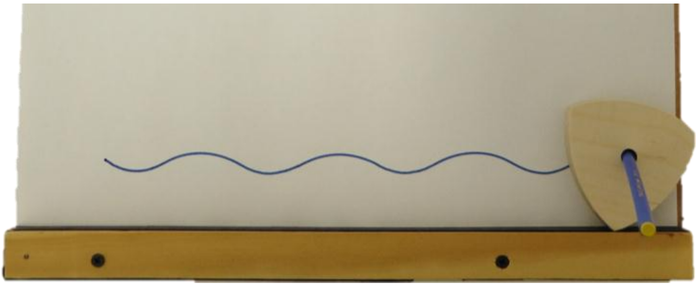

Abb. 9: Experiment zum Erzeugen der Bahnkurve des Mittelpunkts eines Reuleaux-Dreiecks

Das einfachste Gleichdick neben dem Kreis ist ein gleichseitiges Kreisbogendreieck. Bei diesem Gleichdick, dem sogenannten Reuleaux-Dreieck[4] (vgl. Abbildung 10), werden über den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks (Stützpolygon) Kreisbögen so konstruiert, dass jede Ecke der Mittelpunkt des gegenüberliegenden Kreisbogens ist. Bereits an diesem einfachen Gleichdick wird sehr schnell deutlich, welchen mathematischen Tiefgang man hier erreichen kann.

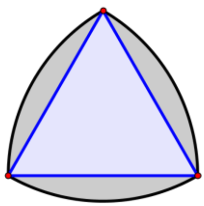

Abb. 10: Reuleaux-Dreieck

[4] Reuleaux-Polygone sind nach dem Professor für Maschinenlehre Franz Reuleaux (1829–1905) benannt.

Exkurs: Bahnkurve des Mittelpunkts des Reuleaux-Dreiecks

Fragt man sich welche Bahnkurve von der Radachse eines Reuleaux-Dreiecks durchlaufen wird, dann ergeben sich neben leicht fassbaren Aspekten auch solche, die nicht offensichtlich und deutlich anspruchsvoller sind. Dadurch ergeben sich Möglichkeiten zur Differenzierung für sehr leistungsstarke Schülerinnen und Schüler.

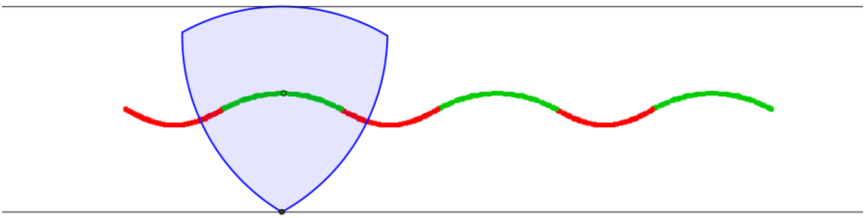

Abb. 10a: Bahnkurve des Mittelpunkts des Reuleaux-Dreiecks beim Abrollen auf einer Geraden

Bei der genauen Beobachtung des Bewegungsablaufs (vgl. Abbildung 10a) fällt auf, dass es Phasen gibt, in denen das Reuleaux-Dreieck um einen seiner Eckpunkte kippt. Beim Kippen bleibt die „Radnabe“ immer gleich weit vom Drehpunkt entfernt. Der Mittelpunkt des Reuleaux-Dreiecks bewegt sich in diesen Phasen also jeweils auf einem Kreisbogen (vgl. Abbildung 10b).

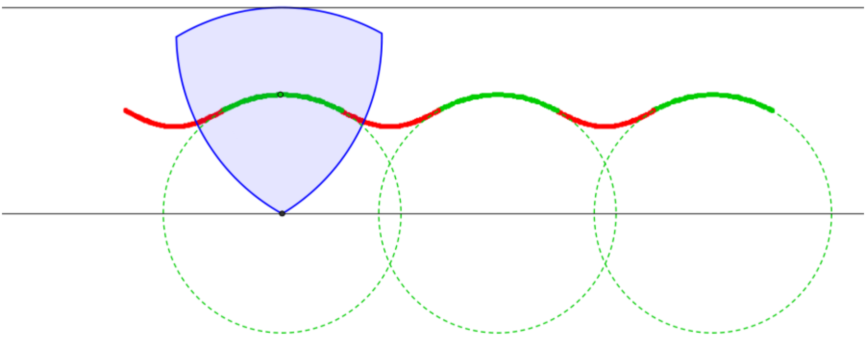

Abb. 10b: Teilkurven: Kreisbogenstücke beim Drehen um jeweils einen Eckpunkt des Reuleaux-Dreiecks

Daneben gibt es Phasen in denen das Reuleaux-Dreieck auf einer seiner Seiten (Kreisbogen) abrollt. Dies lässt sich als Abrollen eines Kreises auf der Unterlage interpretieren (vgl. Abbildung 10c). Wenn man sich die Bewegung fortgesetzt vorstellt, dann erkennt man mit einiger Erfahrung die Situation einer Zykloide. In dieser Phase kann der Mittelpunkt des Reuleaux-Dreiecks also als (Ventilend-)Punkt auf einem Fahrradreifen interpretiert werden, der auf einer Geraden abrollt.

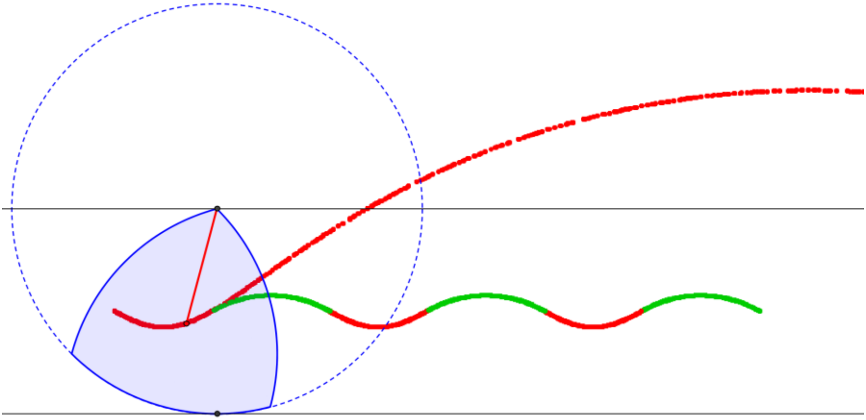

Abb. 10c: Teilkurven: Beim Abrollen auf einer „Seite“ des Reuleaux-Dreiecks entstehen Zykloidenabschnitte

Insgesamt ist die Bahnkurve des Mittelpunkts also eine zusammengesetzte Kurve aus Kreisbogenstücken, die aus der Drehung um jeweils einen Eckpunkt resultieren und Zykloidenabschnitten, die beim Abrollen auf jeweils einer Seite des Reuleaux-Dreiecks entstehen. Die Abbildungen 10b und 10c zeigen Momentaufnahmen dieser Teilbewegungen mit angedeuteten Fortsetzungen der jeweiligen Teilkurven.

Intuitiv erwartet man, dass die Bahnkurve symmetrisch bzgl. der Unterlage (untere Gerade) und der aufliegenden Last (obere Gerade) ist. Dies ist aber nicht der Fall, wie man sich anhand der Bewegung eines Eckpunkts des Reuleaux-Dreiecks leicht klar machen kann. Wenn der Punkt die untere Gerade berührt, dann kippt das Reuleaux-Dreieck gerade um diesen Eckpunkt. Wenn der Punkt allerdings die obere Gerade berührt, dann rollt das Reuleaux-Dreieck gerade auf dem gegenüberliegenden Kreisbogen ab. Die Bahnkurve eines solchen Eckpunkts (vgl. Abbildung 10d) macht dies noch einmal sehr deutlich. Sie setzt sich in Abbildung 10d von links nach rechts aus einem Zykloidenstück (Abrollen am angrenzenden Kreisbogen), einem Kreisbogenstück (Kippen um die benachbarte Ecke), einer Geraden (Abrollen auf dem gegenüberliegenden Kreisbogenstück), einem Kreisbogenstück (Kippen um die andere benachbarte Ecke) und schließlich wieder einem Zykloidenstück (Abrollen am anderen angrenzenden Kreisbogen) usw. zusammen.[5]

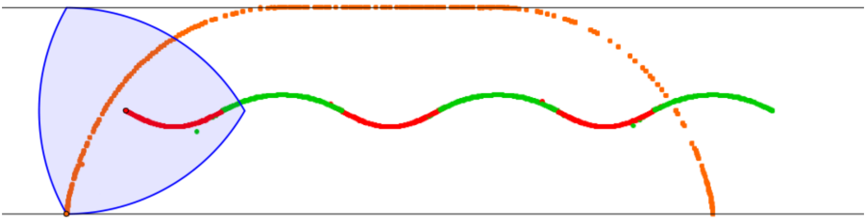

Abb. 10d: Bahnkurve eines Eckpunkts des Reuleaux-Dreiecks

Dieser Exkurs sollte das mathematische Potential andeuten, das das Thema „Gleichdicks“ eröffnet. Im Rahmen einer Laborstation des Mathematik-Labors können davon nur Teile bearbeitet werden. Interessierten Schülern bietet sich aber die Gelegenheit, sich in vielfältiger Weise weiter damit auseinanderzusetzen, etwa im Rahmen von Facharbeiten.

Konstruktion von Gleichdicks

Nach den Erfahrungen die die Schülerinnen und Schüler bis hierhin im Rahmen der Laborstation mit Gleichdicks gesammelt haben, stellt sich die Frage, wie derartige Gleichdicks konstruiert werden können. Das Reuleaux-Dreieck lässt sich mit Hilfe eines gleichseitigen Dreiecks als Stützpolygon aus Kreisbögen konstruieren, deren Mittelpunkt in einem Eckpunkt liegt und die jeweils durch die beiden übrigen Eckpunkte verlaufen. Für die Schülerinnen und Schüler ist die Frage interessant, ob auch über allen anderen regelmäßigen n-Ecken reguläre Reuleaux-Polygone erzeugt werden können. Zu diesem Zweck erhalten sie auf Papier vorgegebene reguläre *n*-Ecken als Stützpolygone und sollen auf dieser Basis, jeweils mit Hilfe eines Zirkels, Reuleaux-Polygone konstruieren.

Jeder Schüler der Gruppe wählt sich ein Stützpolygon aus (vgl. Abbildung 11a) und soll zunächst einfach versuchen, eine entsprechende Figur zu konstruieren. Dabei gelangen einige Schülerinnen und Schüler schnell zum Erfolg, indem sie jeweils einen Eckpunkt des Stützpolygons als Kreismittelpunkt benutzen und

---

[5] Eine genauere Erörterung der Frage, warum die Mittelpunktskurve nicht symmetrisch bzgl. Unterlage und Unterkante des Rollguts ist, findet sich bei Walser (2011c). Dort wird unter anderem auch auf verschiedene mögliche Bezugssysteme eingegangen.

einen Kreisbogen durch die Endpunkte der gegenüberliegenden Strecke zeichnen. Nachdem sie diesen Vorgang *n* Mal bei ihrem *n*-Eck wiederholt haben, schließt sich ihr Reuleaux-Polygon.

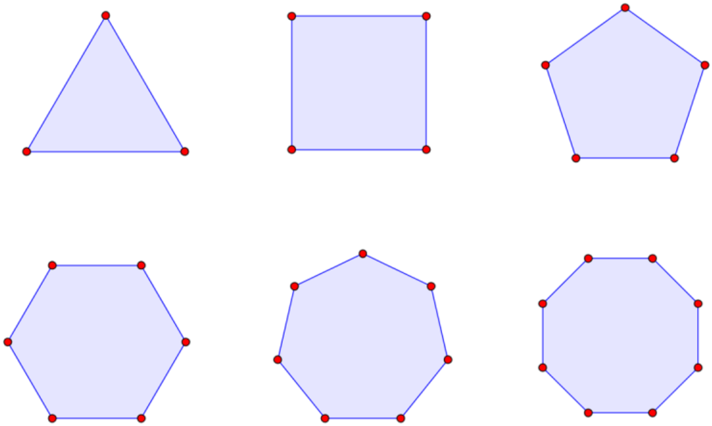

Abb. 11a: Mögliche Stützpolygone für Reuleaux-Polygone?

Andere Schülerinnen und Schüler haben weniger Glück. Bei ihren Stützpolygonen funktioniert diese Strategie offensichtlich nicht. Es wird schnell deutlich, dass das bei *n*-Ecken mit gerader Eckenzahl grundsätzlich nicht funktioniert (vgl. Abbildung 11b).

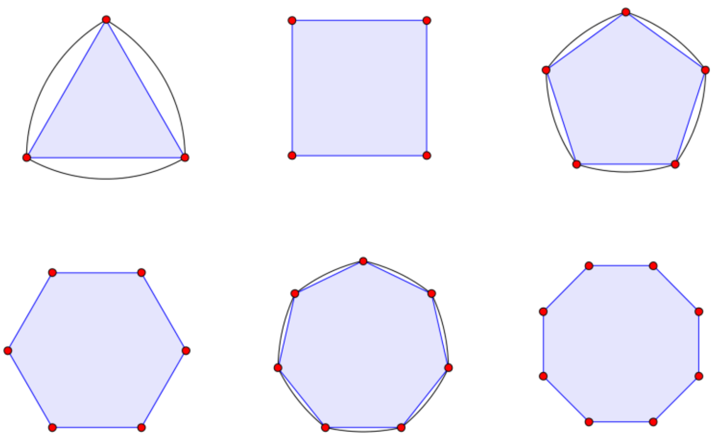

Abb. 11b: Die Schülerinnen und Schüler erkennen, das die Konstruktion nur für Stützpolygone mit ungeradzahliger Eckenanzahl funktioniert

Die Argumente der Schülerinnen und Schüler dafür, warum das so ist, sind zum Teil interessant. Sie erkennen jedoch alle, dass dies daran liegt, dass die zur Konstruktion des Kreisbogens über der entsprechenden Seite des Stützpolygons gegenüberliegende Ecke bei gerader Anzahl der Ecken fehlt. Hier muss natürlich ein Eckpunkt vorhanden sein, der auf der Mittelsenkrechten zur gewählten Seite liegt. Dies ist aber nur bei ungerader Eckenzahl der Fall.

Darüber hinaus gibt es noch eine ganze Reihe von Konstruktionsmöglichkeiten für ganz unterschiedlichen Gleichdicktypen, die in Reichweite der Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I sind. Im Rahmen der Station wird folgender Konstruktionstyp thematisiert und von den Schülerinnen du Schülern umgesetzt, bei dem unregelmäßige Gleichdicks so aus Kreisbogenstücken zusammengesetzt werden, dass keine Ecken entstehen.

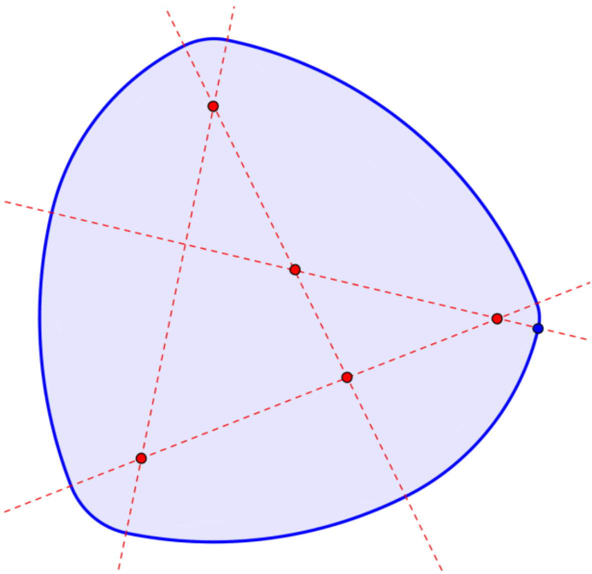

Abb. 12: Unregelmäßiges Gleichdick

Das in Abbildung 12 dargestellte Gleichdick wurde auf der Basis der gestrichelt eingezeichneten Geraden konstruiert. Dazu wählt man sich zunächst einen geeigneten Punkt auf einer der Geraden (in der Abbildung der Punkt ganz rechts). Von diesem Punkt soll ein Kreisbogen konstruiert werden, der bis zur nächsten Geraden verläuft und beide beteiligten Geraden jeweils senkrecht schneidet.

Letzteres ist nötig, damit die jeweils aneinanderstoßenden Kreisbogenstücke am Berührpunkt eine gemeinsame Tangente besitzen, das fertige Gleichdick also keine Ecken hat. Dies lässt sich nur dadurch realisieren, dass der Schnittpunkt der beiden beteiligten Geraden der Mittelpunkt des zu konstruierenden Kreisbogens ist. Der nächste Kreisbogen verläuft dann in analoger Weise bis zur nächsten Geraden. Für die Schülerinnen und Schüler die an der Laborstation arbeiten, wurde dazu ein Anleitungsvideo erstellt, das auf der Seite *www.mathe-labor.de* abgerufen werden kann.

Warum handelt es sich bei der Figur in Abbildung 12 um ein Gleichdick? Um dies zu klären, ist zu überprüfen, ob die Figur in alle Richtungen dieselbe Dicke besitzt. Zunächst ist die Dicke der Figur in Richtung einer der eingezeichneten Geraden nichts anderes als die Länge der von der Figur aus der Geraden ausgeschnittenen Strecke. Diese Strecke ist die Summe der beiden Radien der Kreisbögen zwischen dieser Gerade und der folgenden Gerade. Also ist die von der Figur aus der folgenden Geraden ausgeschnittenen Strecke wieder genausolang, wie die Länge der vorherigen Strecke, da sie sich aus denselben Radien zusammensetzt. Dreht man in Gedanken die erste Gerade um den Schnittpunkt mit der folgenden Geraden, so ist leicht zu sehen, dass die Dicke der Figur zwischen diesen beiden Geraden immer gleich bleibt. Dieselbe Argumentation gilt für die Dicke der Figur zwischen je zwei sich schneidenden Geraden. Die Folge ist, dass die Figur in der dargestellten Konfiguration ein Gleichdick ist und dass die Kreisbögen sich insbesondere schließen.

Es sei hier vor dem Eindruck gewarnt, dass alle Gleichdicks sich aus Kreisbögen zusammensetzen. Walser (2011b) beschreibt etwa Gleichdicks, die sich aus Evolventenbögen zusammensetzen.

Umfang von Gleichdicks

Wie steht es mit den Umfängen von verschiedenen Gleichdicks mit denselben Dicken? Schülerinnen und Schüler können für ausgewählte Familien von Gleichdicks den Satz von Barbier entdecken und auf verschiedene Weisen begründen. Er lautet:

Satz von Barbier: Eine ebene Figur konstanter Breite b besitzt den Umfang πb.

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen den Umfang von verschiedenen Gleichdicks gleicher Dicke mit Hilfe einer Simulation, mit der man Gleichdicks „abwickeln“ kann (vgl. Abb. 13).

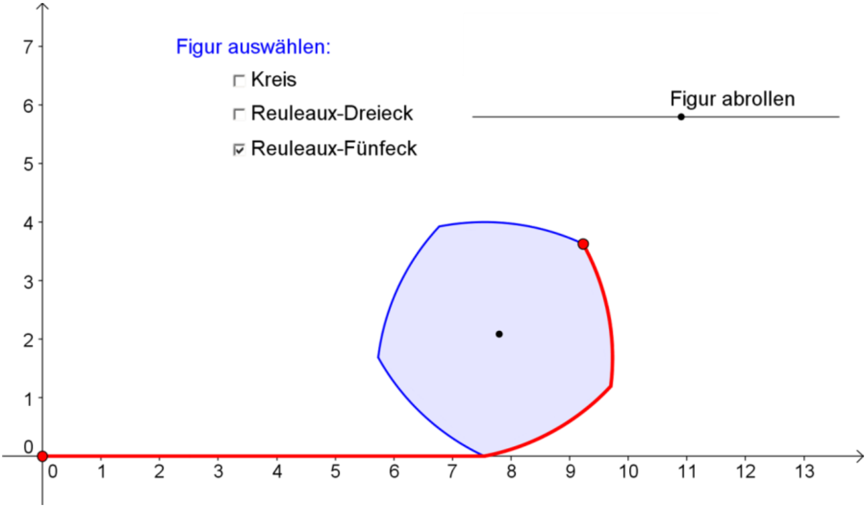

Abb. 13: Simulation zum „Abwickeln“ von Gleichdicks

Dabei entdecken sie, dass einige Gleichdicks, die dieselbe Dicke wie ein Kreis besitzen, auch denselben Umfang wie der Kreis haben. Da die Dicke des Kreises sein Durchmesser ist, ergibt sich für den Wert des Umfangs $u = d \cdot \pi$. Ob dies etwa für das Reuleaux-Dreieck wirklich zutrifft, lässt sich mit Hilfe von ganz unterschiedlichen Zugängen erarbeiten. Dadurch eröffnen sich vielfältige Möglichkeiten der Differenzierung.

1. Zugang

Abb. 14: Reuleaux-Dreieck aus kongruenten Kreissektoren legen

Auf sehr elementarer Ebene kann der Umfang eines Reuleaux-Dreiecks enaktiv erarbeitet werden. Da das Reuleaux-Dreieck auf der Basis eines gleichseitigen Stützdreiecks konstruiert wird, kann es aus drei kongruenten Kreissektoren zum

Mittelpunktswinkel 60° gelegt werden (vgl. Abbildungen 14). Wenn die Schülerinnen und Schüler dies mit Foliensektoren durchgeführt haben, ist es kein Problem mehr, diese Sektoren so umzulegen, dass der Umfang des Reuleaux-Dreiecks direkt erkennbar ist (vgl. Abbildung 15).

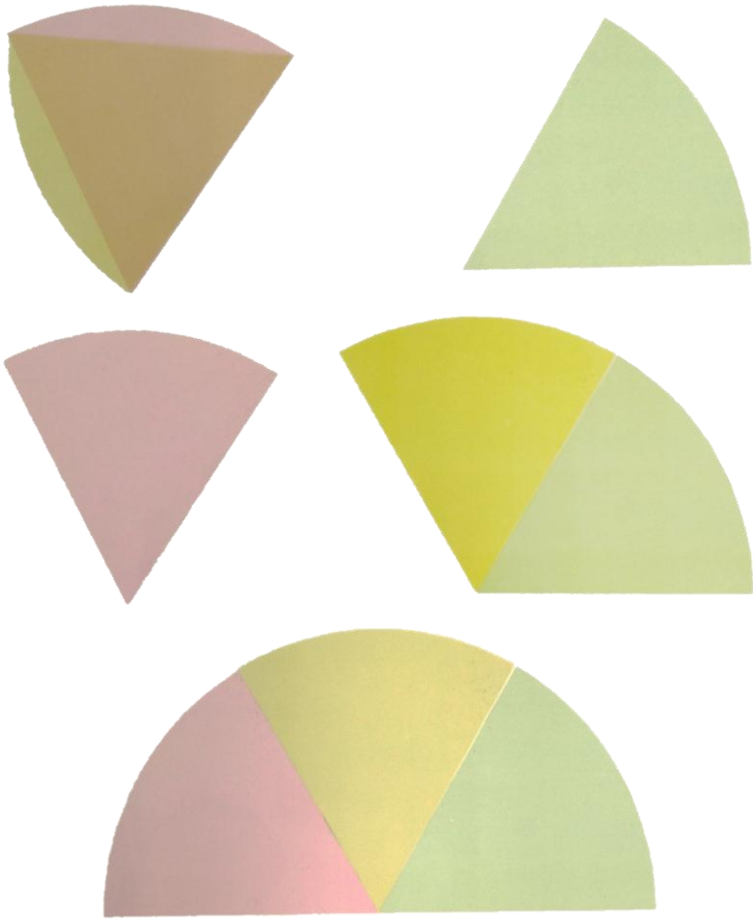

Abb. 15: Umfang des Reuleaux-Dreiecks enaktiv bestimmen.

Da alle Innenwinkelgrößen im gleichseitigen Dreieck 60° betragen, ergänzen sich die Mittelpunktswinkel der drei Kreissektoren zu 180°. Damit ist der Umfang des Reuleaux-Dreiecks halb so groß wie der Umfang des Kreises mit der Dicke *d* des Reuleaux-Dreiecks als Radius. Also ergibt sich für den Umfang des Reuleaux-Dreiecks: $u_{RD} = d \cdot \pi$

2. Zugang

Alternativ können sich die Schülerinnen und Schüler den Umfang des Reuleaux-Dreiecks aber auch anhand der Zeichnung in Abbildung 16 erarbeiten.

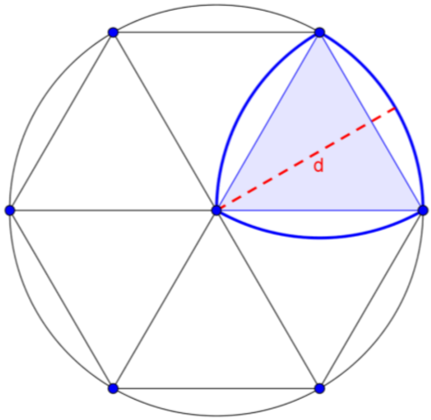

Abb. 16: Herleitung des Umfangs eines Reuleaux-Dreiecks anhand der Konstruktionszeichnung

3. Zugang

Wenn etwas mehr geometrische Vorkenntnisse (insbesondere über den Umfangswinkelsatz) vorhanden sind, können leistungsfähigere Schülerinnen und Schüler den Satz von Barbier sogar für alle Reuleaux-Polygone herleiten. Der Umfang eines Reuleaux-*n*-Ecks setzt sich aus der Länge von n kongruenten Kreisbögen zusammen (vgl. Abbildung 17). Der Radius dieser Kreisbögen ist gerade die Dicke d des Reuleaux-*n*-Ecks. Wenn man den zugehörigen Mittelpunktswinkel β_n bestimmen kann, ergibt sich der Umfang u_n des Reuleaux-*n*-Ecks zu

$$u_n = n \cdot d \cdot \beta_n \qquad (*)$$

Das Stützpolygon des Reuleaux-*n*-Ecks besitzt einen Umkreis. Folglich ist β_n der Umfangswinkel zum zugehörigen Mittelpunktswinkel μ_n. Dieser beträgt aber $1/n$ des Vollwinkels. Nach dem Umfangswinkelsatz ergibt sich:

$$\beta_n = \frac{\mu_n}{2} = \frac{\frac{2\pi}{n}}{2} = \frac{\pi}{n}$$

Daraus folgt durch Einsetzen in (*): $u_n = d \cdot \pi$

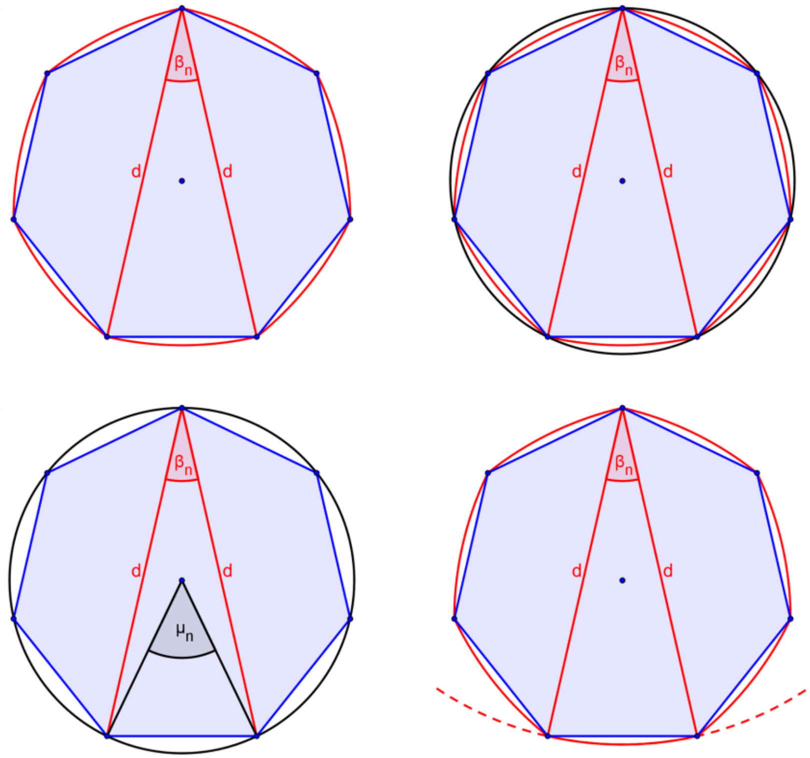

Abb. 17: Umfang von Reuleaux-Polygonen mit Hilfe des Umfangswinkelsatzes erarbeiten

Anwendungen

Den Abschluss der Laborstation und gleichzeitig eine weitere Möglichkeit zur Differenzierung bietet auf der begleitenden Internetseite der Unterpunkt „Anwendungen“. Hier wird ein breites Angebot gesetzt, aus dem die Schülerinnen und Schüler nach eigenem Interesse auswählen können. Dadurch werden wesentliche erarbeitete Aspekte noch einmal aufgegriffen und vertieft, sowie Grundvorstellungen zu Gleichdicks in verschiedenen Kontexten (re-)aktiviert. Unter diesen Anwendungen befinden sich folgende Aspekte:

Mit Hilfe eines Bohrers mit einem Reuleaux-Dreieck als Querschnitt kann man nahezu „quadratische“ Löcher bohren. Dabei muss der Mittelpunkt des Reuleauxdreiecks allerdings auf einer aus vier Ellipsenbögen zusammengesetzten Kurve bewegt werden (vgl. Schierscher 2005). Um dies nachvollziehen zu können, gibt es bei der Station ein Holzmodell und eine entsprechende Simulation (vgl. Abbildung 18). Das Reuleaux-Dreieck der Dicke d ist beim Holzmodell in ein Quadrat der Seitenlänge d eingesperrt, lässt sich darin bewegen und überstreicht dabei einen erheblich größeren Teil der Quadratfläche als das ein Kreis mit Durchmesser d.

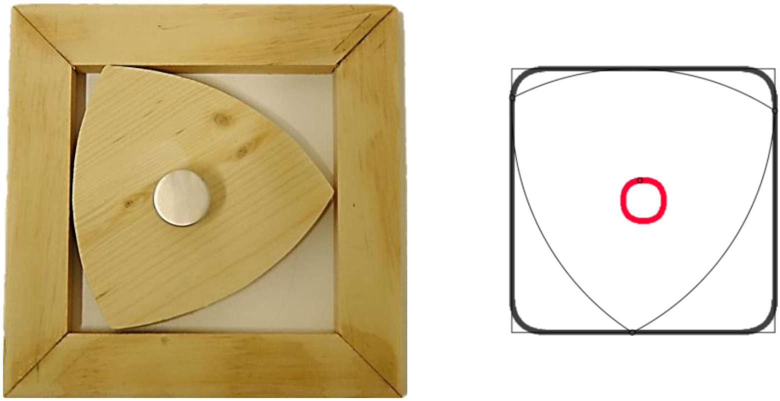

Abb. 18: „Quadratische“ Löcher bohren

Warum sind Kanaldeckel eigentlich häufig rund? Eine einfache Antwort lautet: Damit sie nicht in den offenen Kanalschacht fallen können. Die Folge ist, dass sich alle Gleichdicks dafür eignen, aufgrund des geringen Materialverbrauchs sogar insbesondere Reuleaux-Dreiecke. Dies wird anhand von verschiedenen Kanaldeckelmodellen erfahrbar (vgl. Abbildung 19).

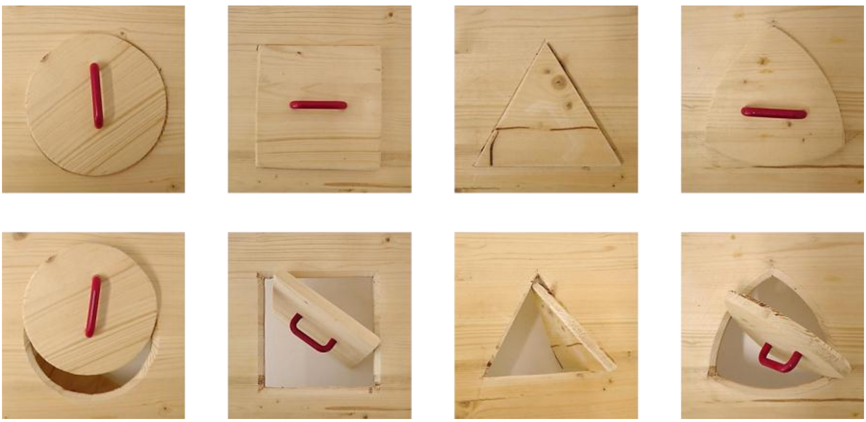

Abb. 19: Kanaldeckel

Auch Münzen und Knöpfe existieren aus naheliegenden Gründen (Automatenschlitze, Knopflöcher) in der Form von Gleichdicks. Bei Sicherheitsverschlüssen, etwa an Hydranten in New York (Lehmann 2004), werden hin und wieder Schrauben eingesetzt, deren Köpfe ein Reuleaux-Dreieck als Querschnitt besitzen. Diese sind mit einer Zange oder einem normalen Schraubenschlüssel nicht zu öffnen, weil diese abrutschen. Als letzte Anwendung wird noch der Wankelmotor erwähnt und mit einer dynamischen Konstruktionszeichnung dargestellt, dessen Rotationskolben ebenfalls einen Querschnitt in Form eines Reuleaux-Dreiecks besitzt. Gleichdicks gibt es übrigens nicht nur in der Ebene, sondern auch im Raum. Neben der Kugel gibt es noch eine ganze Reihe weiterer räumlicher Gleichdicks (vgl. Weber (2006) sowie Kawohl und Weber (2011)).

Das Phänomen „Gleichdicks“ besitzt interessante Bezüge zu Anwendungen, aber auch zur Kreisgeometrie des Mathematikunterrichts, die in einzelnen Aspekten über die Verallgemeinerung zum Gleichdick noch besser durchschaut werden kann. Aus diesem Grund aber auch wegen der guten Möglichkeiten, die sich für eine Verzahnung von gegenständlichen Modellen und Simulationen ergeben, sind Gleichdicks eine ideale phänomenologische Grundlage für eine vernetzende mathematikhaltige Lernumgebung.

Anmerkung

Weitere interessante Aspekte zum Thema Gleichdicks findet man in alphabetischer Reihenfolge unter anderem bei Appell (2011), Kawohl (1998), Kawohl und Weber (2001), Mayer (1995), Rademacher/Toepliz (1933), Schierscher (2005), Stühler (2000), Walser (2011c), Walser (2011b), Walser (2011c), Weber (2006) und Zeitler (1981).

Literatur

Appell, Kristina (2011): Gleichdicks – Figuren konstanter Breite erkunden. In mathematik lehren 165, S. 20-24

Brinkmann, Astrid (2007): Vernetzungen im Mathematikunterricht. Visualisieren und Lernen von Vernetzungen mittels graphischer Darstellungen. Hildesheim; Berlin: Franzbecker

Brinkmann, Astrid (2009): Vernetzt Vernetzen Lernen. *http://www.math-edu.de/Vernetzungen.html* (abgerufen am 08.12.2011)

Brinkmann, Astrid (2011) (Hrsg.): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht, Band 1. Hallbergmoos: Aulis-Verlag

Hischer, Horst (2010): Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? Vernetzung als Medium zur Weltaneignung. Hildesheim: Franzbecker

Kawohl, Bernd (1998): Was ist eine runde Sache? In: GAMM Mitteilungen, 21, S. 43-56

Kawohl, Bernd; Weber, Christof (2011): Meissner's Mysterious Bodies. In: The Mathematical Intelligencer 33 (3), S. 94–101

Lehmann, Ingmar (2004): π als Helfer der New Yorker Feuerwehr. *http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/magazin/geschichten/pi/pi.pdf* (abgerufen am 08.12.2011)

Mayer, Anton E. (1995): Der Inhalt der Gleichdicke. Abschätzungen für ebene Gleichdicke. In: Mathematische Annalen, 110 (1), S. 97-127

Rademacher, Hans; Toeplitz, Otto (1933): Kurven konstanter Breite. In: Rademacher, Hans; Toeplitz, Otto (1933): Von Zahlen und Figuren. Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik. Berlin: Julius Springer, S. 137-150

Reinmann, Gabi; Mandl, Heinz (2006): Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In: Bernd Weidenmann, Andreas Krapp (Hrsg.): Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch. Weinheim: Beltz, S. 613–658.

Roth, Jürgen (2009): Geometrie und der Bagger − Anschauung, Begriffe und Ideen vernetzen. In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster: WTM-Verlag, S. 167-171

Schierscher, Georg (2005): Das Reuleaux-Dreieck – ein bizarrer Rotor und Kurvengenerator. In: mathematik lehren 130, S. 2, 48-51

Stühler, Andrea (2000): Gleichdicks – Kurven konstanter Dicke. In: mathematik lehren 98, S. 49-51

TechSmith (2011): Morae – Software für Usability Tests und Marktforschung. *http://www.techsmith.de/morae.asp* (abgerufen am 08.12.2011)

Vollrath, Hans-Joachim; Roth, Jürgen (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Wagenschein, Martin (1968): Verstehen lehren. Genetisch – sokratisch – exemplarisch. Weinheim: Beltz

Walser, Hans (2011a): Gleichdick. *http://www.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/G/Gleichdick/Gleichdick.htm* (abgerufen am 08.12.2011)

Walser, Hans (2011b): Gleichdick mit Kartoffeln. *http://jones.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/G/Gleichdick_Kartoffeln/Gleichdick_Kartoffeln.htm* (abgerufen am 08.12.2011)

Walser, Hans (2011c): Reuleaux-Dreiecke. *http://jones.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/R/Reuleaux/Reuleaux.htm* (abgerufen am 08.12.2011)

Weber, Christof (2006): Gleichdick – Körper konstanter Breite. *http://www.swisseduc.ch/mathematik/material/gleichdick/* (abgerufen am 08.12.2011)

Wittmann, Erich Christian (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. Beiträge zur Lehrerbildung, 16 (3), S. 329–342

Wollring, Bernd (2009): Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Peter-Koop, Andrea; Lilitakis, Georg; Spindeler, Brigitte (Hrsg.): Lernumgebungen – Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematik in der Grundschule. Offenburg: Mildenberger Verlag, S. 9-23

Zeitler, Herbert (1981): Über Gleichdicks – Anregungen und Erfahrungen zum Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I. In: Didaktik der Mathematik 4, S. 250-275

Adresse des Autors:
Prof. Dr. Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Institut für Mathematik
Universität Koblenz-Landau
Fortstraße 7
76829 Landau
roth@uni-landau.de